

# 厦门大学学位论文原创性声明

兹提交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年 月 日



# 厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在            年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名：                                  日期：       年   月   日

导师签名：                                  日期：       年   月   日



## 内容摘要

利率历来就是最重要、最基本的经济变量之一。对普通大众而言，它无时无刻不在影响着人们的投资行为和消费行为；对金融机构来说，利率的变动对其资产价值的影响不言而喻，利率风险管理尤其重要；对政府决策部门而言，利率的变动更是关系到国计民生，影响着国民经济的整体运行。因此，不管在理论上还是在实践中都需要找到一个能够较好描述利率动态的模型，并在此基础上进行利率产品设计、利率产品定价、利率产品套期保值、利率风险管理等相关行为的研究和实践。

本文首先从利率静态估计、利率均衡模型、利率无套利模型和国内利率模型研究四个部分对利率模型进行了充分的文献回顾。在第二章，从解析分析和定价的难度上，首先对利率模型进行了初选，然后根据统计检验以及样本外估计的准确度对模型进行选择。统计检验的结果虽然接受了 Longstaff and Schwartz (LS, 1992) 模型，但该模型过于复杂，计算耗时，不适于实际应用。而对 Fong and Vasicek (FV, 1992) 与单因子利率模型的 RMSE 评估结果表明，FV 模型更适合于短于 6 个月期限的利率估计，而 CIR 模型比较适合于长期利率的估计。本文的第三章主要研究了如何用有限差分法来对含权债券进行定价。并用 MATLAB 语言将基于 CIR 利率的债券定价算法编成应用模块。应用结果表明，该程序相当可靠。本文第四章将第二章和第三章的分析结果在实际中加以应用。首先对当前的热点——人民币理财进行了分析，得出一系列的结论，之后对人民币理财中的可提前终止权进行了定价。在第四章的最后部分，对市场上正在交易的国家开发银行发行的可赎回债券和可回售债券进行定价，结论表明含可赎回权的债券中，既存在被低估的债券，也存在被高估的债券，对含可赎回权债券的定价，市场存在分歧。含可回售权的债券，其价值还是被低估。并且，相对于初始发行价格，经过二级市场的交易，可回售债券被低估的程度比刚发行时减轻。

总的来说，本文为寻找较适合中国利率动态行为，又易于在实际中加以应用的利率模型，对单因素模型和双因素模型进行了综合考察，并将选定的模型很好的应用于实际的产品定价和分析中。

**关键词：**利率模型，含权债券，人民币理财

## **Abstract**

Interest rate is one of most important economics variance. For most people, It influences their investment and consume. For finance institutions, the variance of interest rate will change the value of asset, so the risk management of interest rate plays a critical role. For the government, the variance of interest rate influences the run of national economy. So we need a good model which can descript the interest rate dynamics theoretically and practically, then we can design the interest rate product, price interest rate produce, hedge interest rate product and manage the interest rate risk.

The chapter one of this paper reviews the literature from four aspects, including interest rate static estimation, interest rate equilibrium model, interest rate arbitrage model and domestic research.

The chapter two of this paper first selects interest rate model according to the difficulty of analytic analysis and pricing, then farther filters the models by the statistic test and out-of-sample estimation. The result of statistic test accepts Longstaff and Schwartz (LS, 1992) model, but this model is too complicated and time consuming to use in practice. After comparing Fong and Vasicek (FV, 1992) with one-factor model by RMSE method, FV model is fit for interest rate estimate of short term, and CIR model performs better for long term interest rate.

The chapter three of this paper discusses how to price the bond embedded with option by finite difference method. This chapter also gives the program of pricing bond using Matlab language based on CIR model. The result shows that this program is credible.

The chapter four applies the outcome of last two chapters in practice. First, RMB finance product is discussed and series conclusion is given. This chapter also prices the option embedded in the RMB product. At the end of this chapter, the callable bond and puttable bond issued by China development bank are pricing using the method of chapter two. The result shows that some callable bonds are priced highly and some callable bonds are priced lowly. The market diverges about the price of callable bond. The puttable bonds are priced widely. After being traded on the secondary market, the underestimate degree of bond price decreases.

In conclusion, this paper discusses the one-factor model and two-factor model fully in order to find the model that is suit for the behavior of China interest rate, and apply the model to price and analyze the practical product.

**Key Words:** interest rate model; bond embedded with option; RMB financing product.





# 目 录

引 言.....	1
<b>第一章 利率模型文献回顾 .....</b>	<b>4</b>
<b>第一节 利率期限结构的静态估计 .....</b>	<b>4</b>
一、 Bootstrapping 法 .....	4
二、样条法 (Spline) .....	6
三、多项式估计法.....	6
<b>第二节 利率均衡模型 .....</b>	<b>7</b>
一、单因子均衡模型.....	7
二、双因子均衡模型.....	11
三、多因子模型.....	14
<b>第三节 利率无套利模型 .....</b>	<b>15</b>
一、 Ho and Lee (1986) .....	16
二、 Hull and White (1990) .....	16
三、 Black, Derman and Toy (1990) .....	18
四、 Black and Karasinski (1991) .....	19
五、 Heath, Jarrow and Morton (1992) .....	20
六、市场模型.....	21
<b>第四节 国内利率期限结构模型研究文献回顾 .....</b>	<b>22</b>
<b>第二章 利率动态模型的选择 .....</b>	<b>24</b>
<b>第一节 利率模型的初步选定 .....</b>	<b>24</b>
一、解析分析和定价的难易.....	24
二、评估对利率动态的刻画准确度.....	25
<b>第二节 利率模型的实证检验 .....</b>	<b>25</b>
一、单因子和双因子模型的选择.....	25
二、 Longstaff and Schwartz (1992)实证研究.....	27
三、 Fong and Vasicek (1992)模型实证研究.....	35

<b>第三章 含权债券定价——有限差分法 .....</b>	<b>45</b>
<b>第一节 有限差分法 .....</b>	<b>45</b>
一、显性差分法.....	47
二、隐性差分法.....	48
三、克朗可—尼科尔森（Crank-Nicholson）法 .....	48
<b>第二节 含权债券的定价——有限差分法 .....</b>	<b>50</b>
一、债券价格满足的偏微分方程.....	50
二、克朗可—尼科尔森法有限差分计算债券价格.....	56
三、边界条件的确定.....	58
四、含权债券中欧式期权价值的计算.....	60
五、含权债券中美式期权价值的计算.....	60
六、程序的应用.....	61
<b>第四章 利率模型的实际应用 .....</b>	<b>67</b>
<b>第一节 人民币理财产品的分析与定价 .....</b>	<b>67</b>
一、人民币理财产品推出的背景.....	67
二、人民币理财产品的投资对象.....	67
三、各家银行产品的同质化.....	68
四、人民币理财产品的主要条款.....	68
五、可提前终止权的分析与定价.....	72
六、人民币理财产品的创新.....	80
<b>第二节 固定利率含权债券的定价 .....</b>	<b>83</b>
一、样本债券基本情况.....	83
二、含权债券的例子.....	84
三、含权债券的定价.....	85
四、结论.....	85
<b>附录 A Longstaff and Schwartz (1992) 模型的 GMM 估计 .....</b>	<b>88</b>
<b>附录 B Fong and Vasicek (1992)双因子利率模型的模拟矩估计 ....</b>	<b>91</b>
<b>附录 C CIR 模型参数估计的 GAUSS 程序代码 .....</b>	<b>93</b>

附录 D	Vasicek 模型参数估计的 GAUSS 程序代码.....	94
附录 E	多项式样条的系数估计 .....	95
附录 F	利率期限结构的估计 .....	99
附录 G	基于 CIR 模型用有限差分法对含权债券的定价 .....	100
附录 H	显性差分方程的推导 .....	107
附录 I	克朗可—尼科尔森有限差分法的推导 .....	109
参考文献.....		111
后记.....	错误！未定义书签。	



# Content

<b>Preface</b> .....	
<b>Chapter one The review of interest rate model literature</b> .....	
<b>1.1 The static estimation of interest rate term structure</b> .....	
1.1.1 Bootstrapping .....	
1.1.2 Spline.....	
1.1.3 Polynomial term .....	
<b>1.2 Interest rate equilibrium model</b> .....	
1.2.1 Equilibrium model with one-factor .....	
1.2.2 Equilibrium model with two-factor .....	
<b>1.3 Interest rate arbitrage model</b> .....	
1.3.1 Ho and Lee (1986).....	
1.3.2 Hull and White (1990).....	
1.3.3 Black, Derman and Toy(1990) .....	
1.3.4 Black and Karasinski (1991) .....	
1.3.5 Heath, Jarrow and Morton (1992) .....	
1.3.6 The market model.....	
<b>1.4 The review of domestic research on interest rate model</b> .....	
<b>Chapter two The choice of interest rate model</b> .....	
<b>2.1 The preliminary selection of interest rate model</b> .....	
2.1.1 Identifying the difficulty of analytic analysis and pricing .....	
2.1.2 Evaluating the description of interest rate dynamic .....	
<b>2.2 The empirical test of interest rate model</b> .....	
2.2.1 Choice of one-factor model or two-factor model .....	
2.2.2 The empirical research of Longstaff and Schwartz(1992) .....	
2.2.3 The empirical research of Fong and Vasicek (1992) model .....	
<b>Chapter three Pricing the bond embedded with option – finite difference</b> .....	
<b>3.1 Finite difference</b> .....	
3.1.1 Explicit finite difference .....	
3.1.2 Implicit finite difference .....	
3.1.3 Crank-Nicholson finite difference .....	
<b>3.2 Pricing the bond embedded with option</b> .....	
3.2.1 Difference equation .....	

3.2.2	Pricing bond by the Crank-Nicholson method .....
3.2.3	Determination of boundary condition .....
3.2.4	Pricing the European option embedded in the bond .....
3.2.5	Pricing the American option embedded in the bond .....
3.2.6	The application of programme .....
<b>Chapter four</b>	<b>The practical application of interest rate model .....</b>
<b>4.1</b>	<b>The analysis and pricing of RMB finance product .....</b>
4.1.1	The background of RMB finance product .....
4.1.2	How the RMB finance product invest .....
4.1.3	Homogenization of RMB finance product from difference .....
4.1.4	The key term of RMB finance product .....
4.1.5	The analysis and pricing of embedded option .....
4.1.6	Creation of RMB finance product .....
<b>4.2</b>	<b>Pricing the fixed interest rate bond embedded with option .....</b>
4.2.1	The basic information of sample bond .....
4.2.2	Case of bond embedded with option .....
4.2.3	Pricing bond embedded with option .....
4.2.4	Conclusion .....
<b>Appendix A</b>	<b>The GMM estimation of Longstaff and Schwartz(1992) model .....</b>
<b>Appendix B</b>	<b>The simulation moment estimation of Fong and Vasicek (1992) model .....</b>
<b>Appendix C</b>	<b>The GAUSS code of parameter estimation of CIR model .....</b>
<b>Appendix D</b>	<b>The GAUSS code of parameter estimation of Vasicek model .....</b>
<b>Appendix E</b>	<b>The coefficient estimation of polynomial spline .....</b>
<b>Appendix F</b>	<b>The estimation of interest rate term structure .....</b>
<b>Appendix G</b>	<b>Pricing the bond embedded with option based on CIR model by the method of finite difference .....</b>
<b>Appendix H</b>	<b>The deduction of explicit finite difference .....</b>
<b>Appendix I</b>	<b>The deduction of Crank-Nicholson finite difference .....</b>
<b>Reference</b>	<b>.....</b>

## 引言

在发达国家和地区，利率衍生产品是金融市场中交易的最大金融产品之一，利率互换、债券期货、国债期货期权、欧洲美元期货期权、浮动利率的帽子期权（Cap）等等都是利率衍生产品。利率衍生产品的多样性、高流动性使得利率衍生产品不仅是人们很好的投资选择，也是一种非常好的风险管理工具。

随着我国金融市场的发展和开放，含有衍生性质的利率产品已经逐渐出现在我国的金融市场上，比如可赎回债券、可回售债券、远期债券、可延期债券和可调换债券等等。这些产品的出现引起了市场投资者的普遍关注，也引发了市场相关主体对这些产品进行定价和风险管理的兴趣。对这些产品进行定价和风险管理需要知道利率行为，而利率的过程十分复杂，因此，找到一个能够很好描述利率动态、适合相应国家利率行为的模型，并根据该模型得到利率期限结构、进而进行利率产品的定价和风险管理是国内外众多金融理论研究者和实务工作者努力之方向。

任何风险资产未来期望收益在现在时刻价值的计算，必然要用到利率期限结构。因此，利率期限结构是所有风险资产定价的参照系。利率期限结构由连续到期日的贴现债券（即零息债券）的收益率所组成。也可以说，利率结构度量了不同到期日无风险证券的收益率之间的关系<sup>①</sup>。利率期限结构的形状会随时间变化。一般情况下，期限结构是上升型（upward sloping），也就是说指长期债券的收益率大于短期债券的收益率。此外，利率期限结构还有三种形状，即下降型（downward sloping）、平直型（flat）、驼峰型（humped）等。当中期债券的收益率高于短期债券和长期债券的收益率时，便出现驼峰型的利率期限结构。一般来说，利率期限结构根据政府债券价格计算而得到，本文对利率期限结构的研究也是基于上海证券交易所的国债价格数据。

为得到完整的利率期限结构需要完整的债券价格数据，但实际市场中的债券价格数据往往并不完整，特别是在债券市场不发达国家，由于债券品种不多，并不是每种期限的债券在市场中都存在。因此就需要用科学的方法对现有的市场利

<sup>①</sup> Cox, Ingersoll and Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica* 53 (March, 1985), 385-407

率期限结构进行拟合,这种方法也叫利率期限结构的静态估计。在国内外理论研究和实务应用中,静态估计法主要用曲线拟合的方法,本文中利率期限结构的获得采用曲线拟合中的多项式估计法(见附录 E、F)。

用曲线拟合的方法能得到较准确的期限结构,但由于它是基于已经交易的价格数据,因此它仅限于拟合历史以及现在的利率期限结构,而无法把握未来的利率动态。而未来的利率动态行为对利率相关产品的风险管理具有更重要的意义。因此,构建合适的利率动态模型是个非常重要的研究课题。当然,对利率动态模型的研究离不开历史数据,因为为得到合适的利率模型,首先需要在历史数据中得到检验,然后再用来对未来进行预测和风险管理。本文的研究过程同样需要根据静态估计法得到的利率期限结构来对备选利率模型进行检验。

但模型通过检验并不意味着该模型就是最适合的模型。在模型的选定方面,还需要在模型的复杂程度、拟合效果提高程度、实际应用的难易三者之间进行平衡,如果在模型中增加解释因子所导致的拟合效果不明显,或者说,模型复杂程度的上升并不带来拟合效果的显著提高,但却大大增加了模型的实际应用的难度,那么就不需要增加解释因子来使模型复杂化。因此模型的选定需要权衡考虑。本文在模型的选定方面进行了较为全面的权衡。

本文的研究过程中,涉及到模拟矩、广义矩、最大似然法、GARCH 模型等计量方法以及数学工具(有限差分法)的应用。使用的方法较多,应用的工具较新颖。之所以用到这么多的方法,一方面是因为在实证分析各种模型时,各个模型有各自的特点,因此适用的方法不同。另一方面是因为本文在研究过程中,也希望尝试各种新的方法,以促进这些新方法的推广和使用。

总的来说,本文的研究范围为利率单因子模型和双因子模型的分析、比较和应用。在研究过程中,充分应用了最大似然法、广义矩、模拟矩、GARCH 模型、有限差分法等各种计量方法和数学工具。研究过程中使用的计算机工具包括 MATLAB、GAUSS、EXCEL 等。研究使用的数据为上海交易所的国债价格数据和银行间市场的 7 天回购利率。

本文的特点是:

(1) 首先将模拟矩方法引入到我国利率模型的参数估计中,并得到可靠的估计结果。



(2) 对利率双因子模型进行了较为详细的介绍和实证分析。

(3) 对利率单因子模型和双因子模型进行了较为详细、深入的比较，并得到有益的结果。

(4) 将有限差分法很好地应用到现有利率产品的定价中。

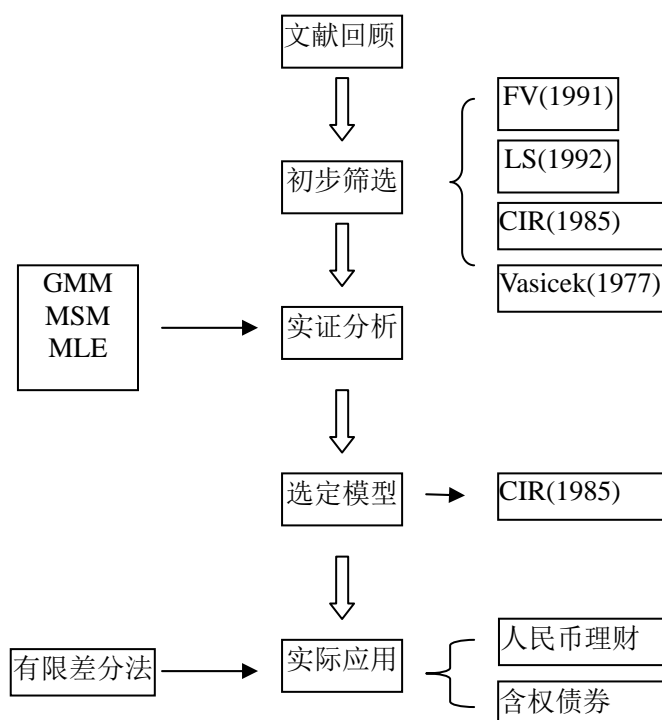
本文的不足，也是本文接下来进一步研究的方向：

(1) 本文没有对更多因子模型，特别是三因子模型进行比较。

(2) 本文没有对 HJM, HW, BDT 等无套利模型等进行比较。

最后，将本文的研究思路概括如下（如图 I）：首先对现有的利率文献进行回顾，接着对利率动态模型进行初步筛选，然后对筛选后的备选模型进行详细的实证分析和比较，在对备选模型进行全面权衡考虑后选定比较适合的模型，最后用较新的数学工具将该模型应用到我国金融市场上已出现的利率产品的分析和定价中。本文的研究过程力求做到步步为营，有理有据。

图 I 论文思路



## 第一章 利率模型文献回顾

在文献中，对利率模型的研究可以分为两大类，一类是根据现有的债券价格用静态估计的方法对利率期限结构估计进行曲线拟合。另一类是构造合适的利率动态模型来描述利率变化的过程，以期能够对利率动态进行预测，而这类模型又可以分为利率均衡模型和利率无套利模型。

### 第一节 利率期限结构的静态估计

利率模型建模的首要目的是期望能拟合收益率曲线，而拟合的收益率曲线的准确性直接影响利率模型的评估。因此研究利率模型需要先用适合的方法估计得到收益率曲线。利率的静态估计着重于在有限数据样本（零息票债券价格、付息债券价格）下，寻找对数据最佳拟合的曲线。这类研究主要有McCulloch（1971，1975）、Vasicek and Fong（1982）、Nelson and Sigel（1987）、Steeley（1991）等等。这些研究之间的主要差别在拟合曲线是否分段、拟合函数形式、曲线连续性与否、曲线参数估计方法等方面。比如McCulloch（1971，1975）使用的是分段二次和三次多项式函数，Vasicek and Fong（1982）使用的则是分段三次指数函数，Nelson and Sigel（1987）不进行分段，因此得到连续平滑曲线。Steeley（1991）则采用B-Spline函数分段拟合利率期限结构。将他们的研究进行分类，可以分为以下三种：Bootstrapping法、样条（Spline）法和多项式估计法。

#### 一、Bootstrapping 法

Bootstrapping法其基本原理就是根据现有的付息债券价格、贴现因子与零息票债券利率的关系，计算出零息票债券的利率。

在离散时间下：

$$P(T) = \sum_{t=1}^T C(t)B(t) = \sum_{t=1}^T \frac{C(t)}{(1+Y(t))^t} \quad (1-1)$$

在连续时间下：

$$P(T) = \sum_{t=1}^T C(t)B(t) = \sum_{t=1}^T C(t)e^{-tY(t)} \quad (1-2)$$

式中，

$T$ ： 债券到期日（Maturity），

$P(T)$ ： 付息债券价格，

$C(T)$ ： 付息债券在第 $t$ 期的现金流入（Cash inflow），包括债息收入及本金偿还（到期日时），

$B(t)$ ： 贴现因子（Discount factor），表示1元钱在时间 $t$ 可得到的回报（Payoff）在时间0时的现值，

$Y(t)$ ： 即期利率（Spot rate）。

Bootstrapping法估计的步骤：

- (a) 利用  $P(T=1)$  算出第一期的理论即期利率  $Y(1)$ ；
- (b) 将求出的  $Y(1)$  代入  $P(T=2)$  式中，可解出  $Y(2)$ ；
- (c) 将  $Y(1)$ 、 $Y(2)$  代入  $P(T=3)$  式中，可再解出  $Y(3)$ ；
- (d) 如此反复运算可求出  $Y(t)$ ， $t=1,2,\dots,T$ 。这样就得到零息票收益率曲线。

然而，实务中往往并非所有期数（ $t=1,2,\dots,T$ ）的债券价格都可在市场上观察到，对于所缺少的数据，须用插值法（Interpolation）得到估计值后才能进行计算。Bootstrapping法所用的插补法有线性插值法及指数插值法两种，前者假设前后两个已知利率与中间未知待求的利率间呈线性关系，故以线性插值法估计；后者则假设贴现因子间呈指数递减关系，而以指数式插值两点间缺少的贴现因子，再转换为利率。

Bootstrapping估计法在理论的支持上虽显得较为薄弱，但优点是估计速度比较快速，特别适用于金融机构为因应市场报价瞬息变动，而须立即估计出利率曲线以便于进行套保（Hedging）和风险控制；另外在拟合度（Goodness of fitting）上，当市场数据越齐全（即所缺的数据点越少）时，拟合效果将越精确，所以该方法广为美国金融场所采用。但如果市场数据不齐全，那么Bootstrapping法就不太适用，所以Bootstrapping法不大适用于我国市场。

## 二、样条法 (Spline)

样条法是数学上拟合曲线的一种方法。其基本思想是将数据分布的整个范围切割成许多小区间，再分别以最小二乘法等计量方法估计各区段函数的参数值。为确保整条曲线之连续，在估计时须加上必要的约束条件（函数及其各阶微分在分割点连续）。这类的研究以McCulloch（1975）及Vasicek and Fong（1982）为代表。

McCulloch是第一位以样条法拟合利率曲线的学者，其作法是先假设贴现因子曲线（Discount factor curve）的函数形式为三次多项式，估计出贴现因子后再转换为利率曲线。而Vasicek and Fong（1982）则假设贴现因子曲线是指数递减形式（Exponential decay），所以将函数设定为三次式指数函数（Cubic exponential），称为指数样条（Exponential spline）。其估计方法也是通过最小二乘法分段估计各参数值，进而求出利率曲线函数。

## 三、多项式估计法

多项式估计法假设利率曲线是一个多项式函数，然后用最小二乘法或最大似然法（MLE）计量方法估计函数的参数，从而得到一条适用于各到期期限（Time to maturity）之利率曲线。

此种估计法的优点是，用计量方法估计利率曲线的参数值时，除了有计量上检定曲线拟合度及参数值显著性的判定检验（如MSE、 $R^2$ 、t检定等）外，更可作进一步的统计推论；此方法的另一个优点是，估计出整条利率曲线后，透过远期利率与即期利率之关系式，可轻易求算远期利率函数。另外，从曲线的拟合度角度来说，提高多项式函数的阶数（High-degree）可增加曲线的拟合能力，虽然较高阶的多项式往往造成估计结果的不稳定。在本文中，使用该方法对收益率曲线进行拟合。

总的来说，曲线拟合法对历史利率数据拟合效果较好，特别是当利率形状较复杂时，曲线拟合法能够较好地描述利率曲线特征。但曲线拟合的一个缺点是其参数的经济意义不明确，同时用拟合的曲线不方便进行套期保值和衍生品定价。因此，许多学者将重心放在对利率动态模型的研究。

## 第二节 利率均衡模型

在现有文献中，利率的动态模型又可以分为均衡模型和套利模型。均衡模型从经济理论出发，根据市场的均衡条件得出利率所遵循的过程。由于该类模型是理论推导得出，那么其得出的利率期限结构与实际的利率期限结构存在一定的偏差。而无套利模型是指直接用市场上的资产价格，根据各个资产之间必须满足的无套利条件来推导利率的过程，从而得出利率期限结构。均衡理论与套利理论的一个重要区别就是，风险的市场价格在均衡理论里是内生的，而在套利理论里则是外生的。

均衡模型在两方面优于套利模型：第一个是均衡模型的相关变量是内生的，比如即期利率和利率的风险溢价。第二个是均衡模型对现实世界的建模有利于人们更好的理解利率期限结构。但是在实际应用中，均衡模型并不总是优于套利模型。

均衡模型开始于有关状态变量动态过程的特定假设。这些模型在他们所假设的经济环境描述利率期限结构行为。这些模型详尽设定风险的市场价格。Vasicek (1977) 和Cox, Ingersoll, and Ross (1985) 提出的模型所用的假设：特定的状态变量 (certain state variables) 服从驱动利率期限结构的随机过程，如瞬间短期无风险利率。得到均衡下的利率动态过程后，使用无套利定价技巧可以对资产进行定价，甚至可以得到基于该随机变量的整个期限结构，它们提供期限结构动态演化的经济直觉，常形成无套利模型的基础。

### 一、单因子均衡模型

单因子模型主要有：Vasicek (1977)、CIR (1985)、Merton(1985)、和Dothan (1978)。这里主要介绍前两个模型。

#### 1、Vasicek (1977)

Vasicek 是第一个研究短期利率均值回归的动态期限结构模型的学者，他的文章对现代利率期限结构理论具有重要的贡献。其模型有四个假设：

(a) 贴现债券的价格只受到债券存续期间即期利率  $r$  影响。风险源或者说状态变量只有即期利率一个因素。

(b) 瞬时（即期）利率服从扩散过程 (Diffusion process)。

(c) 风险的市场价格是常数。

(d) 市场是有效率的。

在此模型中，短期利率  $r$  服从 Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 过程，可以下式随机微分方程表示：

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dz = \mu_r dt + \sigma_r dz \quad (1-3)$$

其中， $\kappa$  为均值回归的速度，

$\theta$  为短期利率回归的长期均值，

$\sigma$  为短期利率的瞬时波动性，

$z(t)$  服从维纳过程，

$\mu_r$  和  $\sigma_r^2$  分别为短期利率过程的漂移和波动率，

由于服从 O-U 过程的瞬时即期利率  $r(t)$  条件分布是高斯分布 (Gaussian distribution)，所以 Vasicek 也称为高斯模型 (Gaussian model)。

Vasicek 推导出其模型下的债券价格的微分方程。假设  $P(t, T)$  为在时间  $t$  的到期时间为  $T$  的贴现债券的价格。  $P(T, T) = 1$ ，Vasicek 得到偏微分方程：

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa(\theta - r) + \sigma\lambda) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad t \leq T \quad (1-4)$$

为了简化模型，Vasicek 假定上述一般化模型中的风险价格为常数，同时即期利率遵循 Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 过程，通过以上假设，Vasicek 获得债券价格的一个闭式解：

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)} \quad T \leq t \quad (1-5)$$

其中，

$$A(t, T) = \exp \left\{ \frac{[B(t, T) - t + T] \cdot \left( \alpha^2 \gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \sigma^2 B^2(t, T)}{\alpha^2} \right\}$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}$$

而不同时点的利率期限结构可由下式推导出：

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln A(t,T) + \frac{1}{T-t} B(t,T) r(t), \quad T \geq 0 \quad (1-6)$$

在决定  $\kappa$ 、 $\theta$  和  $\sigma$  后，整个利率期限结构为  $r(t)$  的函数。因此，Vasicek 模型产生的期限结构斜率可以是正斜率、负斜率或驼峰状。然而因 Vasicek 模型为高斯分布（Gaussian distribution），模型会产生负利率，是其缺点。

## 2、Cox, Ingersoll and Ross（1985）

Cox, Ingersoll, and Ross（1985）对 Vasicek（1977）的一般化模型进行了修改。他们同样假设利率风险的价格是常数和即期利率遵循 O-U 过程，但是不同的是方差与即期利率的平方根成比例。不象 Vasicek 模型，该模型避免了负利率的产生。

在一般假说框架下，Cox, Ingersoll, and Ross 建立了瞬时利率平方根过程的期限结构模型：

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz \quad (1-7)$$

其中， $\kappa$  是均值回归速度， $\theta$  为长期利率平均水平， $r$  是瞬时利率， $\sigma$  为瞬时利率波动性， $dz$  是标准维纳 r 过程。 $\kappa$ 、 $\theta$  和  $\sigma$  为正常数。短期利率变动有均值的漂移项和与利率水平成比例的波动率。若  $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ ，则过程会有  $r(t) = 0$  的反射边界（Reflecting boundary）。因此此利率过程会排除负的瞬时即期利率。

CIR 基于他们的模型也推导了债券价格的闭式解和以零息票债券为标的的欧式看涨期权的价格公式。

给定  $t$  期的瞬间利率  $r$ ，令  $P(r,t,T)$  表示在  $T$  期到期的无风险纯贴现债券的价格。用伊藤定理（Ito's Lemma），债券的瞬间报酬率为

$$\frac{dP}{P} = \left( \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} (dr)^2 + \frac{\partial P}{\partial t} dt \right) \frac{1}{P} \quad (1-8)$$

$$= \left[ \kappa(\theta - r) \frac{\partial P}{\partial r} \frac{1}{P} + \frac{\partial P}{\partial t} \frac{1}{P} + \frac{1}{2} \sigma^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \frac{1}{P} \right] dt + \sigma\sqrt{r} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{1}{P} dz \quad (1-9)$$

其中式（1-7）代入式（1-8），而得到式（1-9）。

零息债券的瞬间利率为

$$\frac{dP}{P} = \mu(r,t,T)dt + \nu(r,t,T)dz \quad (1-10)$$

由式 (1-9) 和式 (1-10) 可得

$$v(r, t, T) = \sigma \sqrt{r} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{1}{P} \quad (1-11)$$

在完美市场中, 任何资产的瞬间预期报酬率为瞬间无风险利率  $r$  加上风险报酬。无套利情况隐含

$$\mu(r, t, T) = r + \lambda^* (r, t) v(r, t, T) \quad (1-12)$$

令风险贴水因子  $\lambda^* = \lambda \sqrt{r} / \sigma$ , 由式 (1-9) 至式 (1-12) 可推导出下式

$$\frac{1}{2} \sigma^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + [\kappa(\theta - r) - \lambda r] \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} - rP = 0 \quad (1-13)$$

这是债券价格的基础公式, 此债券价格只与瞬间利率  $r$  和到期期限  $T - t$  相关。

在下式的边界条件

$$P(r, T, T) = 1 \quad (1-14)$$

式 (1-13) 的闭式解为

$$P(r, t, T) = A(t, T) \cdot e^{-B(t, T)r} \quad (1-15)$$

其中

$$\tau = T - t \quad (1-16)$$

$$A(t, T) \equiv \left[ \frac{\phi_1 e^{\phi_2 \tau}}{\phi_2 (e^{\phi_1 \tau} - 1) + \phi_1} \right]^{\phi_3} \quad (1-17)$$

$$B(t, T) \equiv \frac{e^{\phi_1 \tau} - 1}{\phi_2 (e^{\phi_1 \tau} - 1) + \phi_1} \quad (1-18)$$

$$\phi_1 \equiv \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2} \quad (1-19)$$

$$\phi_2 \equiv (\kappa + \lambda + \phi_1) / 2 \quad (1-20)$$

$$\phi_3 \equiv \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \quad (1-21)$$

式 (1-15) 至式 (1-21) 定义基本 CIR 模型。模型可用来产生收益率的不同形状。在 CIR 模型中,  $\phi_1 < \frac{2\kappa\theta}{\kappa + \lambda + \phi_1}$  时, 则期限结构是正斜率, 而  $\phi_1 > \frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda}$  时,

则期限结构是负斜率。 $\frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda} < r < \frac{2\kappa\theta}{\kappa + \lambda + \phi_1}$  时, 期限结构是驼峰状。



## 二、双因子均衡模型

单因子模型存在着两个缺点：首先，单因子模型可能能够很好刻画利率曲线水平的特征，但是却很难对利率曲线的丰富变化进行很好的描述；其次，单因子模型中的因子显然为即期利率或者短期利率，因此单因子模型隐含着不同到期日的贴现债券的价格是完全相关的的假设。但实际上并不是如此。所以为了克服这两个缺点，需要考虑加入新的解释因子。在被考虑的因子中，主要被使用的因子有短期利率波动率（Fong and Vasicek（1991）、Longstaff and Schwartz（1992））、短期利率均值（Chen（1996）、Balduzzi（1996））、长期利率（Brennan（1979））、长期利率与短期利率之差（Nelson and Schaefer（1983）、Schaefer and Schwartz（1984））。而 Chen and Scott（1992）则将快速均值回归（Strong mean reversion）和极慢的均值回归（Extremely slow mean reversion）设置为模型的两个因子。在这里介绍常见的几个双因子模型：

### 1、The Brennan and Schwartz（1979）

Brennan and Schwartz 假设利率期限结构由两个因素决定：短期利率和长期利率（Console yield）。两个因子存在一定的相关性。两个因素分别遵循以下过程

$$dr_t = \alpha_1(r_t, l_t, t)dt + \sigma_1(r_t, l_t, t)dz_1(t) \quad (1-22)$$

$$dl_t = \alpha_2(r_t, l_t, t)dt + \sigma_2(r_t, l_t, t)dz_2(t) \quad (1-23)$$

其中， $r_t$ 、 $l_t$  分别是短期利率和长期利率， $dz_1, dz_2$  是维纳过程，并且

$$E(dz_1(t)) = E(dz_2(t)) = 0,$$

$$dz_1^2 = dz_2^2 = dt,$$

$$dz_1(t)dz_2(t) = \rho dt。$$

Brennan and Schwartz 的第一个因子短期利率解释了利率的水平效应，而两个因子之差即长短期利率差，则在一定程度上可以理解为利率期限结构的斜率。Brennan and Schwartz 引入长期利率也反映了传统的预期利率理论和流动溢酬理论中长短期收益率的关系。

在该模型中，如果要进行债券的定价，则需要确定两个因子的市场风险价格、漂移项和波动率的函数形式。而并不是任意形式的函数形式都有闭式解。Hogan

(1993) 指出, Brennan and Schwartz 模型的某些函数形式将可能导致有限时间内无穷大的长期收益率, 而这就会存在套利的机会, 因此 Brennan and Schwartz 模型函数形式的选择需要十分谨慎。

在 Brennan and Schwartz 模型中, 如果我们将短期收益率和长期收益率变为任意的两个有限期限的到期收益率。那么该模型就扩展为与到期期限有关的一整类的利率期限结构模型。当我们将公式 (1-22)、(1-23) 中的形式用 CIR 函数形式, 那么, 该模型就可以得到债券或者债券组合价格的闭式解。Chen and Scott (1992) 证明了这一点。

## 2、Longstaff and Schwartz (1992) 模型

为了避免不同到期日债券收益的完全相关, Longstaff and Schwartz 引入了另外一个变量: 短期利率的波动率。由于波动率在或有权 (Contingent claims) 的定价中是一个重要的因素。因此, 从直觉上来看, 将波动率因素引入模型具有很大的吸引力。

Longstaff and Schwartz 模型的分析过程与 CIR 模型类似, 主要的差别是利率产品的最终价格依赖于两个随机变量。根据 CIR 模型的结果, Longstaff and Schwartz 模型可以得到均衡利率  $r_t$  和均衡利率的波动率  $V_t$ 。然后应用 Ito 引理, 就可以推导出相应的动态过程。

与 CIR 一样, Longstaff and Schwartz 模型可以得到贴现债券的闭式解。推导出的债券公式表明到期期限为  $T$  的一个单位的无风险贴现债券的价格是三个变量  $(r_t, V_t, T)$  的函数, 而该函数依赖于六个参数。

而且 Longstaff and Schwartz 模型具有很好的性质:

- (1)  $r_t$ ,  $V_t$  都是稳定分布的;
- (2) 债券的价格既可以与到期期限正相关, 也可以是负相关;
- (3) 波动率  $V_t$  对债券价格的影响是不确定的 (indeterminate), 也就是说, 波动率越高, 债券价格可能越高, 也可能越低;
- (4) 当到期期限  $T$  给定时, 债券的价格是短期利率  $r_t$  和短期利率波动率  $V_t$  的线性函数;
- (5) 该模型可以表现出形状丰富的收益曲线, 包括一些单因子没法描述的曲线。

### 3、Fong and Vasicek (1991)

大量的实证研究已经揭示了短期利率变化的波动率是时变和随机的。为了对短期利率变化的随机性以及其对债券价格的影响进行建模，Fong and Vasicek (1991) 建立了一个 Vasicek (1977) 的扩展模型，在该模型中，短期利率的过程含有一个随机方差，且随机方差遵循平方根过程：

$$\begin{aligned} dr_t &= \alpha_1 (\bar{r} - r_t) dt + \sqrt{V_t} dz_1 \\ dV_t &= \alpha_2 (\bar{V} - V_t) dt + \eta \sqrt{V_t} dz_2 \end{aligned}$$

其中， $\alpha_1, \alpha_2$  决定了短期利率  $r_t$  和波动率  $V_t$  的均值回归速度。 $dz_1$ 、 $dz_2$  是两个相关的布朗运动。每一风险的市场价格为， $\lambda_i(t) = \lambda_i \sqrt{V(t)}$ ，for  $i=1,2$ 。

### 4、Chen and Scott (1992) 模型

如同 Brennan and Schwartz (1979)，Chen and Scott (1992) 在 CIR 模型框架下，使用两因素对利率互换期权进行定价。为抓住利率的变化，Chen and Scott 将快速的均值回归 (Strong mean reversion) 和极慢的均值回归 (Extremely slow mean reversion) 设置为模型的两个因子：

$$\begin{aligned} \dot{i}_t &= y_{1t} + y_{2t} \\ dy_i &= \kappa_i (\theta_i - y_i) dt + \sigma_i \sqrt{y_i} dw_i, \quad \text{for } i=1,2 \end{aligned}$$

其中， $i$  表示瞬时利率， $y_1, y_2$  分别表示快速回归的均值和极慢回归的均值。

虽然两个因子的共同作用决定了瞬时利率的动态，但是第一个因子对短期利率变化的解释程度更大，而第二个因子则体现了长期利率行为的过程。Chen and Scott 认为，与 Brennan and Schwartz (1979) 相比，他们的模型能对债券和债券期货进行更简单的定价。实际上 Chen and Scott (1992) 的模型是 Longstaff and Schwartz (1992) 模型的一种特殊例子。

Chen and Scott (1992) 将他们的模型与 Black 期权定价模型进行比较，发现对短期利率期货期权的定价上两者十分接近，但对长期期权，比如 3 年、5 年的息票债券期权或者利率帽子期权，那么这两个模型定价结果的差异性就比较显著。

### 5、Nelson and Schaefer (1983)

尼尔森和 Schaefer 也建立了一个双因子模型，其两个因素与其他模型不同，

分别是长期利率以及长期利率与短期利率的利差。

$$dl_t = \mu dt + \sigma_1 dz_1$$

$$dS_t = \alpha(\beta - S_t)dt + \sigma_2 dz_2$$

其中， $l_t$  是长期利率， $S_t$  是长短期利率之差， $\mu$  是长期利率的漂移， $\beta$  是长短期利率差的均值， $\alpha$  是长短期利率差均值回归的速度。

### 6、Schaefer and Schwartz (1984)

Schaefer and Schwartz (1984) 建立的双因子模型与 Nelson and Schaefer (1983) 模型的两个因子相似，但其形式有所不同：

$$dl_t = \mu(S_t, l_t, t)dt + \sigma\sqrt{l_t}dz_1$$

$$dS_t = \alpha(\beta - S_t)dt + \gamma dz_2$$

其中， $l_t$  是长期利率， $S_t$  是长短期利率之差， $\mu$  是长期利率的漂移， $\beta$  是长短期利率差的均值， $\alpha$  是长短期利率差均值回归的速度。

可以看出，Schaefer and Schwartz (1984) 模型与 Nelson and Schaefer (1983) 模型的主要差别在于长期利率方程中随机项不同。

## 三、多因子模型

Duffie and Kan (1996) 给出了 CIR 模型的一个多因子化模型。与 CIR 模型一样，到期收益是状态变量的仿射形式，所以收益可以作为状态变量或说是因子。由于状态变量是可观测的，所以该多因子模型具有状态变量可观测的优点。

与利率期限结构的仿射类模型相比，Constantinides (1992) 研究了另一种的多因子模型，在该模型中，收益是状态变量的二次 (Quadratic) 函数，这就产生了丰富的利率期限结构形式。在该类模型中，债券和基于债券的期权都能得到闭式解进行定价。

模型的解释因子越多，对利率动态的刻画可能越好，但并不是解释因子越多越好。解释因子越多，那么计算也就复杂，模型也往往难以得到闭式解。因此在衡量计算成本和复杂度下，实务中不需要也无法做到对利率动态的完全准确地刻画，而只需要 98%、95% 甚至 90% 的刻画利率动态即可。根据 Litterman and Scheinkman (1991) 利用主成分分析法对美国国库券收益率的分析，表明第一个因子能解释 90% 左右的利率变动，而前三个因子加在一起能解释 98% 左右的利

率变动。其中这三个因子分别被解释为利率曲线的水平、斜率和曲度。Chapman and Pearson (2000) 对 1977 年~2000 年的 3 个月、1 年票据收益和 3 年、5 年、10 年期限国库券 (Constant-maturity Treasury) 收益的数据使用主成分分析法得出的结果表明, 前三个因子可以解释 99% 的收益率变动, 而第一个因子则能解释 88% 的收益变化。所以, 在利率水平与预期收益、波动率之间的关系主要受到第一个因子的影响。Chapman and Pearson (2000) 还用图形解释了为什么主成分分析中的第一个因子实际上与即期利率或者短期利率相一致。

在现有的文献中, 除了单因子模型外, 对双因子模型的研究较多, 因此双因子模型对我国利率期限结构的刻画如何, 是本文研究的一个重点。

在第二章的利率模型选择比较中, 我们主要选择以利率波动率为第二个因子的利率模型, 因此在第二章中我们将会对 Longstaff and Schwartz (1992) 模型和 Fong and Vasicek (1991) 模型进行详细分析。

### 第三节 利率无套利模型

Ho and Lee (1986) 对利率期限结构模型进行了创新。他们在二叉树基础上引入了无套利模型。该模型中, 模型的参数是时间的待定函数, 通过对当期的收益曲线进行拟合校正而得到无套利条件下的参数值。从 Ho and Lee (1986) 开始, 人们把具有这种思想的利率模型统称为“无套利模型”。

Black, Derman, and Toy (BDT, 1990), Hull and White (HW, 1990), Heath, Jarrow, and Morton (HJM, 1992), 等模型均使用了这种无套利实现。BDT 研究了短期利率的二叉树模型, 他们给出了二叉树拟合数据的过程, 并用之于固定收入衍生品的定价。HW 对 Vasicek 模型进行了扩展, 他们在 Vasicek 模型中增加了时间依赖的漂移  $\theta(t)$  和允许回归率 (Reversion rate) 和波动率是时间的函数。HJM 则将 Ho and Lee 模型一般化到具有多个因子的连续时间经济中。在给定初始远期利率曲线的条件下, 他们用一系列路径依赖型的随机微分方程来描述远期利率曲线的变化。而无套利条件同样对这些随机微分方程进行了约束。

无套利模型所建立的期限结构和开始的期间结构一致。它们不但能拟合利率期限结构, 也都能拟合期限结构和利率波动性期限结构。接下来分别介绍这四个

无套利模型。

## 一、Ho and Lee (1986)

Ho and Lee (1986) 建立的 HL 模型是第一个与初始收益率曲线 (Initial yield curve) 一致的模型, 基于市场情况外生设定开始 (现在) 期限结构。允许整个期限结构以二项过程随着时间的演化产生扰动 (Perturbation) 函数。加上扰动函数的限制排除任两个债券间的套利。但此模型不能排除负的远期利率。

Ho and Lee 给定初始期限结构, 并确定短期利率过程, 以用来对或有要求权进行定价。当为贴现债券定价时, 这时就贴现债券视为或有请求权, 这时贴现债券则拟合了初始贴现函数。因此, HL 模型得到的利率期限结构不是用来确定均衡下的利率期限结构。相反地, 它是用来确认与期限结构一致并用来对或有请求权进行定价的。

但 Ho-Lee 模型没有考虑短期利率的均值回归特点, 而且假定利率波动率为常数, 这是其弱点。

## 二、Hull and White (1990)

模型中的短期利率 (Short-term interest rate)  $r$  服从均值回归过程的单因子模型的一般形式为:

$$dr = a(b-r)dt + \sigma r^\beta dz \quad (1-24)$$

其中,  $a$ 、 $b$ 、 $\sigma$  和  $\beta$  是正常数。

$dz$  为维纳过程 (Wiener process)。

在 CIR 模型,  $\beta$  为 0.5, 而在 Vasicek 模型,  $\beta$  则为 0。

模型中的  $r$  利率以速度  $a$  拉回水平  $b$ 。

Hull and White 在  $r$  的过程加进时间函数的漂移项  $\theta(t)$ , 并允许回归率  $a$  和波动性因子  $\sigma$  两者为时间的函数。这导出  $r$  的以下模型:

$$dr = [\theta(t) + a(t)(b-r)]dt + \sigma(t)r^\beta dz \quad (1-25)$$

模型中加进的变量漂移率  $\theta(t)$  会回归至固定水平  $b$ 。

定义  $b'(t) = \theta(t)/a(t) + b$ , 公式 (1-25) 可改写为

$$dr = a(t)[b'(t) - r]dt + \sigma(t)r^\beta dz \quad (1-26)$$

上式也可视为回归水平为时间函数  $\theta(t)/a(t)+b$  的均值回归模型。CIR 和 Vasicek 模型可视为  $a$ 、 $b$  为常数和  $\beta$  分别为 0.5、0 的 HW 方法的特例。Hull and White 探究  $\beta=0$  和  $\beta=0.5$  的情形。 $\beta=0$  为 Vasicek 扩展模型； $\beta=0.5$  为 CIR 扩展模型。

如同 Dybvig (1988) 和 Jamshidian (1988) 所表示, Ho-Lee 模型的连续时间对应模型为

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz \quad (1-27)$$

这是式 (1-26) 的特例, 其中  $\beta=0$ 、 $a(t)=0$  且  $\sigma(t)$  为固定的。若利率风险的市场价格为时间的函数, 选定  $\theta(t)$  以便模型拟合初始利率期间结构。此模型的缺点为它没有包含均值回归; 所有即期和远期利率的瞬间标准差都是一样。

Black, Derman, and Toy (1990) 模型的连续时间相等模型可以下列式子表示

$$d(\ln r) = [\theta(t) + (\sigma'(t)/\sigma(t)) \ln r]dt + \sigma(t)dz \quad (1-28)$$

模型中的  $\ln r$  会均值回归。BDT 模型可视为式 (1-25) 的 HW 模型特例。

Hull and White 扩展 Vasicek 模型的扩展模型是最一般的 HW 模型, 简称为 HW 模型。短期利率的动态过程如下式:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz \quad (1-29)$$

其中,  $a$  和  $\sigma$  为常数项。此模型隐含正态分布的利率。漂移项的时间依赖参数允许模型拟合开始的利率期限结构。给定此参数为:

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + af(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (1-30)$$

令  $P(t,T)$  为在  $T$  时点到期在  $t$  时点的零息债券的价格。其和现在期限结构、在  $t$  时点的短期利率水平和短期利率过程的固定参数有关。

给定  $P(t,T)$  为

$$P(t,T) = P(0,T)e^{-B(t,T)r(t)} \quad (1-31)$$

其中,

$$\ln A(t,T) = \ln \frac{P(0,T)}{P(0,t)} + B(t,T) \frac{\partial P(0,t)}{\partial t} - \frac{1}{4a^3} \sigma^2 (e^{-aT} - e^{-at})^2 (e^{2at} - 1)$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

$r(t)$  为在  $t$  时点的短期利率水平。

$P(t, T)$  的时点  $t$  波动性为

$$\frac{\sigma}{a} [1 - e^{-a(T-t)}]$$

模型中的波动性结构由  $a$  和  $\sigma$  决定。

即期利率  $R(t, T)$  的瞬间标准差为

$$\frac{\sigma}{a(T-t)} [1 - e^{-a(T-t)}]$$

而远期利率  $f(t, T)$  波动性为  $\sigma e^{-a(T-t)}$ 。

Hull and White 发展的单一状态模型可与目前利率期限结构和所有目前即期利率和远期利率的波动一致。

### 三、Black, Derman and Toy (1990)

Black, Derman and Toy (1990) 建立的 BDT 模型开始于即期利率的树形图，之后在即期利率树形图用局部期望假设 (Location expectation hypothesis, LEH) 求解出期限结构。收益率的市场数据是输入变量，即期利率树形图是输出变量。和原始的 HL 模型一样，BDT 模型以二叉树描述整个期间结构的演化。模型有以下三点特性：

(1) 基本变量为短期利率。短期利率是模型的单因子；其变动影响所有受利率影响的证券价格。

(2) 模型有两个输入变量：不同到期期限的长期利率（零息政府公债的收益率），即收益率曲线；相同债券的收益率波动性，即波动性曲线。这两种曲线一起构成期限结构。

(3) 模型改变未来短期利率的平均值和波动性以配合输入变量。未来波动性变动时，未来均值回归变动。

Black, Derman, and Toy (1990) 提出建立二叉树等同于以下的短期利率过程：

$$d(\ln r) = [\theta(t) + (\sigma'(t) / \sigma(t)) \ln r] dt + \sigma(t) dz \quad (1-32)$$



其中， $\sigma'(t)$ 是与 $t$ 有关 $\sigma(t)$ 的衍生。短期利率 $r(t)$ 的变动是对数正态分布。因此，此模型会避免在 HL 和 HW 模型中可能会有负利率的问题。BDT 模型包含 $\theta(t)$ 和 $\sigma(t)$ 两个独立的时间函数，其会拟合开始的收益率曲线和波动性结构。一旦选定 $\theta(t)$ 和 $\sigma(t)$ ，依照定义未来波动性完全确立。BDT 连续模型的缺点为波动性函数 $\sigma(t)$ 的设定会使短期利率会远离均值。而不是均值回归。但其优点为波动性单位是百分比，和市场惯例一致。此外，BDT 模型也不需要设定投资者的风险偏好。

#### 四、Black and Karasinski (1991)

Black and Karasinski (1991) 提出三个独立时间函数模型 (BK 模型)，模型允许这些函数分离回归率和短期利率波动性。BK 模型所有不确定性来源的因子为短期利率。BK 模型假设利率是对数正态分布，因此利率不会小于等于 0。

假设每一未来时点的不同短期利率 (Short rate) 的平均值和波动率与时间有关。BDT 模型的连续时间形式为：

$$d(\log r) = [\theta(t) - \phi(t)\log r]dt + \sigma(t)dz \quad (1-33)$$

其中， $r$ 为局部利率 (Local interest rate)， $\sigma$ 和 $\phi(t)$ 相关。

Black and Karasinski 将 $\mu(t)$ 视为目标利率 (Target interest rate)。当 $\log r$ 大于 $\log \mu(t)$ 时， $\log r$ 则会下降，而当 $\log r$ 小于 $\log \mu(t)$ 时， $\log r$ 则会上升。将式 (1-33) 重新改写为下式

$$d(\log) = \phi(t)[\log \mu(t) - \log r]dt + \sigma(t)dz$$

其中， $\mu(t)$ 为利率的长期平均水平， $\phi(t)$ 为均值回归速度， $\sigma(t)$ 为 $\log r$ 相对变动的波动率。

Black and Karasinski 选定三个输入变量，分别为收益率曲线、波动性曲线和利率上限合约曲线 (Cap curve)。而输出变量相对应输入变量分别为 (1) 零息债券每一到期期限的目前收益率。(2) 零息债券的每一到期期限的目前收益率波动性。(3) 每一到期期限的平价 (at-the-money) 不同利率上限合约 (Differential cap) 的价格。前两个输入和输入变量和 HW 模型一样。Black and Karasinski 选择的输

入变量产生合理的输出变量，虽然其本身可能会不合理。

BDT 可拟合收益率曲线和波动性曲线的两个输入变量，但不能拟合利率上限曲线（Cap curve）。事实上，BDT 模型选定收益率曲线和波动性曲线隐含选定利率上限曲线（Cap curve）。但 BDT 模型不能分别地改变目标利率（Target rate）、波动率和均值回归。

Black and Karasinski 却解决了这个问题。他们同样假设上涨和下跌的机率各为 0.5，也保留了二叉树的方法。Black and Karasinski 会除去树形图多余的部分。先建立在确定时间上，之后再去除一半的节点。Black and Karasinski 从树形图的后面推算回去时，用到内插法和外插法。

## 五、Heath, Jarrow and Morton (1992)

Heath, Jarrow and Morton (1992) 扩展早期 Ho and Lee (1986) 的期限结构一致框架，提出瞬间远期利率曲线的随机微分方程：

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T, f(t, T))dz_i(t) \quad (1-34)$$

其中， $f(t, T)$  为在  $t$  时点测度而在  $T$  时点到期的瞬间远期利率， $\alpha(t, T)$  和  $\sigma(t, T)$  则是满足必要正则条件的（Necessary regularity conditions）的随机函数， $n$  为驱动远期利率曲线演化的随机因子。式（1-34）是有允许和远期利率水平相关的  $n$  个随机源和远期利率波动性的理论 HJM 方法公式。远期利率可表达为下式的积分形式：

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T)ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(s, T)dz_i(s)$$

其中， $0 \leq t \leq T$ ， $f(0, t)$  是起初观察到的远期利率曲线，而  $dz_i$  为独立的维纳过程。漂移率  $\alpha(t, T)$  由无套利确定，和波动性曲线有关：

$$\alpha(t, T) = \sum_{i=1}^n \left\{ \sigma_i(t, T) \left[ \int_t^T \sigma_i(t, s)ds \right] \right\}$$

远期利率过程因此可由波动性函数设定。

虽然原始的 HJM 方法公式是以远期利率表达，模型同等地可用贴现债券价格表达。债券价格会满足随机微分方程：

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t) + \sum_{i=1}^n v_i(t,T) dz_i(t)$$

其中,  $P(0,T)$  为起初观察的贴现债券价格曲线。  $T$ -到期期间债券报酬波动性和远期利率波动性函数有关:

$$v_i(t,T) = -\int_t^T \sigma_i(t,s) ds$$

当  $r(t) = f(t,t)$  是  $t$  时点的短期利率, 远期利率曲线随机演化过程的描述隐含短期利率的过程。过程也由开始远期曲线的形状和波动性结构完全确定, 满足以下的随机微分方程:

$$dr = \left[ \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^t v_i(s,t) \frac{\partial^2 v_i(s,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial v_i(s,t)}{\partial t} ds + \int_0^t \frac{\partial^2 v_i(s,t)}{\partial t^2} dz_i(s) \right\} \right] dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i(s,t)}{\partial t} \Big|_{s=t} dz_i(s)$$

## 六、市场模型

在我们前面介绍的模型中用到的解释因子都是不可直接观察到的变量, 比如在均衡模型中, Vasicek 和 CIR 模型使用的短期利率、Fong and Vasicek (1991) 模型和 Longstaff and Schwartz (1992) 用的短期利率方差都不能在市场中找到对应的经济变量。因此在实际应用这些模型的过程中, 选择适当的变量作为替代变量。比如同业拆借利率, 一个月、三个月 LIBOR 等等。替代变量的使用引起了计算结果的偏差。而在无套利模型中, HJM 模型使用瞬时远期利率作为外生变量, 瞬时远期的期限结构和波动率结构本身观测不到, 因此 HJM 模型在应用上需要先计算瞬间远期利率期限结构, 而从观测到的债券价格得出瞬时远期利率比较繁琐。因此用瞬时远期利率的期限结构和波动率结构为利率期权定价, 这一方法在实务中用起来较难。另一方面虽然对数正态过程能保证利率过程为正而且使期权价格有闭式解, 但它不适用于远期利率模型, 因为连续复利会使债券价格无限大, 从而违背了无套利条件。

Brace, Gatarek and Musiela (BGM, 1997), Jamshidian (1996), Miltersen, Sandmann, and Sondermann (MSS, 1997), 分别研究了一套可用市场可观测离散变量直接建模的方法, 后来他们的方法被统一称为市场模型。市场模型可用的

市场数据包括 LIBOR 或有限期限的互换利率 (Swap interest)。MSS 假设利率是对数正态分布, 并在此基础上给出了帽式 (Cap) 期权和地板 (Floor) 期权的价格封闭式解。对市场模型在此不做详细的介绍。

#### 第四节 国内利率期限结构模型研究文献回顾

近几年, 国内对利率期限结构的研究逐渐丰富, 从利率期限结构的静态估计、利率动态模型的实证研究, 到各种模型估计和分析方法在利率模型中的应用, 对利率期限结构相关内容的研究方兴未艾。

谢赤/吴雄伟 (2002) 使用 GMM 方法, 以中国货币市场 30 天银行同业拆借利率作为瞬时利率的近似代替估计 Vasicek 模型和 CIR 模型的参数, 结果表明同业拆借市场利率波动较小, 调整速度不剧烈。

朱世武/陈健恒 (2003) 使用多项式样条法和 Nelsen Siegel Svensson 模型对利率期限结构的静态估计进行拟合比较, 认为 Nelsen Siegel Svensson 比较适合。朱世武/陈健恒 (2003) 还应用主成分法对利率的变动进行分析, 发现平行移动成分的解释能力不高。

唐革榕/朱峰 (2003) 同样用主成分分析方法研究国债收益率曲线变动的影响因素, 发现水平、倾斜和曲率因素分别可以解释收益率曲线变化的 41.67%、32.29% 和 16.88%, 与朱世武/陈健恒(2003)的研究结果相似。

谢赤/钟羽 (2004) 在 Vasicek 模型的基础上加入制度转换因素, 研究制度因素是否对模型修正有帮助。结果表明, 制度转换能够捕捉到利率变动中的大部分异方差现象。

潘冠中/邵斌 (2004) 基于用极大似然估计法和 GMM 法分别对 CKSL 模型进行估计, 结果表明极大似然估计法要优于 GMM 方法, 同时发现中国的利率变化有明显的均值回归效应, 并将之归因于中国人民银行对目标利率的调整不如美联储对联邦基金利率调整频繁所致。潘冠中 (2004) 还对瞬时利率的数据进行了研究, 认为在估计单因子利率模型的参数时, 对瞬时利率的筛选应该遵循高度相关、交易最频繁和成交量最大的原则。深入分析后, 认为银行间 7 天回购利率 R007 是瞬时利率的最佳替代。

范龙振 (2004) 年以交易所债券价格 1996 年 3 月到 2003 年 1 月的周数据利

用卡尔曼滤波法估计了连续时间两因子利率模型，包括 Vasicek 模型、CIR 模型、仿射模型和广义高斯仿射模型。结论认为广义高斯仿射模型对利率期限结构的横截面特征描写最好，仿射模型次之，CIR 模型与 Vasicek 模型难分高下。

朱世武/陈健恒（2005）用银行间数据对 Vasicek 模型和 CIR 模型进行了参数估计，并利用模型模拟了短期利率的变动过程，发现模拟结果能够较好地反映短期利率的变动趋势，他们还对浮动利率债券进行了定价。

郑振龙/林海（2005）用随机跳跃过程分析了我国政府利率的变动过程。考虑到政府利率由央行决定并在一定期间保持不变，没有使用漂移——跳跃过程，而是采用了单纯跳跃过程。他们的研究表明，国内政府利率可以用一个单纯的跳跃过程进行描述。郑振龙/林海（2005）进一步使用市场利率进行单位根检验，表明传统的检验方法和谱回归的 GPH 方法无法拒绝中国市场利率的单位根假设。

总的来说，以上研究中有的偏向于模型实证分析，有的偏向于新估计方法的应用，有的着重于数据的选择分析，这些研究都推进了我国对利率期限结构的认识、研究和应用。

## 第二章 利率动态模型的选择

利率期限结构模型的选择对资产的定价具有核心作用，但利率期限结构的选择是个权衡的过程，模型越复杂，对利率期限结构的拟合效果可能越好，但估计过程就越复杂，计算时间可能越长，而且复杂的利率模型往往难以得到利率衍生产品的闭式解。本文的主要目的是对一些利率动态模型进行分析，并比较哪个模型能更好地估计我国的利率期限结构，从而对利率衍生产品的定价提供参考。

### 第一节 利率模型的初步选定

在对利率模型的选择上，Boero and Torricelli (1993) 认为可以从两个方面进行评估：易处理性 (Tractability) 和现实性 (Realism)。模型的易处理性是指 (a) 易于进行解析分析；(b) 易于对数据拟合；(c) 易于对利率衍生品进行正确定价。模型的现实性是指 (d) 模型应该接近于利率的现实行为。(e) 对利率现实行为具有很强的解释能力。

我们可以参考 Boero and Torricelli (1993) 的方法从两方面对第一章中的众多备择利率模型进行选择，第一方面是模型的解析分析和定价难易程度；第二是对利率动态的刻画度。

#### 一、解析分析和定价的难易

利率模型的选择要易于解析分析和产品定价，体现在上面的 (a) (c) 两点。从这一方面来说，已有的单因子模型和双因子模型相对于三因子及三个以上因子的多因子模型更容易分析。单因子模型虽然简单，但能够抓住利率的主要特征。双因子模型由于因子的增加，对利率行为的解释更加充分。而且单因子模型和双因子模型在一定条件下大部分都可以得到某些利率衍生产品价格的闭式解，而多因子（三个及以上）模型则复杂许多，一般很难得到闭式解。而且 Litterman and Scheinkman (1991) 和 Chapman and Pearson (2000) 用主成分分析法也得出，前两个因子能够解释 95% 左右的利率特征，前三个因子可以解释 98%~99% 的特征。在权衡多因子模型的复杂、计算的复杂度和增加因子后的边际解释力度后，本文认为在实务中，对单因子模型和双因子模型进行比较就够了，因此本章初步选定

对单因子利率模型和双因子利率模型进行比较。

## 二、评估对利率动态的刻画准确度

对利率动态的刻画度体现在模型对现实数据的拟合度（b）和对利率行为特征（d、e）的把握上。这一点的评估标准可以有两个方法。一个是对选定的模型用统计检验的方法来确定模型能在多大程度上刻画利率动态。另一个是可以对已估计出参数的利率模型，用样本外数据计算预测误差，并根据其大小来评价模型。在本章的模型评估中，这两种方法都将用到。

## 第二节 利率模型的实证检验

### 一、单因子和双因子模型的选择

#### （一）单因子模型的选择

在文献中，Vasicek（1977）模型和 CIR（1985）模型是最经典的两个单因子模型，本文以这两个模型作为单因子模型的典型代表。后面的计算结果表明，Vasicek（1977）模型和 CIR（1985）模型差别不是特别显著。

#### （二）双因子模型的选择

在第一章中，本文已经谈到，单因素模型利率模型对一些形状的利率曲线，往往无法抓住其特征。比如驼峰状，山谷状等等。在本文研究的样本中，就经常出现如图 2-1 到图 2-4 形状的利率曲线。对这些曲线，单因素模型无法对之很好建模，而双因素模型则能够对这些曲线进行更好的描述。在本节中我们将尝试用双因子模型对我国的利率曲线进行实证研究。

图 2-1 3 年期收益率曲线（2003 年 7 月 29 日）

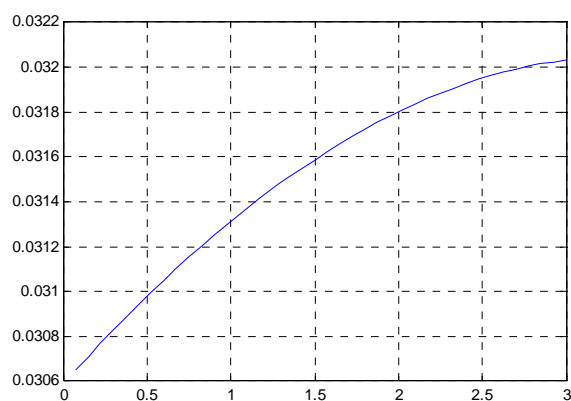


图 2-2 3 年期收益率曲线 (2003 年 8 月 7 日)

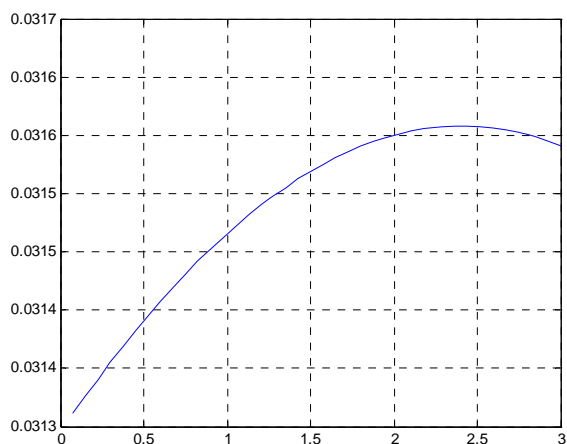


图 2-3 3 年期收益率曲线 (2003 年 10 月 22 日)

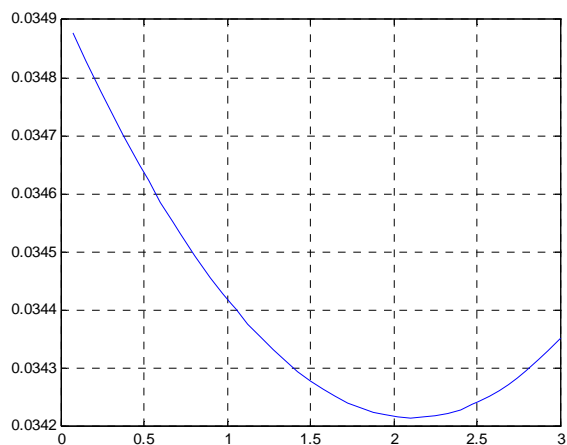
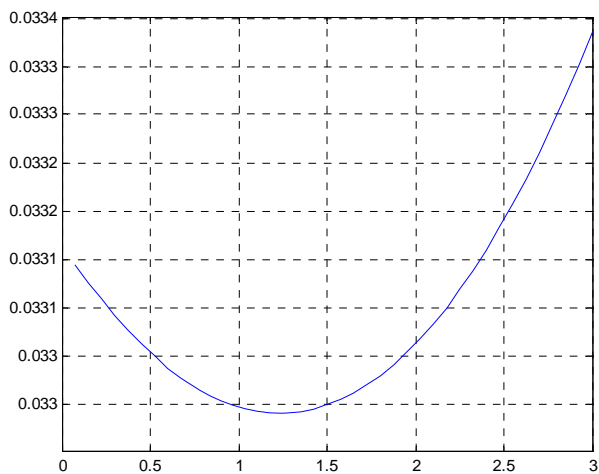


图 2-4 3 年期收益率曲线 (2003 年 11 月 21 日)





文献中常见的双因子均衡模型主要有：Fong and Vasicek(1991)、Longstaff and Schwartz(1992)、Brennan and Schwartz (1979)、Nelson and Schaefer(1983)、Schaefer and Schwartz (1984)这 5 种。其中 Fong and Vasicek(1991)模型、Longstaff and Schwartz(1992)模型的两个因子分别为短期利率和短期利率波动率。而 Nelson and Schaefer (1983)、Schaefer and Schwartz (1984)这两个模型是以长期利率和长短期利率之差作为模型的两个因子。Brennan and Schwartz (1979)的两个因子则是长期利率和短期利率。

本文的双因子模型研究将侧重于以短期利率和短期利率波动率为两个因子的 Fong and Vasicek(1991)模型和 Longstaff and Schwartz(1992)模型。之所以选定这两个模型是由于两个原因。第一个原因是，利率波动率的变化对期限结构形状却有显著的影响，含有利率波动率因子的双因子模型能够描述更为丰富的收益率曲线。不象单因子模型，其往往只能得出平坦的利率期限结构。因此加入利率波动率的双因子模型，能够描述利率波动率较大时的利率期限结构。同时，我国的利率波动率也相对较大，而一般来说，利率的波动对中期债券价格的影响最大，我国债券市场上又是以中长期债券为主，因此含有利率波动率的双因子模型从直觉上来说能更好地描述我国的利率期限结构。

第二个原因是，Martellini and Priaulet(2001)已经证明，Brennan and Schwartz (1979)、Nelson and Schaefer (1983) 和 Schaefer and Schwartz (1984) 模型与市场不存在套利机会的假设相矛盾。因此在本文不选用后三个模型，而只选取 Fong and Vasicek (FV, 1991) 模型、Longstaff and Schwartz (LS, 1992) 模型作为分析研究对象。

我们先检验 LS 双因子模型是否能够适用于我国的收益率曲线的分析。

## 二、Longstaff and Schwartz (1992)实证研究

### (一) 模型的介绍

Longstaff and Schwartz 模型的两个因子分别是短期利率  $r$  和短期利率波动率  $V$ 。在双因子模型的推导过程中，LS 利用 CIR(1985a)的框架给出了一般均衡下的这两个内生变量的动态过程：

$$dr = \left( \alpha\gamma + \beta\eta - \frac{\beta\delta - \alpha\xi}{\beta - \alpha} r - \frac{\xi - \delta}{\beta - \alpha} V \right) dt + \alpha \sqrt{\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}} dz_1 + \beta \sqrt{\frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}} dz_2 \quad (2-1)$$

$$dV = \left( \alpha^2\gamma + \beta^2\eta - \frac{\alpha\beta(\delta - \xi)}{\beta - \alpha} r - \frac{\beta\xi - \alpha\delta}{\beta - \alpha} V \right) dt + \alpha^2 \sqrt{\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}} dz_1 + \beta^2 \sqrt{\frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}} dz_2 \quad (2-2)$$

并要求参数  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \xi$  的初始值都是正的。

在得到短期利率  $r$  和短期利率波动率  $V$  过程, LS 推导出剩余期限为  $\tau$  的零息票债券的价格公式为:

$$F(r, V, \tau) = A^{2\gamma}(\tau) B^{2\eta}(\tau) \exp(\kappa\tau + C(\tau)r + D(\tau)V) \quad (2-3)$$

其中:

$$A(\tau) = \frac{2\phi}{(\delta + \phi)(\exp(\phi\tau) - 1) + 2\phi},$$

$$B(\tau) = \frac{2\psi}{(\nu + \psi)(\exp(\psi\tau) - 1) + 2\psi},$$

$$C(\tau) = \frac{\alpha\phi(\exp(\psi\tau) - 1)B(\tau) - \beta\psi(\exp(\phi\tau) - 1)A(\tau)}{\phi\psi(\beta - \alpha)},$$

$$D(\tau) = \frac{\psi(\exp(\phi\tau) - 1)A(\tau) - \phi(\exp(\psi\tau) - 1)B(\tau)}{\phi\psi(\beta - \alpha)},$$

而,

$$\nu = \xi + \lambda,$$

$$\phi = \sqrt{2\alpha + \delta^2},$$

$$\psi = \sqrt{2\beta + \nu^2},$$

$$\kappa = \gamma(\delta + \phi) + \eta(\nu + \psi)$$

又由式 (2-3), 可以得到零息票债券的利率函数为:

$$R(\tau) = \frac{-(\kappa\tau + 2\gamma \ln A(\tau) + 2\eta \ln B(\tau) + C(\tau)r + D(\tau)V)}{\tau} \quad (2-4)$$

可以由式 (2-4) 看出, 相比单因子模型而言, 在 LS 模型中, 由于零息票债券的价格依赖于短期利率和短期利率波动率两个因子, 使得收益曲线的变化可以

有更丰富的变化。在该模型中收益率曲线的可以是单调递增、单调递减、驼峰形、U形的，甚至同时含有驼峰形和U形。

## (二) 数据的选定

在接下来的实证研究中，用到的数据包括短期利率和各期限零息票债券利率。

### 1、短期利率

在LS的实证研究中，使用一个月的美国国库券收益率作为短期无风险利率 $r$ 的近似。当前我国银行间市场的利率已基本实现市场化，而银行间7天回购利率无论从交易量还是交易活跃程度上都具有代表性。并且7天相对一个月而言更短，因此本文认为选用银行间7天回购利率的数据更为适合。所用的数据期限从2003年7月1日开始，到2005年3月31日，共有426个观测值。

### 2、短期利率波动率计算

用Eview5.0中的GARCH模块对短期利率波动率序列进行估计拟合，估计拟合过程采用Marquardt算法。

估计结果如表2-1：

表 2-1 短期利率波动率估计结果表

Dependent Variable: DR				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH	-262.7113	122.5464	-2.143769	0.0321
C	-0.001626	0.000495	-3.286265	0.001
R	0.089662	0.025841	3.469717	0.0005
Variance Equation				
C	-9.10E-07	1.00E-08	-90.53885	0
RESID(-1)^2	0.146869	0.040787	3.600855	0.0003
GARCH(-1)	0.598971	0.04704	12.73313	0
F-statistic	10.55419	Mean dependent var		-1.94E-05
Prob(F-statistic)	0	S.D. dependent var		0.001184
Log likelihood	2371.448	Akaike info criterion		-11.1007
Durbin-Watson stat	2.624276	Schwarz criterion		-11.03407

根据上表估计的结果，可以得到短期利率条件波动率的时间序列，条件波动率的表达式为：

$$\sigma_t^2 = -9.1 \times 10^{-7} + 0.146869e_{t-1}^2 + 0.598971\sigma_{t-1}^2$$

$$(-90.538) \quad (3.60) \quad (12.73)$$

### 3、各期限零息票债券利率

模型实证研究中还需要用到 3 个月、6 个月、9 个月、1、2、3、4、5 年等期限的零息票债券利率的每日数据，由于我国市场中的零息票债券的种类不全，对这些数据我们采用 McCulloch (1971,1975) 提出的多项式样条法从沪市现有交易的债券数据中剥离出来。截止到 2005 年 3 月 31 日，沪市共有 30 只债券在交易，除了由于 010503 (05 国债 (3)) 和 010504 (05 国债 (4)) 的数据太短而不将其列入样本，其余的债券都进入样本，因此总共有 28 只债券。

样条函数采用 3 阶多项式样条函数，考虑到函数平滑度和二阶导数必须连续性的约束，可以得到以下期限为  $t$  的零息票债券价格的函数形式：

$$B(t) = \begin{cases} B_0(t) = 1 + a_0t + b_0t^2 + c_0t^3 & t \in [0, 5] \\ B_5(t) = 1 + a_0t + b_0t^2 + c_0(t^3 - (t-5)^3) + c_1(t-5)^3 & t \in [5, 10] \\ B_{10}(t) = 1 + a_0t + b_0t^2 + c_0(t^3 - (t-5)^3) + c_1(t-5)^3 & t \in [10, 11] \end{cases}$$

(2-5)

由于剩余期限为  $\tau$  的零息票债券价格等于：

$$B(0, \tau) = \frac{1}{[1 + \hat{R}(0, \tau)]^\tau}$$

我们可以得到：

$$\hat{R}(0, \tau) = [B(0, \tau)]^{-\frac{1}{\tau}} - 1$$

在我们计算每日各种期限零息票债券利率数据时，债券剩余期限  $\tau = t$ ，因此我们得到零息票债券的利率<sup>①</sup>为：

$$\hat{R}(0, t) = [B(0, t)]^{\frac{1}{t}} - 1 \quad (2-6)$$

于是我们就可以估计到不同期限的零息票债券利率（估计的程序代码见附录 E、F）。

### （三）实证过程

对式（2-4），由于  $\kappa, \gamma, \eta, A(\tau), B(\tau)$  都只与债券的期限有关，因此对某一种期限的零息票债券而言，我们可以得出

$$\begin{aligned} \Delta R_{t+1}(\tau) &= R_{t+1}(\tau) - R_t(\tau) \\ &= \frac{C(\tau)}{\tau} \Delta r_{t+1} + \frac{D(\tau)}{\tau} \Delta V_{t+1} \end{aligned} \quad (2-7)$$

式（2-7）中，对某一期限  $\tau$ ， $C(\tau), D(\tau)$  是由  $\alpha, \beta, \delta, \nu$  四个参数给定，见式（2-3）中的定义。因此，我们可以单一期限的时间序列数据，估计出这四个参数的值。

而问题的关键是：如果模型是可靠的话，那么模型的参数不仅可以描述某一期限零息票债券的利率变化，也可以描述其他期限零息票债券的利率变化。也就是说，如果模型在横截面数据约束下，仍然可以得到可靠的参数估计，那么模型对整个利率期限结构的拟合就可以被接受。

### （四）模型参数的估计

#### 1、参数估计方法的选定

对模型参数的估计的方法主要有最大似然法（Maximum likelihood estimation,

<sup>①</sup> 与零息票债券收益有关的利率有两种，一个是零息票债券的年内部收益率  $\hat{R}(0, \tau)$ ，因为

$$B(0, \tau) = \frac{1}{[1 + \hat{R}(0, \tau)]^\tau},$$

于是， $\hat{R}(0, \tau) = [B(0, \tau)]^{\frac{1}{\tau}} - 1$ ，

另一个是零息票债券的连续复合收益率  $R(0, \tau)$ ，因为

$$B(0, \tau) = \exp[-\tau R(0, \tau)],$$

因此， $R(0, \tau) = \ln[1 + \hat{R}(0, \tau)] = -\frac{1}{\tau} \ln[B(0, \tau)]$ ，

在 Longstaff and Schwartz(1992)模型中，零息票债券利率是指前者。

MLE)、和矩估计法(Moment-based method), 其中矩估计法又可以包含(广义矩(General Moment Method, GMM)、模拟矩(Simulation moment method, SMM)、有效矩(Efficient moment method, EMM)估计。Duffee and Stanton(2004)使用了这两种方法对有限样本下的参数估计进行了比较分析, 认为对于简单的利率模型(比如单因子 CIR 模型), 最大似然估计法的效果较好, 但是对于比较灵活、复杂的利率动态模型, 最大似然法的参数估计偏差很大。最大似然法需要对数据的分布进行假设, 并且在复杂模型下, 难以得到最大似然法函数。在这种情况下, 如果样本不是太小, 可以使用基于矩的参数估计方法。因此本文的参数估计法使用了 Hansen(1982)提出的广义矩估计法(GMM, General moment method)。本文使用广义矩方法的另一个原因是由于 LS 模型可以得到显式的矩条件方程(当矩条件方程不明显时, 则可选择的方法为模拟矩和有效矩法)。广义矩法的优点首先是, 它并不需要对分布做出假设。其次, 即使在矩方程中的误差项是条件异方差、序列相关或者横截面相关, 它也能得到一致的估计。<sup>①</sup>

## 2、广义矩方法

对广义矩估计方法, 本文作一简要介绍。

广义矩方法中, 首先是如何选取工具变量。工具变量的选择具有一定的技巧。

由(2-7)可以得到:

$$\varepsilon_t = \Delta R_t(\tau) - \frac{C(\tau)}{\tau} \Delta r_t - \frac{D(\tau)}{\tau} \Delta V_t \quad (2-8)$$

如果我们对式(2-7)进行最小二乘回归, 由于回归的结果使得回归残差与解释变量是正交的, 那么  $E(\varepsilon)$ 、 $E(\varepsilon \cdot \Delta r)$  和  $E(\varepsilon \cdot \Delta V)$  都将为零。所以我们在广义矩估计中, 采用常数 1、 $\Delta r$  和  $\Delta V$  两个变量作为广义矩的工具变量, 可以看出使用这三个工具变量使估计过程更直观。

定义参数向量  $\theta = (\alpha, \beta, \sigma, \nu)$ , 可以得到:

$$m(\theta) = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \cdot \Delta r \\ \varepsilon \cdot \Delta V \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

如果只有一种期限, 那么由(2-9)只能得到 3 个矩函数, 而每增加一种期

<sup>①</sup> Longstaff, Francis A. and Eduardo S. Schwartz(1992), 'Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model', The Journal of Finance, V48,1259-1282

限，就增加 3 个矩函数。即假设有  $n$  种期限的零息票债券，那么：

$$f(\theta) = \begin{bmatrix} m_{\tau_1}(\theta) \\ m_{\tau_2}(\theta) \\ \vdots \\ m_{\tau_n}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t^{\tau_1} \\ \varepsilon_t^{\tau_1} \cdot \Delta r_{\tau_1} \\ \varepsilon_t^{\tau_1} \cdot \Delta V_{\tau_1} \\ \varepsilon_t^{\tau_1} \\ \varepsilon_t^{\tau_1} \cdot \Delta r_{\tau_1} \\ \varepsilon_t^{\tau_1} \cdot \Delta V_{\tau_1} \\ \vdots \\ \varepsilon_t^{\tau_n} \\ \varepsilon_t^{\tau_n} \cdot \Delta r_{\tau_n} \\ \varepsilon_t^{\tau_n} \cdot \Delta V_{\tau_n} \end{bmatrix}$$

所以总共有  $3n$  个矩函数，且  $E(f(\theta)) = 0$ 。

当  $n$  只有有限  $T$  个样本时，用  $g_T(\theta)$  代替：

$$g_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_t(\theta)$$

于是参数的估计就是使得  $Q(\theta)$  值最小：

$$Q(\theta) = g_T(\theta)' \cdot W \cdot g_T(\theta)$$

这里的  $W$  是个正定矩阵， $W$  的最佳选择是估计得到的  $g_T(\theta)$  的一致协方差矩阵的逆阵（Hansen(1982)对之进行了证明）。即

$$W = W(\theta) = [V(g(\theta))]^{-1} = \frac{1}{T^2} \sum \sum_{i,j=1,2,\dots,T} g(\theta)' g(\theta)$$

对于一个恰好识别的模型， $Q(\theta)$  值为 0，因此权重矩阵  $W$  的选择不重要，但是对于一个过度识别的模型，假设有  $M$  个矩方程， $N$  个参数，那么有  $(M - N)$  个矩约束，此时估计得到的参数必须使得  $Q(\theta)$  得到最小的正值。即

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \left( g_T(\theta)' \cdot W \cdot g_T(\theta) \right)$$

**GMM 估计的过程：**

第一步：一般在初始估计时，先选用单位阵 ( $W = 1$ ) 作为权重矩阵。得到  $\theta$  的第一次估计值  $\theta_1$  使得  $Q(\theta_1)$  最小，此时与之对应的渐进协方差矩阵为：

$$V(\theta_1) = \left[ D(\theta_1)' D(\theta_1) \right]^{-1} D(\theta_1)' [V(g(\theta_1))] D(\theta_1) \left[ D(\theta_1)' D(\theta_1) \right]^{-1} \quad \text{其中:}$$

$$D(\theta_1) = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_1}。$$

第二步：利用第一步估计的  $\theta_1$  计算  $W = W(\theta_1) = [V(g(\theta_1))]^{-1}$ ，然后最小化  $Q(\theta)$ ，得到  $\theta$  的第二次估计值  $\theta_2$ ，其渐进协方差矩阵为：

$$V(\theta_2) = \left[ D(\theta_2)' D(\theta_2) \right]^{-1} D(\theta_2)' [V(g(\theta_2))] D(\theta_2) \left[ D(\theta_2)' D(\theta_2) \right]^{-1} \quad \text{第三}$$

步：更新权重矩阵  $W = W(\theta_2) = [V(g(\theta_2))]^{-1}$ ，并迭代计算至收敛。最后得到  $\theta$  的 GMM 估计量  $\theta^*$ ，其对应的渐进协方差矩阵为：

$$V(\theta^*) = \left[ D(\theta^*)' W(\theta^*) D(\theta^*) \right]^{-1}$$

此时目标函数的值为：

$$Q(\theta^*) = g(\theta^*)' W(\theta^*) g(\theta^*)$$

此时  $Q(\theta^*)$  服从自由度为  $(M - N)$  的  $\chi^2$  分布（见 Hansen(1982)）。 $Q(\theta^*)$  可以验证额外的  $(M - N)$  个矩函数是否合理。

#### （五）实证结果及分析

经过计算，我们可以得到如表 2-2 的结果：

表 2-2 FS 模型横截面约束的 GMM 检验

	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\nu$	$Q(\theta^*)$
估计值	-0.38586	0.39091	3.7801	140.83	9.6032
T	-16.766	102.155	24.190	20.256	
P	0	0	0	0	5% (10.85)*

\*自由度为 20，显著性水平为 5%时  $\chi_{20}^2 = 10.85$ 。

表 1 说明了四个参数的估计量都通过了  $t$  检验。表 1 也给出了 GMM 估计的  $Q(\theta^*)$  值，由于四个参数的估计使用 24 个矩函数得到的，因此导致了 20 个过度



识别的矩约束，所以自由度为 20。此时  $\chi_{20}^2 = 10.85$ 。而  $Q(\theta^*) = 9.6032 < \chi_{20}^2$ ，因此，LS 双因子模型的横截面约束无法被数据所拒绝。实证检验的结果接受了短期利率和短期利率波动率为两个因子的 Longstaff and Schwartz(1992)模型。

虽然实证检验的结果接受了 LS 模型，但 LS 模型并不好用，有两个原因，第一个原因是运算过程耗时过多。我们发现在估计过程中，由于 LS 模型的高度复杂，参数估计所需要的运算时间较长，在实证检验中我们只估计了 4 个参数，但估计一次往往需要 15 个小时以上。如果将该模型的 9 个参数全部估计出来，将花费更多的时间。第二个原因是，LS 模型参数的经济含义不明确，一方面，这使得在进行参数估计时，参数的初始值难以拟定，于是在参数估计时往往需要多次的尝试，花费大量的时间；另一方面，参数没有明确的经济意义，使模型难以在实际应用中，特别是套期保值（Hedging）中得到直观的应用。因此接下来部分我们考察 Fong and Vasicek (FV, 1992)模型，其参数经济意义明确，所需参数较少。

### 三、Fong and Vasicek (1992)模型实证研究

Fong and Vasicek (FV, 1992)认为，利率的波动率不是一个常量，它经常随时间而变化。在一些时期，债券市场波动较大，利率变动相当剧烈。而在其他时间，债券市场相对平静，利率只有轻微的变动。比较典型的是，当利率水平较高时，利率的波动较大；而利率水平较低时，利率的波动较小。然而，只用利率水平一个因素无法解释利率波动的不同。因此，有必要引进其他因素，FV 加入了利率波动率作为第二个因素。

实际上，在现有文献的单因子模型中，在利率动态模型中都有利率波动率这个因子（如表 2-3），只不过这些模型都假设利率波动率是一个常数，这使得单因子模型所能描述的利率曲线的形状有限。同时，在利率产品定价过程中，利率波动率是个非常重要的因素。而在利用利率产品进行风险管理时，则对利率波动率的准确描述更为重要。因此 Fong and Vasicek (FV, 1992) 与 Longstaff and Schwartz(1992)一样都将利率波动率看作一个随机过程。

表 2-3 单因子利率模型

短期利率动态： $dr = \alpha(\bar{r} - r_t)dt + \sigma(r,t)dz$	
其中： $dr$ ：短期利率变化 $\alpha$ ：利率均值回归速度 $dz$ ：维纳过程 $\bar{r}$ ：利率均值 $\sigma(r,t)$ ：利率的标准差	
单因子模型：	
Vasicek(1977)	$\sigma(r,t) = \sigma$
CIR(1985)	$\sigma(r,t) = \sigma\sqrt{r}$
Dothan(1978)	$\sigma(r,t) = \sigma r$

## (一) Fong and Vasicek 模型

FV 模型认为利率波动率是一个随机因子，然后在无套利条件下推导纯贴现债券的价格。FV 模型如下：

$$dr = \alpha(\bar{r} - r)dt + \sqrt{v}dz_1 \quad (2-10)$$

$$dv = \gamma(\bar{v} - v)dt + \xi\sqrt{v}dz_2 \quad (2-11)$$

其中：

$\alpha$ ：利率均值回归速度；

$\bar{r}$ ：利率均值；

$v$ ：利率的波动率（方差）；

$\gamma$ ：波动率均值回归速度；

$\bar{v}$ ：波动率的均值；

$\xi^2 v$ ：瞬时方差（Instantaneous variance）

$dz_1, dz_2$ ：维纳过程。

可以看出，FV 模型认为利率和利率波动率都有一个长期均值，都存在均值回归现象。而且利率水平和利率波动率这两个因素并不是相互独立的因素，因此两者之间存在相关性，即  $dz_1 = \rho dz_2$ 。在使用估计 FV 模型进而用之定价时，我

们需要知道他们的相关系数  $\rho$ 。

## (二) 模拟矩方法

在 Fong and Vasicek (1992) 模型参数估计的过程中, 我们要用到模拟矩法 (Method of Simulation Moment), 在此先对模拟矩法简要介绍。

模拟矩法最早由 Daniel McFadden 在 1989 年提出, 同年, Pakes and Pollard 对模拟矩的渐进性等性质进行证明。近十几年来, 模拟矩的方法得到越来越广泛的应用。MSM 近期在微观经济学中的应用包括: Laont, Ossard and Vuong (1995) 对拍卖的研究; McFadden and Train (1995) 对多项 logit (multinomial logit) 模型的研究, 以及 Sieg (2000) 关于不对称信息下讨价还价博弈 (a bargaining game) 的估计。MSM 在宏观经济学中的应用有: Heaton (1995) 的代理人资产定价模型 (a representative agent asset pricing model) 的估计, Asea and Turnowsky (1998) 的家庭组合 (Household portfolio) 选择的多项式 probit 模型 Iannizzoto and Taylor (1999) and Galindo (2000) 的汇率目标区 (exchange rate target zone) 模型。还有 Amaro de Matos (2001) 将模拟矩法应用于含跳跃的期权定价模型的估计。

对未知参数向量  $\theta^*$  的传统矩估计方法得到的估计参数  $\theta_m$  是通过最小化观测值和期望值之间的最小 (广义) 距离得到:

$$\sum [IV]([OR] - [ER]) \quad (2-12)$$

其中:  $IV$  是工具变量;

$OR$  是观测值 (Observed response)

$ER$  是参数为  $\theta_m$  时的期望值 (Expected response)。

但期望值  $ER$  的函数形式往往无法用解析方式表达, 或者说难以直接得到期望值的解析解, 在这种情况下, 就可以应用模拟的方式来解决。当期望值函数能够被一个无偏的模拟数 (Simulator) 代替, 并且该模拟数独立于观测值, 那么由模拟所引入的偏差就能被大数定理 (The law of large numbers) 所控制, 这就是模拟矩的基本思想。所以模拟矩方法避免了对复杂期望值函数的计算, 而用一个渐进的模拟值进行代替。

我们将应用模拟矩的思想估计  $FV$  模型的参数并对之进行检验。为估计模型的参数, 最小化利率观测值各阶矩和模拟值各阶矩的差值:

$$\min([M_o]-[M_s]) \quad (2-13)$$

其中： $M_o$ 是利率观测值的前四阶矩向量，即均值、方差、偏度和峰度。

$M_s$ 是利率模拟值的前四阶矩向量。

利率观测值即现实的利率曲线，真正的利率曲线是由各种期限的零息票债券的利率组成。由于我国市场的零息票债券很少，因此，我们采用 Mc.Culloch (1971,1975) 的多项式样条函数对利率期限结构进行估计。

### (三) 数据的确定和选取

本节同样选择银行间 7 天回购利率作为短期利率和上海证交所交易的债券价格数据。

### (四) 条件波动率的计算

FV 模型的第二个重要因子是波动率，本文使用 GARCH (1,1) 对利率每天的条件波动率进行估计。计算时，我们采用观测点的前 253 天<sup>①</sup>数据作为计算依据，即时间窗口为 253 天。比如，为估计 2003 年 7 月 1 日的波动率，则需要用到 2002 年 6 月 12 日到 2003 年 6 月 30 日的 7 天回购利率。

计算时，首先需要将利率  $R_{it}$  进行对数转换，

$$r_{it} = \ln(R_{it}) - \ln(R_{it-1}) \quad (2-14)$$

则  $r_{it}$  的条件方差  $\sigma_{it}^2$  为

$$\sigma_{it}^2 = C + \alpha\sigma_{it-1}^2 + \beta\varepsilon_{it-1}^2$$

常数  $C$  和系数  $\alpha, \beta$  由 GARCH(1,1) 估计得到。

为将  $r_{it}$  的条件方差转换为  $R_{it}$  的条件方差，可以使用 Campbell, Lo and MacKinlay (1997, P15) 的方法。假设  $r_{it}$  是正态分布，并且是独立同分布，那么：

$$r_{it} \sim N(\mu_i, \sigma_{it}^2)$$

而且，

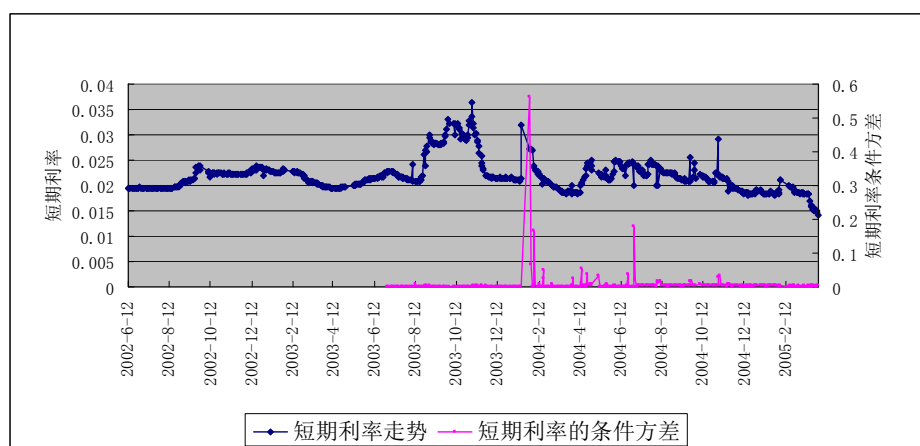
$$\text{var}(R_{it}) = \exp(2\mu_i + \sigma_{it}^2) [\exp(\sigma_{it}^2) - 1] \quad (2-15)$$

这里， $\mu_i$  是  $r_{it}$  无条件均值， $\sigma_{it}^2$  是  $r_{it}$  的条件方差。

<sup>①</sup> 253 天是以一年的大约交易天数估计。

利率条件方差的计算结果如图 2-5。从图中可以看出，计算出的短期利率条件方差对利率走势进行了很好的刻画。利率条件方差从 2003 年 7 月 1 日开始计算。可以看出除了少数几天(在 2004 年 1 月 16 日，利率从 2.15% 跳跃上升到 3.2%，使得这一天的利率条件波动率达到 0.56；2003 年 2 月 4 日，利率条件波动率达到 0.168；在 2004 年 6 月 30 日，利率从 2% 跳跃上升到 2.4%，使得这一天的条件波动率达到 0.18)，利率的条件方差大部分在  $10^{-3}$  和  $10^{-4}$  数量级。

图 2-5 利率走势与利率条件方差图



注：本图为说明和比较的方便，将样本期前 253 天的利率走势也同时画出。

### (五) 蒙特卡罗模拟过程

将式 (2-10)、(2-11) 离散化得到：

$$\Delta r = \alpha(\bar{r} - r) + \sqrt{v}\Delta z_1 \quad (2-15)$$

$$\Delta v = \gamma(\bar{v} - v)\Delta t + \xi\sqrt{v}\Delta z_2 \quad (2-16)$$

其中， $\Delta z_n = \varepsilon_n \sqrt{\Delta t}$ ， $n=1,2$ 。 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  是从相关系数为  $\rho$  的双变量标准正态分布中的随机抽样。

对相关系数的处理，我们这里采用简化的方式处理，即从短期利率和短期利率方差的历史数据中估计两者的相关系数，估计的结果大致为 0.213。

以估计 2003 年 7 月 29 日的未来 3 年利率期限结构，我们来说明 FV 模型的模拟矩估计过程：

- (1) 将 3 年期限分为 36 段，每个月为一个模拟点，用式 (2-15)、(2-16)

模拟出 36 个点的远期瞬时利率，模拟完一次得到瞬时利率的一个路径。共模拟 5000 个路径；

(2) 将远期瞬时利率换算成相应期限的利率，从而模拟出利率曲线；

(3) 计算该利率曲线的一阶、二阶、三阶、四阶矩；

(4) 用多项式拟合估计出 2003 年 7 月 29 日的未来 3 年利率曲线；并计算该曲线的一阶、二阶、三阶、四阶矩；

(5) 计算模拟曲线和多项式拟合曲线相应阶矩的差值，用最优化方法估计五个参数。

(六) 估计结果

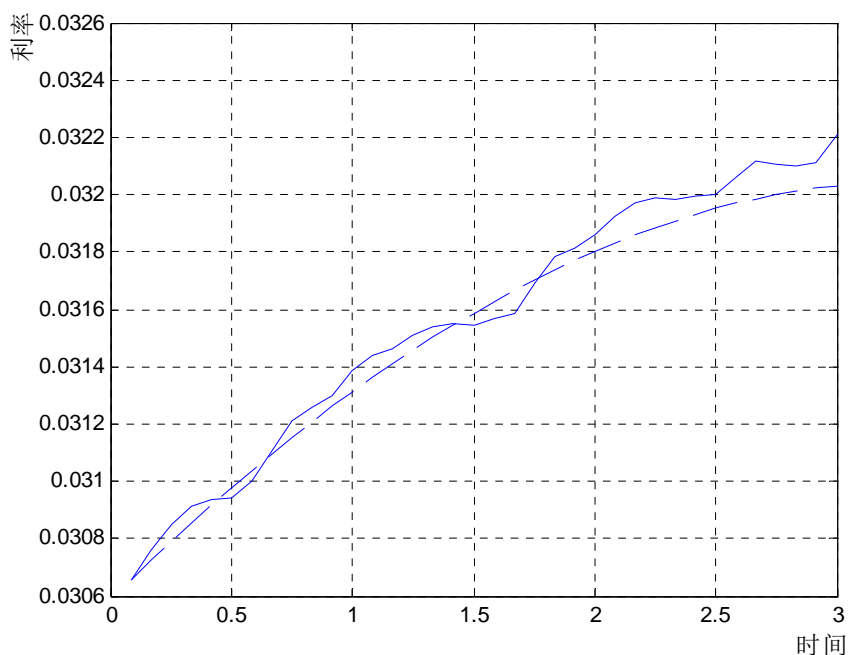
表 2-4 是利用模拟矩估计法估计 2003 年 7 月 29 日的 3 年利率曲线所得到的五个参数以及比较。

表 2-4 模拟矩拟合结果表

多项式拟合的各阶矩：
多项式拟合所得曲线的一阶矩：0.03151
多项式拟合所得曲线的二阶矩：1.8049E-07
多项式拟合所得曲线的三阶矩：-0.51107
多项式拟合所得曲线的四阶矩：2.008
模拟矩法的各阶矩：
模拟矩法所得曲线的一阶矩：0.03161
模拟矩法所得曲线的二阶矩：2.04943E-07
模拟矩法所得曲线的三阶矩：-0.39932
模拟矩法所得曲线的四阶矩：1.9586
参数的估计
$\alpha$ ：2.0828
$\gamma$ ：18.3278
$\xi$ ：-0.00953
$\bar{r}$ ：0.0287
$\bar{v}$ ：0.001151

图 2-6 是利用模拟矩估计方法估计得到的 2003 年 7 月 29 日的 3 年利率曲线与用多项式估计得到的 3 年利率曲线

图 2-6 模拟矩估计曲线与多项式拟合曲线比较



### (七) 模型的比较

为了比较单因素模型 (CIR、Vasicek) 和双因素模型 (FV) 对利率动态描述的准确度, 我们用蒙特卡罗法考察这两个利率模型样本内的估计对样本外数据的拟合度。样本内数据从 2002 年 6 月 12 日到 2003 年 7 月 29 日, 样本外数据从 2003 年 7 月 29 日到 2005 年 3 月 31 日。

比较的过程:

- 1、分别估计两个模型的参数;
- 2、用两个模型分别用蒙特卡罗法预测未来 1 个月内、2 个月内、3 个月内、6 个月内、9 个月 1 年内的每天的短期利率;
- 3、用平均标准差 (RMSE) 进行评估。即先计算模拟的短期利率与市场短期利率的平均标准差, 以标准差的大小作为对利率描述准确度的评价标准, 进行比较分析。

## (八) 单因子模型的估计

先估计 CIR 模型的参数。已经知道 CIR 模型的形式如下：

$$dr = k(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dz \quad (2-17)$$

其中  $k, \mu, \sigma$  均为常数， $dz$  是一个标准维纳过程。因为  $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ ，可以把  $dz$  看作一个均值为 0，方差为  $dt$  的正态变量。于是可以得到：

$$E(dr) = k(\mu - r_t)dt$$

$$\text{var}(dr) = \sigma^2 r_t dt$$

由 K. C. Chan, G. A. Karoyli, F. A. Longstaff and A. B. Sanders (CKLS, 1992)，可用下式 (2-18) 来估计式 (2-17)

$$dr_{t+1} = r_{t+1} - r_t = \alpha + \beta r_t + \varepsilon_{t+1} \quad (2-18)$$

其中：  $E(\varepsilon_{t+1}) = 0$ ,  $E(\varepsilon_{t+1}^2) = \sigma^2 r_t dt$

由式 (2-17) 和式 (2-18) 可得：

$$\alpha = k\mu dt \quad (2-19)$$

$$\beta = -kdt \quad (2-20)$$

由于  $dt$  已知，只要估计出  $\alpha, \beta$ ， $k, \mu$  就可以得到。本文使用最大似然法对这些参数进行估计。

由于：

$$P(dr_{t+1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 r_t dt}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2 r_t dt} (r_{t+1} - r_t - \alpha - \beta r_t)^2\right]$$

那么：

$$\begin{aligned} L(dr_2, dr_2, \dots, \alpha, \beta, \sigma^2) &= P(dr_2)P(dr_2) \cdots P(dr_{t+1}) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2 dt}\right)^{\frac{t}{2}} \prod_{i=1}^t \frac{1}{\sqrt{r_i}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^t \frac{(r_{t+1} - r_t - \alpha - \beta r_t)^2}{r_t dt}\right) \end{aligned}$$

两边取对数，并代入式 (2-19)、(2-20)，得到对数似然函数 (2-21)：

$$\log L = -\frac{t}{2} \log(2\pi) - \frac{t}{2} \log(\sigma^2) - \frac{t}{2} \log(dt) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \log(r_i) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^t \frac{(r_{t+1} - r_t - k\mu dt + kr dt)^2}{r_t dt} \quad (2-21)$$

用 GAUSS 编程（见附录）估计得到：



表 2-5 CIR 模型参数估计

	$k$	$\mu$	$\sigma$
估计值	3.7394	0.021809	0.026016
T 值	2.4622	20.965	23.283

对于 Vasicek，我们用类似的方法可以得到对数似然函数：

$$\log L = -\frac{t}{2} \log(2\pi) - \frac{t}{2} \log(\sigma^2) - \frac{t}{2} \log(dt) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^t \frac{(r_{t+1} - r_t - k\mu dt + kr_t dt)^2}{dt} \quad \text{并可}$$

以得到参数估计结果：

表 2-6 Vasicek 模型参数估计

	$k$	$\mu$	$\sigma$
估计值	4.1184	0.021766	0.003881
T 值	2.5783	23.2575	22.758

比较 CIR 和 Vasicek 模型的参数估计结果，可以看出两个模型的均值回归速度  $k$ 、短期利率长期均值  $\mu$  相差不大，而  $\sigma$  估计值差一个数量级，主要是因为 CIR 模型中的利率波动率为  $\sigma^2 r$ ，而 Vasicek 模型中的利率波动率为  $\sigma^2$ ，两者相差一个利率。如果将 Vasicek 模型中的利率波动率乘以利率，那么两者就几乎一样。因此可以说，CIR 模型与 Vasicek 模型差别不大。因此在接下来的比较中，我们选定 CIR 模型作为单因子模型的代表。

#### （九）比较结果

我们同样以 2003 年 7 月 29 日作为利率估计的起点，用 CIR 模型和 FV 模型分别模拟预测 1 个月、2 个月、3 个月、6 个月、1 年期限内的短期利率动态过程（模拟 10000 次然后取均值），并计算这些利率与实际市场利率的平均标准误差 RMSE（Root Mean Square Error）。RMSE 的计算公式如式（2-22）。比较结果见表 2-8。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_{sim} - r_m)^2} \quad (2-22)$$

其中：

$r_{sim}$  表示模型预测的短期利率，

$r_m$  表示实际的市场短期利率。

表 2-7 CIR 模型与 FV 模型的蒙特卡罗模拟结果表

	CIR 模型	FV 模型
1 个月	0.0023270	0.0021876
2 个月	0.0049075	0.0040064
3 个月	0.0071418	0.0058286
6 个月	0.0052667	0.0053652
9 个月	0.0044948	0.0045012
1 年	0.0039893	0.0040832

从表 2-7 中可以看出：相对而言，在 1 个月、2 个月、3 个月期限内，FV 模型对市场瞬时利率预测的平均标准误差相对较小，而对 6 个月、1 年的期限内，CIR 模型对市场瞬时利率的预测平均标准误差较小，但并不十分明显优于 FV 模型。总的来说，对期限较短的短期利率的预测，FV 模型相对更好；而对 6 个月以上的利率预测，使用 CIR 模型和 FV 模型相差不大，但 CIR 模型相对更简单，计算过程也比 FV 模型简单，因此可以使用 CIR 模型。

分析比较的结果也表明，如果我们对于期限较短的利率产品进行分析研究，那么 FV 模型优于 CIR 模型，但如果我们对于期限为 6 个月以上的利率产品进行分析研究，则 CIR 模型比较适合。

我国现有的含权利率产品主要有，可提前执行的人民币理财产品、可延期金融债券、可回售金融债券、可互换金融债券，在这些利率产品中，其内含的具有利率衍生品性质的条款一般都是规定一年或者一年以后生效。因此，在接下来的对这些部分产品的内含衍生品的性质的分析，本文将以 CIR 模型为分析基础。

## 第三章 含权债券定价——有限差分法

在本章中，将在第二章分析的基础上，使用 CIR 模型分析如何用有限差分法对债券及其含权产品进行定价。首先我们先对有限差分法进行介绍。

### 第一节 有限差分法

自从 Black-Scholes 在 1973 年发现 B-S 微分方程以来，该方程已经被用作为各种各样期权的标准定价公式。对一些期权（比如欧式期权），在得到关于期权价值的偏微分方程后，可以得到精确的解析解。但是，在很多情况下，特别是一些新的奇异期权，期权价值的解析解很难得到。于是在这种情况下，人们转向采取数值法为期权定价，已有的方法包括：约简方程（Reduction of equation to a simpler form）（Wilmott,1993）、二叉树（Binomial）和三叉数（Trinomial）方法（Cox,1979）、蒙特卡罗(Monte Carlo Simulation)(Boyle,1977)模拟法、傅立叶转换约简法<sup>①</sup>（Carr,1998）和有限差分(Finite Difference Methods)法。五种方法中最常见的是树法、蒙特卡罗法和有限差分法。如果期权的收益依赖于标的变量所遵循的历史路径<sup>②</sup>时，或是期权的价值取决于多个标的变量，特别是多于 3 个变量时，蒙特卡罗法就比较适用。如果期权可以提前执行，那么用二叉树法或者有限差分法比较合适。有限差分法与二叉树法相似，但是有限差分法更具有一般性，而且在数学中现已出现很多改进有限差分算法的技术，使其运算速度更快，更准确。因此，本章注重基于有限差分法的分析。

早期有限差分法主要用于理论和应用工程领域，比如流体力学，化学工程，电子工程等等。后来由于许多金融衍生品都可以得到偏微分方程（PDE），因此从 Brennan and Schwartz（1977）开始，许多金融领域的学者和行业工作者试图尝试用有限差分法来近似解偏微分方程，并已经受到越来越多地欢迎。

有限差分法的基本思想就是：用离散的差分代替偏微分方程中连续的偏导数，然后在每一个节点解相应的方程组或是矩阵，之后再连续迭代计算得出最后

<sup>①</sup> Duffy, Daniel J., 'Robust and Accurate Finite Different Methods in Option Pricing One Factor Models'.

<sup>②</sup> 近期还有学者将有限元（Finite Element）法引入到期权定价中。如 Zhu and Stroke(1999)使用有限元法对一些路径依赖型奇异期权进行定价。有限元法于有限差分法有一点类似，但又存在相当不同。

的解。

我们以不支付红利股票的期权为例说明有限差分法的基本思路：

假设标的资产  $S$  遵循的过程为：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

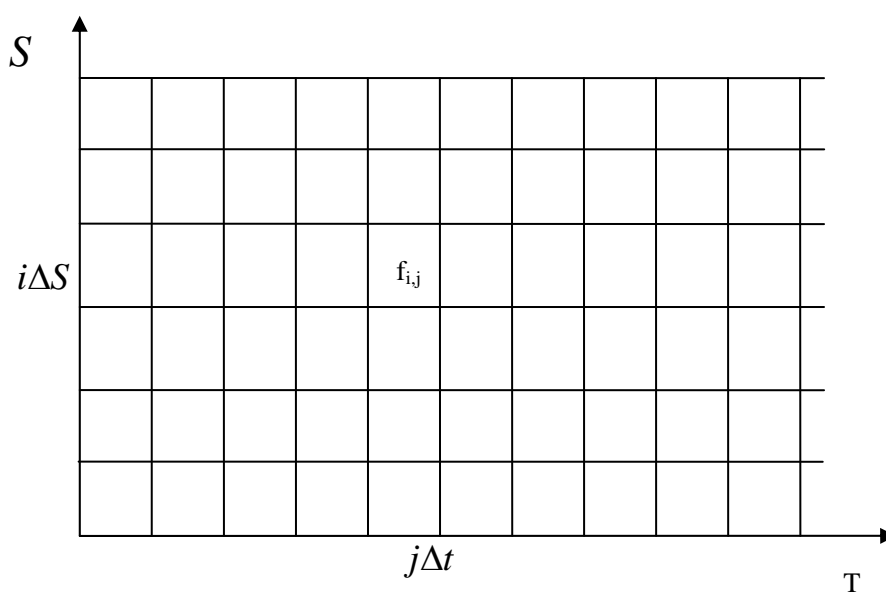
$f$  是以不付红利股票  $S$  为标的资产的期权价格，其满足以下：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \beta(S,t) \frac{\partial f}{\partial S} + \alpha(S,t) \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - \gamma(S,t) = 0 \quad (3-1)$$

其中， $\alpha(S,t) = (\sigma S)^2 / 2$ ， $\beta(S,t) = rS$ ， $\gamma(S,t) = rf$ ， $\sigma$  是标的资产价格的波动率， $r$  是无风险收益率。

有限差分法对衍生证券所满足的连续偏微分方程 (3-1) 进行离散近似，然后得到一系列公式，之后用迭代法逼近求解，进而得出  $f(S,t)$ 。见图 3-1，竖轴表示股票价格的变化，等分为  $N$  部分，变化的单位为  $\Delta S = \frac{S}{N}$ 。横轴表示时间的变化，等分为  $M$  段，变化的单位为  $\Delta t = \frac{T}{M}$ 。划分完后，点  $(i, j)$  对应股票价格  $i\Delta S$  和  $j\Delta t$  时刻。而每个格点的  $f(i, j)$  表示期权的价值  $f(S,t) = f_{i,j}$ 。增加空间划分密度  $N$  和时间划分密度  $M$  都会增加计算的精度。

图 3-1 有限差分示意图



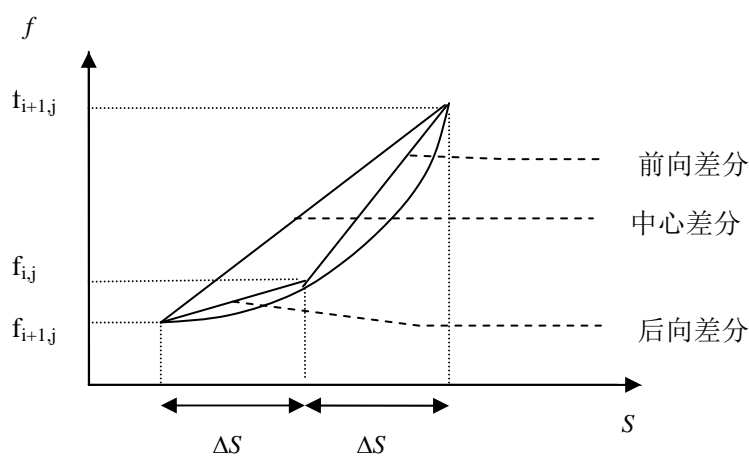
竖轴上的某个格点就对应股票现在的价格，在这个格点上求出的期权价值  $f_{0,j}$  就是通过有限差分法得到的期权价格。

有限差分的方法有多种，最常见的有显性差分法、隐性差分法和克朗可一尼科尔森（Crank-Nicholson）法。显性差分法和隐性差分法，其基本原理都是对偏微分方程的偏导数进行差分近似，但是计算的反向不同。隐性差分法是从时刻  $j$  向时刻  $j(1+\Delta t)$  推算，而显性差分法则是从时刻  $j(1+\Delta t)$  向时刻  $j$  推算。克朗可一尼科尔森则是综合显性和隐性两种差分法平均求解。

### 一、显性差分法

有限差分法要对方程（3-1）中的导数项进行近似。导数项  $\frac{\partial f}{\partial S}$  有三种近似方法：前向差分、后向差分、中心差分。如图 3-2：

图 3-2 三种不同的差分近似



三种差分虽然都是针对  $j(\Delta t)$  时刻进行的差分，但是三种差分近似的误差不同。前向差分近似和后向差分近似误差均为  $\Delta S$  的高阶项，而中心差分的误差这是  $\Delta S^2$  的高阶项，精确度更高。因此在计算中对  $\frac{\partial f}{\partial S}$  主要采用中心差分近似。

总的来说，显性有限差分方法的差分近似是：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial S} &\sim \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta S} \\
\frac{\partial f}{\partial t} &\sim \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &\sim \frac{\left( \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta S} - \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta S} \right)}{\Delta S} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2}
\end{aligned} \tag{3-2}$$

将式 (3-2) 代入偏微分方程 (3-1) 可以得到差分方程 (推导过程见附录 H):

$$a_{i,j}f_{i,j-1} + b_{i,j}f_{i,j} + c_{i,j}f_{i,j+1} = f_{i+1,j}$$

其中:

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= \frac{\sigma_{i,j}^2 i^2}{2} \Delta t - \frac{r_{i,j} i}{2} \Delta t \\
b_{i,j} &= 1 + r_{i,j} \Delta t + \sigma_{i,j}^2 i^2 \Delta t \\
c_{i,j} &= -\frac{r_{i,j} i}{2} \Delta t - \frac{\sigma_{i,j}^2 i^2}{2} \Delta t
\end{aligned}$$

## 二、隐性差分法

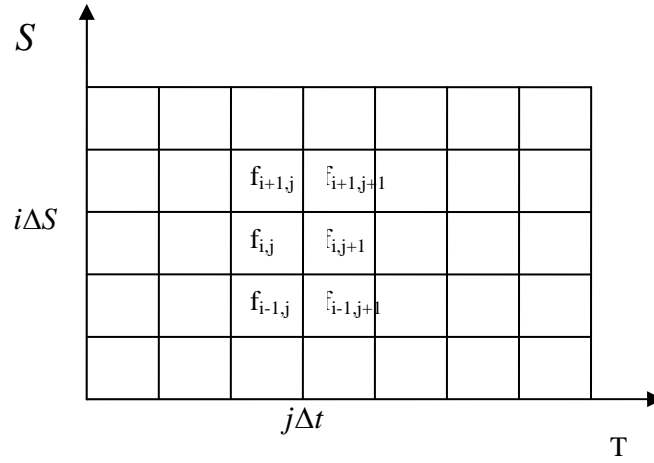
隐性差分与显性的不同在:

$$\begin{aligned}
\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}}{2\Delta S} &\approx \frac{\partial f}{\partial S} \\
\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t} &\approx \frac{\partial f}{\partial t} \\
\frac{\left( \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1}}{\Delta S} - \frac{f_{i,j+1} - f_{i-1,j+1}}{\Delta S} \right)}{\Delta S} &= \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i,j+1}}{\Delta S^2} \approx \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}
\end{aligned}$$

## 三、克朗可—尼科尔森 (Crank-Nicholson) 法

克朗可—尼科尔森 (Crank-Nicholson) 法的基本思想是显性差分法和隐性差分法进行平均, 因此在差分图中每个方程要用到 6 个点 (如图 3-3)。

图 3-3 克朗可—尼科尔森有限差分示意图



对偏微分方程中偏导数的离散近似如下：

$$f_x(x_i, t_i) \sim \frac{\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}}{2\Delta x} + \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}}{2}$$

$$= \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{4\Delta x}$$

$$f_t \sim \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t}$$

$$f_{xx}(x_i, t_j) \sim \frac{\frac{f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i,j+1}}{\Delta S^2} + \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2}}{2}$$

$$= \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{2(\Delta x)^2}$$

将三个近似式子代入偏微分方程 (3-1) (推导过程见附录 I)：

可以得到：

$$a_{i,j}f_{i-1,j} + b_{i,j}f_{i,j} + c_{i,j}f_{i+1,j} = -a_{i,j}f_{i-1,j+1} + b_{i,j}^*f_{i,j+1} - c_{i,j}f_{i+1,j+1} \quad (3-3)$$

其中：

$$\begin{aligned}
 a_{i,j} &= -\frac{rS}{4\Delta S} + \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} \\
 b_{i,j} &= -\frac{r_{i,j}}{2} - \frac{1}{\Delta t} - \frac{(\sigma S)^2}{2(\Delta S)^2} \\
 c_{i,j} &= \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} + \frac{rS}{4\Delta S} \\
 b_{i,j}^* &= -\frac{1}{\Delta t} + \frac{r_{i,j}}{2} + \frac{(\sigma S)^2}{2(\Delta S)^2}
 \end{aligned}$$

得到偏微分方程后，再根据边界条件，联立求解方程组，就可以得到  $j(\Delta t)$  时刻股票价格为  $i(\Delta S)$  时的期权价值。

克朗可—尼科尔森相对于显性差分 and 隐性差分具有更好的稳定性和收敛性。

## 第二节 含权债券的定价——有限差分法

所谓含权债券是指在条款中嵌入一些具有期权、远期、互换等衍生品性质的债券。这些条款的存在使投资者可以在债券存续期内根据市场利率状态、债券价格走势对债券投资做相应的调整。

由于债券中所含的衍生品的价格依赖于债券本身的价格，因此，如果要确定债券中衍生品的价格，则首先需要对债券本身进行定价。本部分的内容将首先分析如何用有限差分法对债券进行定价。在此基础上，给出如何用有限差分法对债券中的期权进行定价。

有限差分法的关键是要得到如式 (3-1) 的资产价格微分方程。由于债券的价格是利率  $r$  和时间  $t$  的函数。因此实际上债券的价格也可以看成以利率为标的变量的衍生证券，只不过这时的利率不象股票或者商品一样可以交易。

### 一、债券价格满足的偏微分方程

我们已经知道，如果变量  $x$  满足伊藤过程且

$$dx = u(x,t)dt + \sigma(x,t)dz \quad (3-4) 2$$

那么，关于变量  $x$  和时间  $t$  的函数  $f(x,t)$  也是伊藤过程，且



$$df = \left[ f_t(x,t) + f_x(x,t)\mu(x,t) + \frac{1}{2} f_{xx}(x,t)\sigma(x,t)^2 \right] dt + f_x(x,t)\sigma(x,t) dz \quad (3-5)$$

令  $G = f(x,t)$ ，写成简洁形式：

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} \sigma dz$$

因此，如果利率的过程为：

$$dr = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dz$$

那么，债券的价格是利率和时间的函数  $B(r,t)$ ，因此也是伊藤过程：

$$dB = \left( \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial B}{\partial x} \sigma dz \quad (3-6)$$

那么债券的价格就可以通过求解式 (3-6) 得到。但式 (3-6) 不一定都有解析解。于是我们希望找出债券价格的偏微分方程，然后如同求解不付红利的期权价格那样用数值法进行求解。

为得到含息债券的价格，我们可以先计算将含息债券进行本息分离，将本金当作零息票债券进行定价，同时也可以将利息当作零息票债券进行定价，只不过这时的面值为单期利息。因此我们只需要得到零息票债券价格的偏微分方程，那么就可以对含息债券及债券期权进行定价。

为得到零息票债券价格的偏微分方程，可以有两种方法，无套利法和柯西法<sup>①</sup>。

### (一) 无套利法

无套利法的推导过程与 B—S 公式的无套利推导过程相似，都是通过建立一个无套利组合，在经过瞬时时间  $\Delta t$  后，获取无风险收益，然后得到偏微分方程。

假设零息票债券的价格为：

$$B(t,T) = B(t,T,r) \quad (3-7)$$

对式 (3-7) 应用伊藤引理展开

<sup>①</sup>债券及利率衍生产品价格的另一种推导，见：李和金、李湛和李为冰（2002），“非参数利率期限结构模型的理论及实证研究”，《数量经济技术经济研究》2002年第2期。

$$\begin{aligned}
 dB &= \left[ \frac{\partial B}{\partial T} + \mu \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right] dt + \frac{\partial B}{\partial r} \sigma dz \\
 &= \mu_B B dt + \sigma_B B dz
 \end{aligned} \tag{3-8}$$

我们用两种零息票债券  $B_1$ 、 $B_2$  构造一个资产组合  $P = B_1 + \varphi B_2$ 。

为使该资产组合对利率的风险为零，即  $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$ 。我们有：

$$\frac{\partial B_1}{\partial r} + \varphi \frac{\partial B_2}{\partial r} = 0$$

因此可以得到：

$$\varphi = - \frac{\frac{\partial B_1}{\partial r}}{\frac{\partial B_2}{\partial r}} \tag{3-9}$$

由于：  $dP = dB_1 + \varphi dB_2$

所以，

$$\begin{aligned}
 dP &= \left[ \frac{\partial B_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial B_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} \right] dt + \frac{\partial B_1}{\partial r} \sigma dz \\
 &\quad + \varphi \left[ \frac{\partial B_2}{\partial t} + \mu \frac{\partial B_2}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2} \right] dt + \varphi \frac{\partial B_2}{\partial r} \sigma dz \\
 &= \left[ \frac{\partial B_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial B_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} \right] dt + \varphi \left[ \frac{\partial B_2}{\partial t} + \mu \frac{\partial B_2}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2} \right] dt
 \end{aligned}$$

由于该组合是无风险的，因此瞬时时间内  $\Delta t$ ，其组合收益率等于无风险收益率：

$$\frac{dP}{P} = r dt \tag{3-10}$$

也等于：

$$\left[ \frac{\partial B_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial B_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} \right] + \varphi \left[ \frac{\partial B_2}{\partial t} + \mu \frac{\partial B_2}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2} \right] = r (B_1 + \varphi B_2) \quad \text{因}$$

此：

$$\varphi = -\frac{\frac{\partial B_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial B_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} - rB_1}{\frac{\partial B_2}{\partial t} + \mu \frac{\partial B_2}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2} - rB_2}$$

由式 (3-9), 我们可以得到

$$-\frac{\frac{\partial B_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial B_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} - rB_1}{\frac{\partial B_2}{\partial t} + \mu \frac{\partial B_2}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2} - rB_2} = -\frac{\frac{\partial B_1}{\partial r}}{\frac{\partial B_2}{\partial r}}$$

因此,

$$\frac{\frac{\partial B_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial B_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} - rB_1}{\frac{\partial B_1}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial B_2}{\partial t} + \mu \frac{\partial B_2}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2} - rB_2}{\frac{\partial B_2}{\partial r}} \quad (3-11)$$

利用式 (3-8) 的定义, 同时将式 (3-11) 两边同时除以  $\sigma$ , 我们可以得到:

$$\lambda = \frac{\mu_{B_1} - r}{\sigma_{B_1}} = \frac{\mu_{B_2} - r}{\sigma_{B_2}} \quad (3-12)$$

$$\mu_B - r = \lambda \sigma_B \quad (3-13)$$

可以看出  $\lambda$  就是我们经常看到的风险价格。由式 (3-12), 可以得到, 在特定的时间内, 风险价格是个不变的参数。 $\mu_B - r$  是债券投资的超额收益,  $\sigma_B$  是债券的波动性, 衡量债券投资的风险。

因此我们可以得到:

$$\frac{\frac{\partial B}{\partial t} + \mu \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - rB}{\frac{\partial B}{\partial r}} = \lambda \sigma_B$$

从而零息票债券满足的偏微分方程是:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + (\mu - \lambda \sigma_B) \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} = rB$$

写成简洁形式:  $B_t + (\mu - \lambda \sigma_B) B_r + \frac{1}{2} \sigma^2 B_{rr} = rB$

当风险价格为零时,  $B_t + \mu B_r + \frac{1}{2} \sigma^2 B_{rr} = rB$

其边界条件:  $B(r, T) = 1$

## (二) 柯西法

柯西法就是直接使用柯西问题的结果得到偏微分方程。

柯西 (Cauchy) 问题: 解的惟一性是由初值 (或边值) 而不是由积分常数决定的。用数学形式表达就是: 给定在  $\mathbb{R} \times [0, T]$  上取实数的函数  $r$ 、 $g$ 、 $h$ 、 $\mu$  和  $\sigma$ , 并且在  $C^2$ , ( $\mathbb{R} \times [0, T]$  中), 可以找出满足下列方程的函数  $f$ :

$$\nabla f - r(x, t)f(x, t) + h(x, t) = 0 \quad (3-14)$$

其中,  $\nabla f = f_t(x, t) + f_x(x, t)\mu(x, t) + \frac{1}{2}\sigma(x, t)^2 f_{xx}(x, t)$

其边界条件是:  $f(x, T) = g(x, T)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

式 (3-14) 是一个一般公式。如果  $f$  是期权价格,  $r(x, t)$  是无风险利率  $r$ , 变量  $x$  是股票价格  $S$ ,  $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ , 并且不付红利, 那么  $h(x, t) = 0$ , 则式 (3-14) 就变为式 (3-1)。

对债券来说, 我们则可以把式 (3-14) 看成在时间  $t$  的付息率为  $h(x, t)$  和在时间  $T$  的终值为  $g(x, T)$  的债券的价格。如果是一个计量单位的零息票债券, 则期中不付利息, 到期的终值为 1。于是式 (3-14) 就变为:

$$\left[ f_t(x, t) + f_x(x, t)\mu(x, t) + \frac{1}{2}\sigma(x, t)^2 f_{xx}(x, t) \right] - r(x, t)f(x, t) = 0 \quad (3-15)$$

边界条件为:  $f(x, T) = 1$ 。

令  $B = f(x, t)$ , 并且利率  $r(x, t)$  本身就是状态变量  $x$ 。去掉下标, 式 (3-15) 简洁写成:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}\sigma^2 = rB \quad (3-16)$$

边界条件是:  $B(r, T) = 1$ 。

那么  $B(t)$  就是到期时间为  $T - t$  的零息票债券在时间  $t$  的价格。

## (三) 状态变量的转换

求解以上偏微分方程首先会碰到定义域的无界性, 我们可以将变量值定义为很大的一个值, 然后由该值得出边界条件。但是该方法对变量的取值具有主观性,

因此我们需要对变量的转换来将无界变量转换为有界变量。

偏微分方程 (3-16) 的状态变量为  $r$ ，虽然  $r$  在一般情况下小于 1，但从理论上来说  $r \in [0, \infty)$ ，因此  $r$  没有右边界，而无界状态变量不易划分，需将状态变量进行转换：

$$Y(r) = \frac{1}{1 + \gamma r} \quad (3-17)$$

其中  $\gamma > 0$ 。

经过转换，利率  $r$  对应于新的状态变量  $y = Y(r)$ ，新状态变量  $y \in (0, 1]$ 。这样在有限差分的网格中状态变量的划分就从对  $[0, \infty)$  划分变为对  $(0, 1]$  的划分，划分的密度与  $\gamma$  有关。

由式 (3-17)，我们可以把利率写成新状态变量  $y$  的函数，即：

$$r = \frac{1 - y}{\gamma y}, \quad y \in (0, 1] \quad (3-18)$$

令对所有的  $y$  和  $t$ ，有债券价格函数  $\hat{B}(y, t) = B(r, t)$ ，那么式 (3-16) 就可以写成：

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{B}^2}{\partial y} \hat{\mu}(y, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{B}}{\partial y^2} \hat{\sigma}(y, t)^2 = r(y) \hat{B} \quad (3-19)$$

边界条件： $\hat{B}(y, T) = 1$

其中，上式运用伊藤公式，可得：

$$\hat{\mu}(y, t) = Y'(r) \mu(r, t) + \frac{1}{2} Y''(r) \sigma(r, t)^2 \quad (3-20)$$

$$\hat{\sigma}(y, t) = Y'[r] \sigma[r, t]$$

于是，就可以用有限差分法对式 (3-19) 求解时间为  $t$ 、即期利率为  $r(t)$  时的零息票债券价格。

#### (四) CIR 模型下状态标量的转换

如果我们用 CIR 模型描述利率的动态过程，即：

$$dr_t = k(\bar{r} - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

其中， $k$  是利率调整的速度， $\bar{r}$  是利率长期均值， $C$  是利率波动率的参数。

那么此时：

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu} &= \gamma y^2 k(\mu - r) + \gamma^2 y^3 r \sigma^2 \\
 &= -\gamma \frac{1}{(1 + \gamma r)^2} k(\mu - r) + \gamma^2 \frac{1}{(1 + \gamma r)^3} r \sigma^2 \\
 \hat{\sigma} &= -\gamma y^2 \sigma \sqrt{r} \\
 &= -\gamma \frac{1}{(1 + \gamma r)^2} \sigma \sqrt{r}
 \end{aligned} \tag{3-21}$$

变量状态的转换方法从理论上来说具有一般性，但在实践中，由于利率的波动范围有限，利率一般不会达到无穷大。因此，我们在用计算机编程时，也可以不采用变量转换的方法（本文附录 G 中的程序使用了变量转换法），直接用一个比较大的值（比如利率为 200%）作为利率变动的上界，然后计算在该上边界上的债券价值，得到债券微分方程的上边界值。

## 二、克朗可—尼科尔森法有限差分计算债券价格

我们已经在前面给出了如何用克朗可—尼科尔森有限差分法计算股票期权价值。对零息票债券及债券期权的价格计算与股票期权价值计算相类似。

此时债券价格偏微分方程偏导数的近似式为：

$$\begin{aligned}
 B_r(r_i, t_i) &\sim \frac{B_{i+1, j+1} - B_{i-1, j+1} + B_{i+1, j} - B_{i-1, j}}{4\Delta r} \\
 B_t &\sim \frac{B_{i, j+1} - B_{i, j}}{\Delta t} \\
 B_{rr}(r_i, t_j) &\sim \frac{B_{i+1, j+1} - 2B_{i, j+1} + B_{i-1, j+1} + B_{i+1, j} - 2B_{i, j} + B_{i-1, j}}{2(\Delta r)^2}
 \end{aligned}$$

代入 (3-16)，得到

$$a_{i, j} B_{i-1, j} + b_{i, j} B_{i, j} + c_{i, j} B_{i+1, j} = -a_{i, j} B_{i-1, j+1} + b_{i, j}^* B_{i, j+1} - c_{i, j} B_{i+1, j+1} \tag{3-22}$$

其中：

$$\begin{aligned}
 a_{i,j} &= -\frac{\mu(r_i, t_j)}{4\Delta r} + \frac{\sigma(r_i, t_j)^2}{4(\Delta r)^2} \\
 b_{i,j} &= -\frac{r_{i,j}}{2} - \frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma(r_i, t_j)^2}{2(\Delta r)^2} \\
 c_{i,j} &= \frac{\sigma(r_i, t_j)^2}{4(\Delta r)^2} + \frac{\mu(r_i, t_j)}{4\Delta r} \\
 b_{i,j}^* &= -\frac{1}{\Delta t} + \frac{r_{i,j}}{2} + \frac{\sigma(r_i, t_j)^2}{2(\Delta r)^2}
 \end{aligned}
 \quad \text{其中, } \begin{cases} i \in \{2, 3, \dots, N-1\} \\ j \in \{2, 3, \dots, M-1\} \end{cases}$$

如果利率的过程如 CIR 模型所述, 那么:

$$\begin{aligned}
 a_{i,j} &= -\frac{A(\bar{r} - r_i)}{4\Delta r} + \frac{C^2 r_i}{4(\Delta r)^2} \\
 b_{i,j} &= -\frac{r_{i,j}}{2} - \frac{1}{\Delta t} - \frac{C^2 r}{2(\Delta r)^2} \\
 c_{i,j} &= \frac{C^2 r}{4(\Delta r)^2} + \frac{A(\bar{r} - r_i)}{4\Delta r} \\
 b_{i,j}^* &= -\frac{1}{\Delta t} + \frac{r_{i,j}}{2} + \frac{C^2 r}{2(\Delta r)^2}
 \end{aligned}$$

经过变量的状态转换, 利率过程为 CIR 模型的债券价格近似方程为:

$$\hat{a}_{i,j} B_{i-1,j} + \hat{b}_{i,j} B_{i,j} + \hat{c}_{i,j} B_{i+1,j} = -\hat{a}_{i,j} B_{i-1,j+1} + \hat{b}_{i,j}^* B_{i,j+1} - \hat{c}_{i,j} B_{i+1,j+1} \quad (3-23)$$

$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{b}^*$  分别为:

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_{i,j} &= -\frac{\hat{\mu}}{4\Delta y} + \frac{\hat{\sigma}_i^2}{4(\Delta y)^2} \\
 \hat{b}_{i,j} &= -\frac{r_{i,j}}{2} - \frac{1}{\Delta t} - \frac{\hat{\sigma}_i^2}{2(\Delta y)^2} \\
 \hat{c}_{i,j} &= \frac{\hat{\sigma}_i^2}{4(\Delta y)^2} + \frac{\hat{\mu}}{4\Delta y} \\
 \hat{b}_{i,j}^* &= -\frac{1}{\Delta t} + \frac{r_{i,j}}{2} + \frac{\hat{\sigma}_i^2}{2(\Delta y)^2}
 \end{aligned}$$

其中:

$$i \in \{2, 3, \dots, N-1\}$$

$$j \in \{2, 3, \dots, M-1\}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= -\gamma y^2 A(\bar{r} - r) + \gamma^2 y^3 r C^2 \\ &= \frac{-\gamma}{(1+\gamma r)^2} A(\bar{r} - r) + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma r)^3} C^2 r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= -\gamma y^2 C \sqrt{r} \\ &= \frac{-\gamma}{(1+\gamma r)^2} C \sqrt{r}\end{aligned}$$

### 三、边界条件的确定

经过状态的转换, 利率为无穷大时零息票债券价格对应的上边界值变为新的状态变量的下边界值, 而利率为零时零息票债券价格对应的下边界值变为上边界值。

(一) 新状态变量下债券价格的上边界值

当  $i = N$  时, 利率  $r$  为 0,  $y=1$ ,  $\sigma(0,1) = C\sqrt{r} = 0$ 。

由式 (3-16) 可以得到:

$$B_t + B_r \mu = 0 \quad (3-24)$$

按照克朗可-尼科尔森方法,

$$B_r(r_N, t_j) \sim \frac{B_{N+1,j+1} - B_{N-1,j+1} + B_{N+1,j} - B_{N-1,j}}{4\Delta r},$$

但是由于处于边界, 不存在  $B_{N+1,j}$ 。此时  $B_r(r_N, t_j)$  的近似采用:

$$B_r(r_N, t_j) \sim \frac{B_{N,j} - B_{N-1,j}}{\Delta r}$$

同时将上式和  $B_t \sim \frac{B_{N,j+1} - B_{N,j}}{\Delta t}$  代入 (3-24), 得到

$$\frac{B_{N,j+1} - B_{N,j}}{\Delta t} + \frac{B_{N,j} - B_{N-1,j}}{\Delta r} \mu_{N,j} = 0$$

经过化简:

$$-\frac{\mu_{N,j}}{\Delta r} B_{N-1,j} + \left( -\frac{1}{\Delta t} + \frac{\mu_{N,j}}{\Delta r} \right) B_{N,j} = -\frac{1}{\Delta t} B_{N,j+1}$$

因此:  $a_{N,j} B_{N-1,j} + b_{N,j} B_{N,j} = c_{N,j} B_{N,j+1}$



$$\text{其中: } a_{N,j} = -\frac{\mu_{N,j}}{\Delta r}$$

$$b_{N,j} = -\frac{1}{\Delta t} + \frac{\mu_{N,j}}{\Delta r}$$

$$c_{N,j} = -\frac{1}{\Delta t}$$

(二) 新状态变量下债券价格的下边界值

新状态变量的下界即  $y=0$ ，那么这时  $r=+\infty$ ，这是我们可以知道，债券的价格为零。我们取  $a_{1,j}=0$ ， $b_{1,j}=1.0$ ， $c_{1,j}=0$ 。

得到：

$$b_{1,j}B_{1,j} + c_{1,j}B_{2,j} = 0$$

(三) 新状态变量下债券价格的右边界值

零息票债券到期时都是按面值返还，因此到期时，债券的价格就是债券的面值。

偏微分方程的三个边界值确定后，我们就有  $N$  个方程来解  $N$  个变量。

我们已经得到：

$$\hat{a}_{i,j}B_{i-1,j} + \hat{b}_{i,j}B_{i,j} + \hat{c}_{i,j}B_{i+1,j} = -\hat{a}_{i,j}B_{i-1,j+1} + \hat{b}_{i,j}^*B_{i,j+1} - \hat{c}_{i,j}B_{i+1,j+1}$$

在  $j$  时刻，将 (3-22) 式展开，令：

$$A_j = \begin{bmatrix} b_{1,j} & c_{1,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,j} & b_{2,j} & c_{2,j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,j} & b_{3,j} & c_{3,j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,j} & b_{4,j} & c_{4,j} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N-1,j} & a_{N-1,j} & c_{N-1,j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N,j} & b_{N,j} \end{bmatrix}$$

$$X_j = \begin{bmatrix} B_{1,j} \\ B_{2,j} \\ B_{3,j} \\ B_{4,j} \\ \vdots \\ B_{N-1,j} \\ B_{N,j} \end{bmatrix}$$

$$D_j = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{a}_{2,j}B_{1,j+1} + \hat{b}_{2,j}^*B_{2,j+1} - \hat{c}_{2,j}B_{3,j+1} \\ -\hat{a}_{3,j}B_{2,j+1} + \hat{b}_{3,j}^*B_{3,j+1} - \hat{c}_{3,j}B_{4,j+1} \\ -\hat{a}_{4,j}B_{3,j+1} + \hat{b}_{4,j}^*B_{4,j+1} - \hat{c}_{4,j}B_{5,j+1} \\ \vdots \\ -\hat{a}_{N-1,j}B_{N-2,j+1} + \hat{b}_{N,j}^*B_{N-1,j+1} - \hat{c}_{N,j}B_{N,j+1} \\ \hat{c}_{N,j} \end{bmatrix}$$

于是，我们就可以得到：

$$A_j X_j = D_j$$

$$X_j = A_j^{-1} D_j$$

该方程求解在 MATLAB 软件中很容易就可以实现（见附录 G），将上述过程从最后一个节点开始往后推算，就可以得到 0 时刻的状态变量  $r$  在所有状态下的债券价格。

#### 四、含权债券中欧式期权价值的计算

如果债券中所含的期权是欧式期权，并且可执行时刻为  $k$ ， $0 < k \leq T$ 。那么，必须计算  $k$  时刻时该债券在所有节点上的所含期权价值。

如果是看涨期权，那么：

$$C_{i,k} = \max(B_{i,k} - A_k - S, 0), \quad i = 1, \dots, M$$

其中： $A$  表示截止到  $k$  时刻的应计未付利息；

$S$  表示债券期权的执行价格。

如果是看跌期权，那么：

$$P_{i,k} = \max(S - B_{i,k} + A_k, 0), \quad i = 1, \dots, M$$

然后这些节点上的期权价值同样用上述方法往后推算。

#### 五、含权债券中美式期权价值的计算

如果债券中所含的期权是美式期权，并且可执行时刻为  $l$ ， $0 < l \leq k \leq T$ 。那么在  $l$  时刻，

$$C_{i,l} = \max(CC_{i,l}, (B_{i,l} - A_l - S)), \quad i = 1, \dots, M$$

其中， $CC_{i,l}$ 用克朗可—尼科尔森法有限差分法根据 $l+1$ 时刻 $C_{i-1,l+1}$ ， $C_{i,l+1}$ 和 $C_{i+1,l+1}$ 计算得到的期权价值。

如果是看跌期权，那么：

$$P_{i,l} = \max\left(PP_{i,l}, (S - B_{i,k} + A_k)\right), \quad i = 1, \dots, M$$

以上的计算过程用 MATLAB 编程实现，见附录 G。

## 六、程序的应用

应用该程序时，只要在 MATLAB 命令窗下运行：

```
bond(r_present,y_points,t_points,American_or_European,call_or_put,par,coupon_1,
      coupon_2, strike_price,bond_mat,option_mat,adjust_speed,long_mean,
      volatility_c,gamma)
```

其中，

r_present	表示市场短期利率在现在时刻的值；
y_points	表示将市场短期利率差分的区间数；
t_points	表示将时间期限差分的区间数；
American_or_European,	表示是美式期权还是欧式期权；
call_or_put,	表示是看涨期权还是看跌期权
par	表示债券的面值；
coupon_1	表示票面利率；
coupon_2	表示如果是累进利率，那么表示第二个利率；如果是固定利率，那么 coupon_2 = coupon_1；
strike_price	表示债券期权的执行价格（全价）；
bond_mat	表示债券到期期限；
option_mat	表示债券所含期权的到期期限；
adjust_speed,	表示 CIR 模型的均值调整速度 $\kappa$ ；
long_mean	表示利率的长期均值 $\mu$ ；
volatility_c	表示 CIR 模型中的 $\sigma$ ；
gamma	表示状态变量转换参数 $\gamma$ 。

根据该程序计算得到的债券价格为全价价格。

现在假设有一面值为 100 元的债券，其票面利率为 3.5%，债券期限为 3 年，在 1 年后债券持有人可以以 103.5 ( $=100+3.5$ ) 元的价格回售给债券发行人。如果已经估计得到 CIR 模型的三个参数分别是  $k=12.5$ ,  $\mu=0.28\%$ ,  $\sigma=0.13$ 。如果当前利率为 2.6%，那么由该程序可以计算得到债券价格为 101.89 元，内含的欧式看跌期权的价格为 2.25 元，含权债券总价值为 104.14 元。同时可以得到初始时刻短期利率为任意值的债券价格（全价）及其所含期权的价格，如图 3-4 到图 3-7。其中图 3-6 是债券持续期内，在不同时刻不同利率状态下的债券价格三维图。图 3-7 是内含债券看跌期权执行期内，在不同时刻不同利率状态下的期权价格三维图。

图 3-4 债券在当前时刻的价格

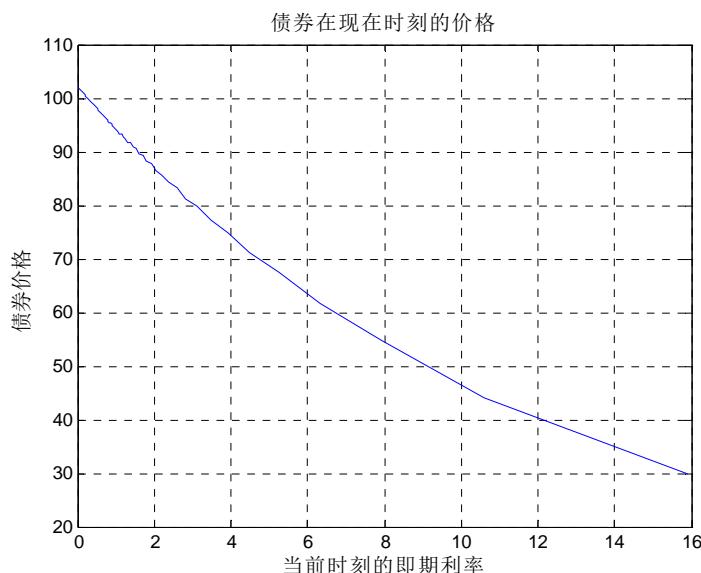


图 3-5 债券看跌期权在当前时刻的价格

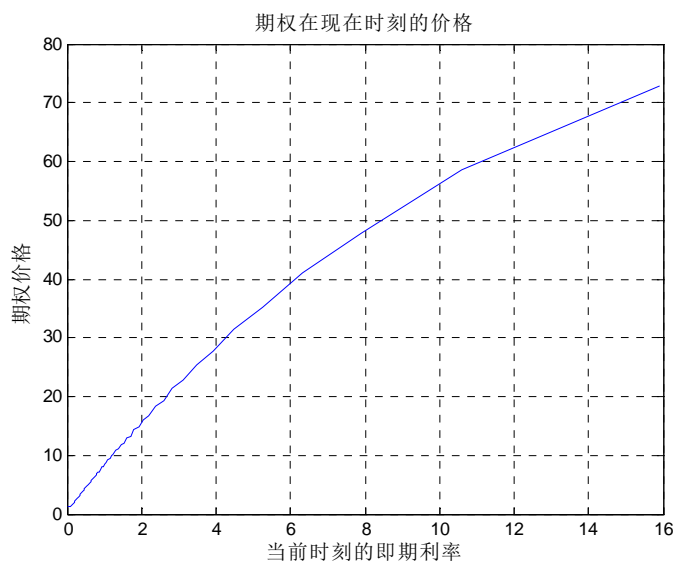


图 3-7 债券的价格

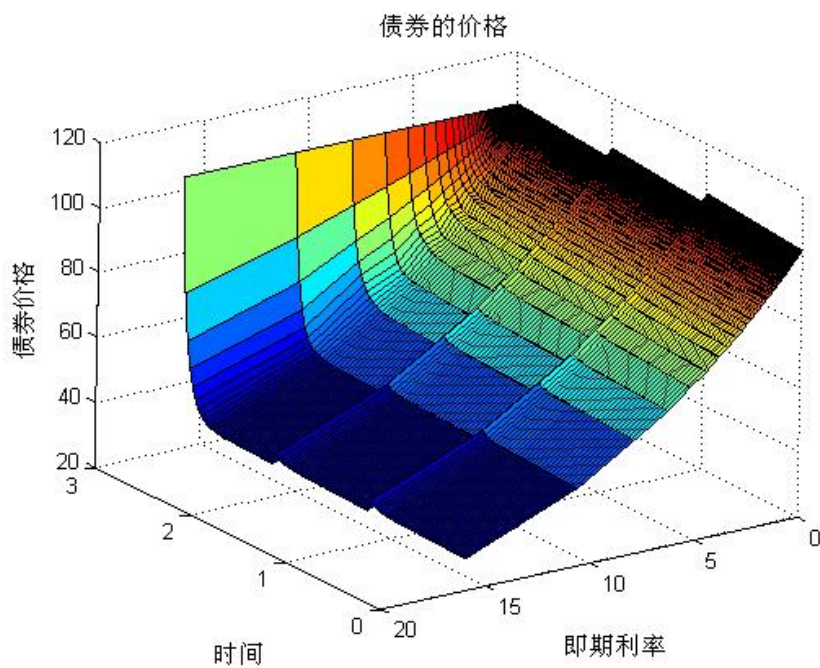
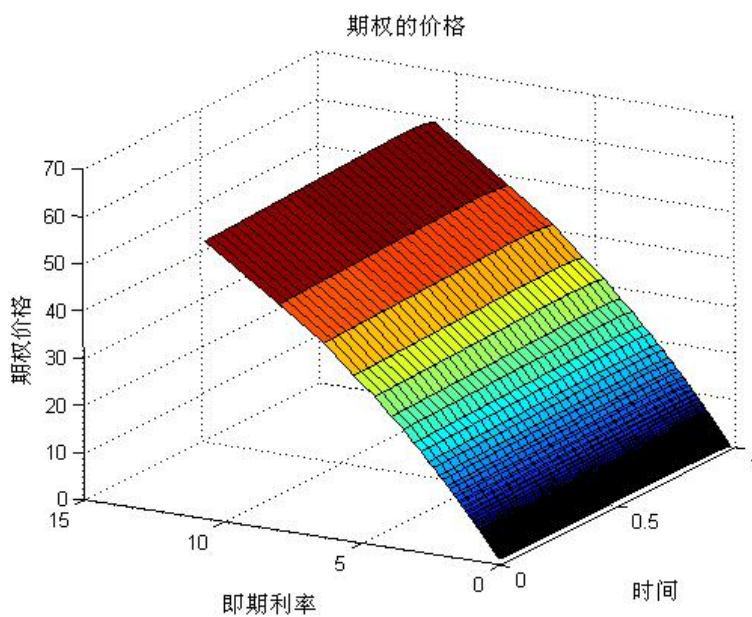


图 3-8 看跌期权的价格



用本文的方法计算 2005 年 3 月 31 日上海证券交易所交易的国债价格，先估计 CIR 模型的参数，如表 3-1。

表 3-1 CIR 模型参数估计

	$k$	$\mu$	$\sigma$
估计值	11.285	0.022091	0.12666
t 值	3.7359	19.276	31.772

根据这些参数计算债券价格，得到的结果如表 3-2。从表中可以看出市场的两个特点。第一个特点，大部分付息债券价格被低估。除了 96 国债（6）、97 国债（4）两只高票面利率债券高估 5.93 元和 1.19 元；04 国债（5）、05 国债（2）两只零息票债券的价格与市场价格接近外，大部分付息债券的价差（=市场价格 - 理论价格）均为负，这表明这些债券在 2005 年 3 月 31 日的价格实际上都被市场低估了。第二个特点是，剩余期限越长的债券其被低估的程度越严重。2005 年 3 月 31 日这天剩余期限最长的债券是 05 国债（1），剩余期限为 9.92 年，被低估了 18.30 元。其次则是 03 国债（8），剩余期限 8.47 年，被低估 15.1 元。

表 3-2 2005 年 3 月 31 日债券理论价格与市场价格比较表

债券名称	1996 记帐 五期国债 (10 年)	1997 记帐 式二期国 债(10 年)	1999 记帐 式五期国 债(8 年)	2001 记帐 式三期国 债(7 年)	2001 记帐 式十期国 债(10 年)	2001 记帐 式十二期 国债(10 年)	2001 记帐 式十五期国 债(7 年)	2002 记帐 式三期国 债(10 年)	2002 记帐 式十期国 债(7 年)	2002 记帐 式十四期国 债(5 年)	2002 记帐 式十五期国 债(7 年)	2003 记帐 式一期国 债(7 年)
债券代码	696	9704	9905	10103	10110	10112	10115	10203	10210	10214	10215	10301
上市日期	1996-7-12	1997-9-25	1999-9-6	2001-5-10	2001-10-11	2001-11-13	2002-1-4	2002-4-29	2002-9-2	2002-11-1	2002-12-16	2003-2-26
发行价格	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
债券期限	10	10	8	7	10	10	7	10	7	5	7	7
计息频率	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次
计息方式	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利
到期日	2006-6-14	2007-9-5	2007-8-20	2008-4-24	2011-9-25	2011-10-30	2008-12-18	2012-4-18	2009-8-16	2007-10-24	2009-12-6	2010-2-19
计算日	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31
剩余期限	1.21	2.43	2.39	3.07	6.49	6.59	3.72	7.05	4.38	2.57	4.69	4.89
票面利率	11.83%	9.78%	3.28%	3.27%	2.95%	3.05%	3%	2.54%	2.39%	2.65%	2.93%	2.66%
理论价格	111.49	117.81	102.54	103.22	104.49	105.16	105.36	102.21	100.75	101.16	103.21	102.16
市场价格	117.42	119.00	101.75	100.00	92.36	92.87	97.79	89.00	94.58	99.14	98.74	96.38
价差	5.93	1.19	-0.79	-3.22	-12.13	-12.29	-7.57	-13.21	-6.17	-2.02	-4.47	-5.78

注：价差 = 市场价格 - 理论价格

表 3-2 2005 年 3 月 31 日债券理论价格与市场价格比较表 (续)

债券名称	2003 记账式七期国债(7年)	2003 年记账式八期国债(10年)	2003 记账式十一期国债(7年)	2004 记账式三期国债	2004 记账式四期国债	2004 记账式五期国债	2004 记账式七期国债	2004 记账式八期国债	2004 记账式十期国债	2004 记账式十一期国债	2005 记账式一期国债	2005 记账式二期国债
债券代码	10307	10308	10311	10403	10404	10405	10407	10408	10410	10411	10501	10502
上市日期	2003-9-1	2003-9-25	2003-12-2	2004-4-30	2004-6-7	2004-6-25	2004-9-6	2004-11-1	2004-12-6	2004-12-24	2005-3-11	2005-3-21
发行价格	100	100	100	100	100	93.76	100	100	100	100	100	97.933
债券期限	7	10	7	5	7	2	7	5	7	2	10	1
计息频率	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	零息债券	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	零息债券
计息方式	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利
到期日	2010-8-20	2013-9-17	2010-11-19	2009-4-19	2011-5-24	2006-6-14	2011-8-24	2009-10-19	2011-11-24	2006-12-14	2015-2-27	2006-3-14
计算日	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31	2005-3-31
剩余期限	5.39	8.47	5.64	4.05	6.15	1.21	6.40	4.56	6.65	1.71	9.92	0.95
票面利率	2.66%	3.02%	3.50%	4.42%	4.89%	0.00%	4.71%	4.30%	4.86%	2.98%	4.44%	0.00%
理论价格	102.36	106.26	106.79	108.64	115.45	97.43	115.04	109.17	116.41	101.32	119.68	97.99
市场价格	94.41	91.16	97.34	103.29	104.28	97.48	103.26	102.36	104.24	100.88	101.38	98.10
价差	-7.95	-15.10	-9.45	-5.35	-11.17	0.05	-11.78	-6.81	-12.17	-0.44	-18.30	0.11



## 第四章 利率模型的实际应用

本章中，我们将用第三章中得出的债券及内含期权的定价方法对人民币理财产品、固定利率含权债券进行分析和定价。

### 第一节 人民币理财产品的分析与定价

#### 一、人民币理财产品推出的背景

人民币理财产品是银行和投资者订立的一份承诺到期还本付息的理财合同，它是一种金融创新产品，不是储蓄。由于人民币理财产品的收益比定期存款高，而风险又相当。因此收到很多投资者的青睐。据统计数据，从去年 11 月第一份理财产品发售，到 2005 年 1 月 21 日为止，整个人民币理财市场规模已达到了 300 亿。2005 年，随着工行、中行和建行进入这一市场，商业银行人民币理财产品市场发展将会跨上新的台阶，市场预期今年其市场总量将会超过 1000 亿元。截止 2005 年 3 月 1 日，已发行人民币理财产品的银行有：中国银行、中国工商银行、中国建设银行、光大银行、招商银行、民生银行、中信实业银行、交通银行、兴业银行、华夏银行等等。而中国农业银行的“利本丰”人民币理财产品也正在待发中。

#### 二、人民币理财产品的投资对象<sup>①</sup>

大部分的人民币理财产品在理财协议中明确将资金投资于高信用级的人民币债券（含国债、金融债、央行票据、其他债券等），所以其投资对象品种有限。

一方面，投资品种的限制使得人民币理财市场的整体规模受到限制。到 2004 年底，银行间市场债券托管量近 5 万亿元，国债加上金融债市场总量大约为 2 万亿，央行票据留存余额 9700 多亿元。

另一方面，在可投资对象总量不变情况下，如果人民币理财产品吸引过多的储蓄资金涌入，势必导致债券价格上涨，收益率下降，这反过来又促使银行减少人民币理财的发行量。2004 年 8 月 31 日，一年期央行票据(04 央票 66)的收益率

<sup>①</sup> 本部分的数据主要来自中国债券信息网：[www.chinabond.com.cn](http://www.chinabond.com.cn)

在 3.4126% 左右，2005 年 3 月 21 日，一年期央行票据(05 央票 22)的收益率降为 2.8066%。一年期央行票据收益率的下降部分原因可以说是由于人民币理财产品规模在这一时期的迅速增大，使得资金供给增加。

### 三、各家银行产品的同质化

面对十多家商业银行即将展开的同质化竞争，单纯强调收益是不行的，安全性、流动性与收益性的结合才是人民币理财产品的优势和发展方向，对此，一些银行的产品已经有所体现，由“客户无权提前中止只可按比例办理质押贷款”到“客户可在固定日期提前解约”，由多数银行最短 6 个月的产品期限演变为各银行重点推出的 3 个月期限产品，都提高了资金的流动性。

### 四、人民币理财产品的主要条款

人民币理财产品的主要条款包括预期收益率、可提前终止权、储蓄配比、可质押性、理财期限、委托金额起点和产品管理费等六个方面。各个商业银行的在产品创新上也主要从这六个方面加以突破。

#### 1、预期收益率

人民币理财产品的预期收益率是指银行预期可以提供给投资者的收益率。在人民币理财产品刚推出时期，银行承诺提供投资者的收益是“固定收益”或者“保底收益”。后来由于银行监督部门认为，具有代客理财性质的投资产品，类似于信托产品，应该“既不能够承诺保底收益，更不能承诺固定收益”。因此，银行在后来的产品条款中，一律都改为“预期收益率”。

虽然是预期收益率，但在实际操作中，银行在推销产品一般都暗示投资者，其可以得到的收益是可以保证的。因此我们认为银行实际上提供给投资者的仍然是固定收益（因此在后面的分析中，我们将人民币理财产品的预期收益与固定收益等同）。银行之所以可以给出这种事实上的保底收益承诺，是因为银行可以在货币市场上找到足够金额、期限匹配和收益固定（比给投资者承诺的高）的投资品种，比如央行票据。因此最先推出的不含提前终止权人民币理财产品的利率确定也主要依据在银行间债券市场的国债、央行票据或者是金融债可获得的收益率，这也是各家银行推出的同期产品不会有过大的差异的原因。

#### 2、提前终止权

提前终止权是指投资者在委托银行理财期间可以在委托期限到期前终止理财协议的权利。2004年12月,招商银行最先推出可提前终止的人民币理财产品,开始了人民币理财产品创新的新起点。随后兴业银行、民生银行、广东发展银行、建设银行等银行也开始将可提前终止权嵌入到他们部分的产品中。

提前终止权的嵌入一方面提高了理财产品的流动性,一旦投资者急需资金,那么可以提前终止协议,并且所获得的收益一般还高于定期存款收益。另一方面,提前终止权的嵌入增加了投资者对未来投资机会的选择。当投资者与银行签署理财协议后,其中面临的一个风险是高收益机会的损失。比如投资者购买了1年期产品,在半年后市场出现更高收益的投资对象,如果该1年期产品不可提前终止,那么投资者损失了高收益的机会。而如果可以提前终止,那么就可以将委托金额转向更高收益的投资。

有的理财产品中可以含有多次提前终止权,即投资者可以每次只对部分金额执行终止权。对投资者而言,一方面提高了未来投资机会的选择余地,可以有将资金转向更高收益的机会。另一方面增加了投资者资金配置的灵活性。对于一次性购买较多金额的投资者,在理财期间可能多次需要多笔较小金额的资金,这时投资者不必一次提前终止所有金额的理财协议,只需在需要资金时,提前终止所需金额大小的理财协议。

### 3、理财期限

理财期限是指从收益开始计算日到收益计算结束日为止的时间。理财期限在人民币理财刚推出是主要有3个月、1年、2年,随着产品的创新,现在已经有1个月、4.2年。可以看出,理财期限越短,那么流动性就越大,相应的收益也越低。理财期限的多样化一方面体现银行在市场竞争下的创新,另一方面也体现了市场需求的多样化。

### 4、储蓄配比

储蓄配比是指银行规定投资者在购买一定金额的人民币理财产品的同时,还必须将一定比例金额的资金定期存储在该银行的储蓄账户上。存储期限与理财期限相同。储蓄配比的比率一般与购买金额的多少成反比,投资购买的金额越多,那么配比的比率越低;相反,则配比的比率就越高。

在人民币理财产品早期推出时,各家银行一般都将储蓄配比列入产品协议

中。这能使银行以人民币理财产品的高收益吸引一定比例的存款。同时，储蓄配比也降低了投资的综合收益。

假设理财期限为 $T$ 的人民币理财产品的预期收益率为 $r^f$ ，储蓄配比为 $\phi$ ， $T$ 期限的定期存款的利率为 $r^d$ ，假设不考虑税收。投资者共有资金为 $A$ 。

(1) 没有储蓄配比

资金 $A$ 的收益为： $Ar^fT$

(2) 存在储蓄配比。

假设用于人民币理财的资金为 $x$ ，那么：

$$x + \phi x = A$$

$$x = \frac{A}{1 + \phi}$$

因此，只能有 $\frac{A}{1 + \phi}$ 的资金用于人民币理财。

所以资金 $A$ 的总收益为：

$$\frac{A}{1 + \phi} r^f T + \left( A - \frac{A}{1 + \phi} \right) r^d T$$

即： $\beta Ar^f T$

$$\text{其中：} \quad \beta = \frac{1 + \phi \frac{r^d}{r^f}}{1 + \phi}$$

由于 $r^d < r^f$ ，否则投资者会将资金用于定期存款，而不会购买理财产品。

因此 $\beta < 1$ ，投资者的总收益由于储蓄配比的存在而降低。

大多数后期推出的人民币理财产品中不再将储蓄配比列入条款，一方面是因为储蓄配比降低了产品的综合收益，降低了该产品的吸引力。另一方面是因为银行监督部门认为储蓄配比会影响到银行内部的储蓄结构，因此银监会在2005年3月份专门发布内部通告，明确人民币理财产品不得搭售存款。

## 5、可质押性

人民币理财产品的质押是指银行允许投资者将拥有的理财产品按一定的比例进行质押，并对投资者按规定的利率收取利息。

人民币理财产品的可质押性也提高了该产品的流动性，能满足投资者在急需资金时的需求。但质押条款设置不当，那么会降低人民币理财产品的吸引力。

假设投资委托理财的金额为  $A$ ，委托期限为  $T$ ，预期收益率为  $r^f$ ，银行质押的利率为  $r^m$ ，质押比率为  $\lambda$ ，在  $t_1 \sim t_2$  ( $0 < t_1 < t_2 < T$ ) 时刻，投资者急需资金，那么：

如果投资者不进行质押，其到期收益为： $Ar^fT$ 。

如果投资者进行质押，其到期收益为： $Ar^fT - \lambda Ar^m(t_2 - t_1)$

由于质押的利率一般高于理财产品的预期收益率，因此，如果投资者质押的时间较长，那么就到期收益就可能为负，即

$$Ar^fT < \lambda Ar^m(t_2 - t_1)$$

$$\Delta t > \frac{r^f}{\lambda r^m} T \quad \text{其中，} \Delta t = t_2 - t_1 \text{ 为质押期限}$$

如果人民币理财产品的质押比例为 0.9，六个月短期贷款利率为 5.22%。，投资者购买一年期的产品，预期收益为 3% 左右。在这种情况下，如果质押的期限大于 0.639 年，即 233 天，这时，人民币理财产品的收益就不足以抵补质押贷款的利息付出。

总的来说，人民币理财产品的预期收益率越低，那么在收益为正前提下，其能够抵押期限就越短。否则，就会发生投资者使用自己的资金却还要付利息给银行的情况。因此投资者购买人民币产品时一定要做好未来的资金安排。或者如果预计未来有资金需求，则需购买含有提前终止权的人民币理财产品。

## 6、委托金额起点

委托金额起点是指银行接受单个投资者委托理财的最少金额。人民币理财产品在刚开始时，因此一般是针对高端客户，所以委托金额起点比较高，比如交通银行第一期产品的委托起点为 50,000 元。但后来为了能够占有更多的人民币理财市场，大多数中小股份制银行相继将委托金额起点降到 10,000。但国有四大银行的人民币理财产品的委托金额起点与中小银行相比，还是比较高。比如中国银行推出的产品委托金额起点为 100,000 元，工商银行、农业银行、建设银行等则将委托金额起点设为 50,000 元。

银行接受委托总金额一样情况下，委托金额起点越高，那么银行处理的委托

笔数就越少，但拥有的客户数量就越少。反之，委托笔数就越多，拥有的客户就越多。四大国有商业银行由于客户数量较多，人民币理财业务在它们的业务中占有的比重很小，因此他们的理财业务主要是针对高端客户，所以其理财门槛较高。而中小银行为了争取更多的客户，对收益是分毫必争，故其门槛较低。

#### 7、产品管理费

人民币理财产品的产品管理费是指银行接收客户委托理财，取得投资收益后，从投资者收益中扣除一定的费用作为代客理财的管理费。在现有的人民币理财产品中，只有兴业银行在产品条款中对产品管理费给以明确，其他银行都没有关于产品管理费的条款。

实际上含有产品管理费的产品中的预期收益率类似于“毛收益率”，其预期收益扣除产品管理费后的净收益类似于不含管理费的产品的预期收益。

### 五、可提前终止权的分析与定价

招商银行在 2004 年 12 月 1 日第一个推出可以提前终止的理财产品，虽然可以提前终止的日期仅限于半年或一年后，但该条款的增加还是提高了人民币理财产品的流动性。同时，由于提前终止后其收益仍然高于同期银行定期存款收益，该类产品的吸引力明显高于其他产品。继招商银行后，陆续有其他银行推出可提前终止的理财产品，包括招商、兴业、光大、民生、建行等银行。

投资者可以提前终止的人民币理财产品与最先推出的产品不同，我们先举个典型的例子，兴业银行 2005 年 1 月 6 日推出第一期“万利宝”两年期人民币理财产品“双如意 A”，该产品在扣除管理费后，投资者的年预期收益率为 3.2%，同时投资者可以在一年后有一次提前终止理财协议的权利。但是如果提前投资者终止，那么已经存续的一年利息的利率则降为 2.9%（其条款中称为预期赎回收益率）。

概括来说，含提前终止权的人民币理财产品赋予投资者在理财期间提前终止的权利，但投资者则要为提前终止付出相应的成本，该成本就是投资者的预期收益率下降。投资者是否提前终止理财协议，取决于未来的投资机会。如果利率下跌，不存在更高收益的投资机会，那么投资者就不提前终止，可以有理财协议所承诺的最低收益。如果利率上涨，出现更高收益的产品或者其他机会，投资者可

以在理财期间提前终止理财计划。但如果提前终止，那么原来存续期间的利息计算执行约定的计息利率（我们称为赎回利率），这时就需要比较执行终止权后的收益与不执行终止权的收益，如果执行后的收益比较高，那么投资者可提前终止协议，将资金转向新的投资，获取较高收益。否则就不执行。

总的来说，可提前终止的人民币理财产品实际上可以看作是固定收益的资产加上一份利率看涨期权多头，或者是固定收益资产加上一份债券看跌期权多头。

### （一）理财协议终止权的分析

假设投资者在 0 时刻将金额为  $V_0$  的人民币委托银行理财，银行给的预期收益率为  $r^f$ ，赎回利率为  $r^s$ ，委托期限为  $T$ 。在时间  $t$  市场存在具有收益率为  $r_t^m$  的投资机会（称  $r_t^m$  再投资收益率），比如存款利率提高、新的理财产品等等。协议规定，在时间  $t$  ( $0 < t < T$ ) 投资者可以执行一次终止权。

1、如果不执行终止权，那么在时间  $T$ ，其资产价值为：

$$V_n^T = V_0(1 + e^{r^f T}) \quad (4-1)$$

如果以单利计算，则为：

$$V_n^T = V_0(1 + r^f T)$$

其中， $V_n^T$  为到期不执行终止权的资产价值。

2、如果执行终止权，那么在时间  $T$ ，其资产价值为

$$V_y^T = V_0 e^{r^s t} e^{r_t^m (T-t)} = V_0 e^{r_t^m T + (r^s - r_t^m)t} \quad (4-2)$$

如果以单利计算，则为：

$$V_y^T = V_0 + V_0 r^s t + V_0 r_t^m (T - t) = V_0(1 + r^s t - r_t^m t + r_t^m T)$$

其中， $V_y^T$  为到期执行终止权的资产价值。

为方便起见，下面的分析，我们使用复利形式，单利形式的分析类似。

投资者如果执行终止权，则执行终止权的收益必须大于不执行终止权的收益，即：

$$V_y^T > V_n^T \quad (4-3)$$

于是：

$$V_y^T = V_0 e^{r_t^m T + (r^s - r_t^m)t} > V_0 e^{r^f T} = V_n^T$$

由此可以得到：

$$r_t^m T + r^s t - r_t^m t > r^f T \quad (4-4)$$

公式(4-4)既是投资者是否执行终止权的判断条件<sup>①</sup>，也是发行者在设计可提前终止权条款时需考虑的关键。

根据(4-4)，我们可以得到：

$$r^s > \frac{(r^f - r_t^m)T + r_t^m t}{t} \quad (4-5)$$

$$r_t^m > \frac{r^f T - r^s t}{T - t} \quad (4-6)$$

从式(4-5)可以看出，在理财协议的协议利率(不等式(4-5)的左边项)已经确定的情况下，如果预期收益率越高，离可执行终止权的时间长，执行时的再投资收益率越低，那么投资者就越不可能提前终止理财协议，该提前终止权的价值就越低；相反，如果预期收益率越低，离可执行终止权的时间越短，执行时的再投资收益率越高，那么投资者就越可能提前终止理财协议，该提前终止权的价值就越高。

结论 1:  $\frac{r^f T - r^s t}{T - t}$  是促使终止权提前执行的触发收益率(执行利率)。

从式(4-6)看出，市场上未来的投资机会的再投资收益率只有超过  $\frac{r^f T - r^s t}{T - t}$  时，投资者才可能提前终止理财协议。因此， $\frac{r^f T - r^s t}{T - t}$  才是真正的促使终止权提前执行的触发收益率(执行利率)。而如果赎回利率  $r_t^s$  越低，触发收益率就越高，那么终止权被执行的可能性就越低；反之，就越高。

## (二) 提前终止权价值与理财协议条款的设计

对发行者而言，公式(4-5)可以看作一个定价公式，公式(4-5)其实可以写成：

$$r^s = \frac{(r^f - r_t^m)T + r_t^m t}{t} + C$$

<sup>①</sup> 在此不考虑投资者由于流动性需要而终止理财协议情况，而只是单纯从收益的角度进行分析。



$$C = r^s - \frac{(r^f - r_t^m)T + r_t^m t}{t} \quad (4-7)$$

其中， $C$  就是欧式利率看涨期权多头的在  $T$  时刻的价值， $C \geq 0$ 。

可以看出，发行者所给予投资者的提前执行权的价值的大小取决于，预期收益率，预期赎回收益率、再投资收益率和执行的时间。因此发行者可以根据四个因素对理财协议条款中终止权进行设计。

1、如果发行者不提供终止权给投资者，或者说终止权根本就没有价值，那么这时  $C = 0$ ， $T = t$ ，于是  $r^s = r^f$ ，也就是投资者在理财协议到期时，以发行者承诺的收益收回本息。

2、赎回利率  $r^s$  与期权价值的关系。

在承诺收益、可执行终止权时间和市场的再投资收益不变条件下，赎回利率越高，那么期权的价值就越大。当赎回利率等于承诺收益时，那么就类似于一个中间有一次提前提款权而提款并不改变计息利率的定期存款。

那么，当赎回利率超过承诺收益时，期权是否必然被执行？

结论 2：当赎回利率超过承诺收益时，期权不一定必然被执行，还要取决于再投资收益率。

证明：期权被执行的必要条件是：

$$\begin{aligned} r_t^m T + r^s t - r_t^m t &> r^f T \\ r_t^m T + r^s t + r^s T - r^s T - r_t^m t &> r^f T \\ (r_t^m - r^s)(T - t) &> (r^f - r^s)T \end{aligned}$$

因为， $r^s > r^f$

所以，

$$\frac{(r_t^m - r^s)}{(r^f - r^s)} < \frac{T}{T - t} \quad (4-8)$$

令  $A = \frac{T}{T - t}$ ，那么，由式 (4-8) 可以得出，期权执行的必要条件是：

$$r_t^m > r^s + A(r^f - r^s) \quad (4-9)$$

而这并不可确定。证毕。

虽然从理论上可以证明，当赎回利率超过承诺收益时，期权不一定必然被执

行，但是在实际中，从式（4-9）可以看出，除非：（a）再投资收益率太低（比如定期存款），或者（b）承诺收益和赎回利率的差距过大，或者两者同时出现，那么式（4-9）被满足的可能性就很小，期权被执行的可能性就降低。否则，在一般情况下，赎回利率超过承诺收益时，期权会被执行。

### 3、预期收益率 $r^f$ 与期权价值的关系。

结论 3：在赎回利率、期权可执行时间和市场再投资收益率不变条件下，预期收益率越高，那么期权的价值就越低。

当预期收益率极高时，投资者根本不可能执行，此时若设置终止权条款，则没有意义，于是期权的价值为零。

### 4、期权执行时间 $t$ 与期权价值的关系。

假定再投资收益率不变，那么如果可提前执行时间距离初始时刻越近，那么，期权价值就越小。可提前执行时间距离初始时刻越远，那么期权的价值就越大。同样是一年期的理财协议，其他条款相同情况下，半年以后可终止的期权价值低于 9 个月后可终止的期权价值。

结论 4：如果可提前执行时间距离初始时刻越近，期权价值就越小；反之，则期权价值越大。

证明：假设  $t_1 < t_2$

$$\begin{aligned}
 C &= r^s - \frac{(r^f - r_t^m)T + r_t^m t}{t} \\
 C &= r^s - \frac{(r^f - r_t^m)T}{t} - r_t^m \\
 C_2 - C_1 &= \frac{(r^f - r_{t_1}^m)T}{t_1} - \frac{(r^f - r_{t_2}^m)T}{t_2} \\
 &= \frac{(r^f - r_{t_1}^m)T t_2 - (r^f - r_{t_2}^m)T t_1}{t_2 t_1} \\
 &= \frac{(r^f - r_{t_1}^m)T(t_2 - t_1)}{t_2 t_1} > 0
 \end{aligned}$$

因此， $C_2 > C_1$

证毕。

前面的证明我们假设再投资收益率不变，即使是在再投资收益率可变的话，如果可提前执行时间距离初始时刻越近，那么市场上利率可能波动的幅度就越

小，期权价值同样越小。可提前执行时间距离初始时刻越远，那么市场上利率可能波动的幅度就越大，那么期权的价值也同样越大。

因此，总的来说，可提前执行时间距离初始时刻越近，期权价值就越小；反之，则期权价值越大。

#### 5、再投资收益率 $r^m$ 与期权价值

结论 4：再投资收益率越高，那么期权价值也就越高。

证明：假设  $r_t^{m_2} > r_t^{m_1}$ ，

$$C = r^s - \frac{(r^f - r_t^m)T + r_t^m t}{t}$$

$$C = r^s + \frac{r_t^m (T - t) - r^f T}{t}$$

$$C_2 - C_1 = \frac{(r_t^{m_2} - r_t^{m_1})(T - t)}{t} > 0$$

所以：  $C_2 > C_1$

证毕。

但是由于再投资收益在初始时刻是不知道的，只能通过预测估计。因此如果市场是处于加息周期的话，那么期权价值就越高；如果是处于减息周期的话，期权价值就越低。我国在 2004 年 10 月 29 日开始了八年以来的首次加息，市场呈现出加息的趋势，因此在 2004 年 12 月 1 日招商银行首次推出的可提前终止的理财计划倍受欢迎。相对其他产品而言，其终止权具有价值，能有效避免央行再次加息导致的利息损失。

#### （三）含多次终止权的理财协议的分析

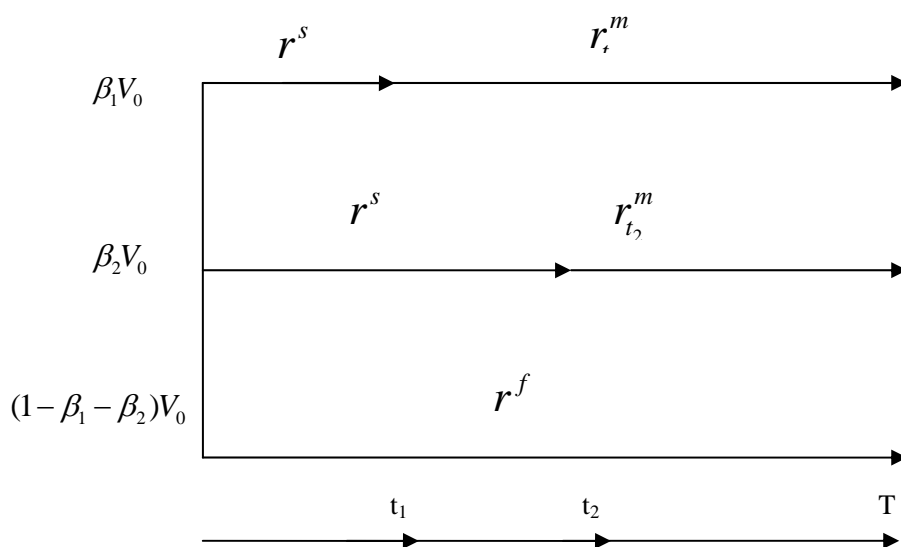
在投资者提前终止理财协议时，理财协议中一般都允许不必全部金额终止，而是允许部分终止，部分保留原来协议。这条条款在理财协议只设定一次终止权时没有意义，因为此时如果终止的收益大，就全部终止。但如果理财协议中有多次终止权（如建设银行 2005 年第一期“利得盈”一年期理财计划）时，那么允许部分终止权就有价值。特别是如果理财协议跨越的期限长，该期限又处在加息周期，那么在该期限中就有多次加息的可能，这时允许部分终止的期权价值就很明显。

假设投资者在 0 时刻将金额为  $V_0$  的人民币委托银行理财，银行给的固定收益

率为  $r_f$ ，提前终止的赎回利率为  $r_s$ ，委托期限为  $T$ 。理财协议规定在时间  $t_1$ 、 $t_2$  ( $0 < t_1 < t_2 < T$ ) 可以部分终止理财协议。在  $t_1$ 、 $t_2$  时刻市场存在具有收益率为  $r_{t_1}^m$ 、 $r_{t_2}^m$  的再投资收益率，如图 4-1。

如果投资者在  $t_1$ 、 $t_2$  时刻终止协议的金额占总金额的比例分别为  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ ，并且终止的金额具有再投资收益，那么在协议的到期时间  $T$ ，资产的总价值为：

图 4-1 含多次终止权的人民币理财协议分析



$$V_y^T = (1 - \beta_1 - \beta_2)V_0 e^{r^f T} + \beta_1 V_0 e^{r^s t_1} e^{r_{t_1}^m (T - t_1)} + \beta_2 V_0 e^{r^s t_2} e^{r_{t_2}^m (T - t_2)} \quad (4-10)$$

而没有终止权的理财协议的期末价值为：

$$V_n^T = V_0 e^{r^f T}$$

此式投资者判定是否执行终止权的标准则变为式 (4-10) 与式 (4-1) 的比较。

不管是只有一次终止权还是多次终止权，对这个利率看涨期权进行定价的前提是能够对未来市场的机会收益率  $r_t^m$  进行准确估计。这就需要建立短期利率的动态模型。

#### (四) 人民币理财产品设计中的预期利率确定

在允许投资者提前终止理财协议的条款中，一般都设定终止协议的赎回利率

$r^s$ ，而不是预期收益率  $r^f$ ，而且一般  $r^f > r^s$ 。假设银行已经将投资者委托的资金购买了收益率为  $r^n$  ( $r^n > r^f > r^s$ ) 的央行票据。

如果投资者不提前终止，银行的收益为：

$$E_1 = V_0 e^{(r^n - r^f)T} = V_0 e^{\Delta r T},$$

其中， $\Delta r$  是银行的赚取的利差。

如果投资者提前终止，那么银行的收益则为

$$E_2 = V_0 e^{(r^n - r^s)t},$$

因此，如果银行对投资者提前终止与否无所谓的话，那么  $E_2 = E_1$ ，即

$$(r^n - r^s)t = \Delta r T$$

$$r^s = r^n - \frac{T}{t} \Delta r$$

所以，银行在发行理财产品，能够准确预测央行发行票据的收益率，那么将投资者执行的赎回利率设定 ( $r^n - \frac{T}{t} \Delta r$ ) 时，这时候银行的收益就已经锁定。

#### (五) 可提前终止权的定价

现有人民币理财产品中含有可提前执行权的产品一般都是期限为 1 年期以上的产品，且执行时间一般都是 6 个月后，1 年后和 2 年后的欧式期权。此外，人民币理财产品中的可提前执行权既可以看作利率看涨期权，也可以看成债券看跌期权。因此根据第二、三章的分析，本部分基于 CIR 模型用有限差分法将人民币理财产品中的可提前执行权当作债券的可提前执行权进行价值计算。

同样以兴业银行 2005 年 1 月 6 日发行的第一期“万利宝”人民币理财产品“双如意 A”，为例，该产品扣除管理费后的预期收益率 3.20%，产品委托理财期限为 2 年，投资者在一年后具有提前赎回的权利，预期赎回收益率为 2.90%。

首先需要估计 CIR 模型的参数。市场短期利率为银行间 7 天回购利率。2005 年 1 月 6 日市场短期利率为 1.87%。根据 2005 年 1 月 6 日前两年的市场短期利率的数据，CIR 模型的参数估计如表 4-1。

表 4-1 CIR 模型参数估计

	$k$	$\mu$	$\sigma$
估计值	12.5	0.022421	0.12878
t 值	2.8294	20.531	31.037

现在假设投资者将 100 元的现金交给银行理财。如果不提前执行，那么 2 年后，投资者可以收回 100 元的本金和 6.4 元的利息，这不仅类似于定期存款，也相当于银行以平价发行一个面值为 100 元，票面利率为 3.2% 的债券给投资者。将这些参数代入程序，可以算出该类似债券的价值是 101.83 元<sup>①</sup>。因此银行实际上是将价值为 101.83 元的债券以 100 元的面值出售给投资者。所以银行实际上是低价出售给投资者，而这其中还不包括所含期权的价值。

实际上，当投资者提前执行时，其可得到的本金加利息为 102.9。而这就是债券看跌期权的执行价格（全价）。应用第三章编写的程序，可计算得该债券看跌期权的价值为 1.98 元。因此银行不仅将人民币理财产品低价出售给投资者，而且还赠送一个价值 1.98 元的债券看跌期权。换句话说，银行将价值 103.81（= 101.83+1.98）元的人民币理财产品以 100 元低价出售给投资者。

表 4-2 计算了部分一些理财产品的价值，从表中可以看出，人民币理财产品的价值都大于 100 元，也就是说人民币理财产品大部分是低价出售。这可能是由于当前市场短期利率水平比较低的缘故。

## 六、人民币理财产品的创新

银行的盈利方式主要是获得利差。对于人民币理财产品也是如此。不提供提前终止权的人民币产品，只需根据同期限的央行票据的收益，减去理财产品的报价，就可以得到利差，并且几乎没有风险。但在银行间竞争日益激烈以及超额准备金利率下调的情况下，银行所能获得的利差十分有限，如果银行加大利差，必然降低理财产品的预期收益率，这对投资者的吸引力又不足。所以银行需要在产品设计上进行创新。

1、设计期限更短和更长的理财产品，以流动性更强吸引投资者。当前人民币理财产品的期限有 3 个月、6 个月、1 年、2 年，最长有 4.2 年，银行完全可以推出更短期限比如 1 个月、14 天、7 天等期限的产品，还可以有 5 年、10 年更长期限的理财，同时在长期限产品中嵌入更多次的可提前赎回权利。

<sup>①</sup>如果我们以常用的债券价格公式  $B = \sum_i^T \frac{C_i}{1+r}$ ， $r = 2.16\%$  计算债券价格，那么计算出的价格为 102.1，

与本文程序算出的价格有偏差。原因是因为该公式计算时其贴现率是固定的，而实际上贴现率（这里是指短期无风险利率）是变化的。

2、滚动发行人民币理财产品，采用短期限长投资的方式。由于长期限央行票据收益高于短期限央行票据收益，因此可以采取该方法，以短期利率的成本获得长期利率的收益。举个例子来说，发行3个月的理财产品，投资于一年期的央行票据，3个月到期后，继续发行3个月理财产品，用获得的资金兑付前一期发行的产品，这样滚动发行和兑付那么就可以达到，以短期限的利率成本获得长期限的利率收益。但这样的盈利模式要求银行有很高的操作能力，因为这需要资金的及时衔接。

#### 2、扩大投资对象，结合外币理财形成理财组合

目前人民币理财的投资对象一般限于高信用等级人民币债券（含协议存款、国债、金融债、央行票据等）。这些投资对象可以认为无违约风险，但其收益也相对低。人民币理财的投资对象可以扩大到银行同业拆借、债券回购、外币债券等相对收益较高的品种。当前外币理财也很受投资者欢迎，人民币理财可以与外币理财相结合，形成理财组合，减少风险，增加收益。

总之，在各家银行人民币理财产品日益同质化趋势下，银行需要在产品创新、风险管理和收益三个方面进行均衡，使银行在承受一定风险情况下能提高产品的收益。

表 4-2 部分人民币理财产品的价值计算

发行银行	兴业银行	招商银行	中国光大银行	兴业银行	中国光大银行	中信实业银行	北京银行	中国民生银行	华夏银行	中国农业银行
产品名称	2005 年第一期“万利宝”“双如意 A”	人民币债券理财计划二年期	第二期阳光理财 E 计划之“金状元”	2005 年第二期“万利宝”“双如意”	(一年期) 第四期阳光理财 B 计划	信丰 A	“心喜” 2 期	人民币保得理财 (一年期)	人民币稳得赢 1 号 (一年期)	“本利丰” 一期 C
销售日期	2005-1-6	2004-12-1	2005-2-25	2005-2-2	2005-3-11	2004-12-31	2005-1-20	2004-11-17	2004-12-21	2005-2-28
收益起计日	2005-1-26	2004-12-9	2005-3-9	2005-3-3	2005-3-23	2005-1-24	2005-2-4	2004-12-9		
委托管理期 (月)	24	24	36	24	12	12	6	12	12	12
付息周期 (月)	24	24	36	24	12	12	6	12	12	12
承诺年收益率	3.20%	3.20%	3.51%	3.50%	2.75%	3.03%	2.60%	2.81%	3%	2.73%
提前终止	1 年后可终止	1 年后可终止	2 年后可终止	不可提前终止	不可提前终止	不能提前终止	不能提前终止	不能提前终止	不能提前终止	不能提前终止
终止收益率	2.90%	2.70%	2.50%	无	无	无	无	无	无	无
不含权的价值	101.8341	101.8284	103.5964	102.4116	100.5051	100.775	100.2016	100.5582	100.744	100.4835
终止权价值	1.9763	1.7804	1.266							
产品总价值	103.8104	103.6088	104.8624	102.4116	100.5051	100.775	100.2016	100.5582	100.744	100.4835



## 第二节 固定利率含权债券的定价

本节的内容主要是对我国现已发行的含权债券（主要是国家开发银行的金融债和一些商业银行发行的次级债券）进行分析定价。

所谓含权债券是指在条款中嵌入一些具有期权、远期、互换等衍生品性质的债券。这些条款的存在使投资者可以在债券存续期内根据市场利率状态、债券价格走势对债券投资做相应的调整。可提前赎回债券、可提前回售债券、可延期债券、可调换债券等均是含权债券。

郑振龙\康朝峰（2004）利用 BDT 模型对 2001 年以来的国家开发银行发行的可赎回债券和可回售债券进行了定价。定价结果表明，可赎回债券的价值基本上比较合理，可回售债券被严重低估。郑振龙，康朝峰（2004）对可赎回债券的价值高估或者低估的判断主要是基于债券在起息日的价格（面值）与计算出的理论价格作比较，本节同样是以可赎回债券和可回售债券作为研究的样本，但与他们不同的是，本节选择的定价日不是起息日，而是当前时刻（2005 年 3 月 31 日）债券的理论价格，以力图发现在发行后，这些债券经过在二级市场上的交易，价格是否趋于理论价格。本节使用的定价方法基于第三章的结果。

### 一、样本债券基本情况

在市场中交易的含权债券主要包括国家开发银行（以下简称国开行）发行的各类含权债券和各商业银行发行的次级债券。国开行在债券品种的创新可以说走在各家银行的前头，其含权债券的品种包括：可提前赎回债券、可回售债券、可延期债券、远期债券、本息分离债券和可调换债券等等。其中根据利率的方式又可以分为固定利率债券、累进利率债券、浮动利率债券等。

在次级债券方面，截止到 2005 年 10 月份，共有 5 家商业银行发行了次级债券，包括中国银行、中国建设银行、中国工商银行、浦东发展银行和招商银行。其中浦东发展银行和招商银行发行的债券是不含权的普通债券，而中国银行、中国建设银行和中国工商银行发行的债券为含可提前赎回权的债券，本文研究的样本债券为国开行的固定利率可赎回债券、可回售债券和中国银行、中国建设银

行、中国工商银行的固定利率可赎回债券（见表 4-3）。

可赎回债券（Callable bond）是指发行人在债券到期前有权按照发行时预定的价格提前将债券赎回。而可回售债券（Puttable bond）是指投资者或者说是债券持有人在债券到期前有权按照发行时预定的价格提前将债券兑付。根据提前执行时间是否任意，内含的提前执行权又可分为欧式可提前执行权和美式可提前执行权，其中欧式可提前执行权是指在规定的某个时点可提前执行，而美式可提前执行是指在规定的某个时点之前任意时间可提前执行。我国现有发行的含权债券中内含的可提前执行权都是美式的。

## 二、含权债券的例子

### （一）可回售债券

国家开发银行 2004 年第十六期金融债券为五年期固定利率投资人选择权债券，按年付息。到期日为 2009 年 10 月 26 日。每年的 10 月 26 日为付息日，发行时的票面利率 4.3%。本期债券的任何持有人均可选择在 2007 年 10 月 26 日要求发行人全部或部分赎回债券本金。

### （二）可赎回债券

#### 1. 国开行可赎回债券

国家开发银行 2003 年第十三期金融债券。该期为十年期发行人选择权金融债券，起息日为 2003 年 7 月 29 日，到期日为 2013 年 7 月 29 日，一年付一次利息。本期债券设定一次发行人选择提前赎回的权利，即发行人可选择在 2008 年 7 月 29 日以面值全部赎回债券。该期债券前五年（2003 年 7 月 29 日-2008 年 7 月 29 日）的票面利率由承销商通过本次招投标确定，后五年（2008 年 7 月 29 日-2013 年 7 月 29 日）的票面利率在前五年票面利率的基础上加 130 个基点。招标利率为 2.77%。

#### 2. 商业银行可赎回债券

中国建设银行 2004 年第一期次级债券。该期债券的期限为 10 年，起息日为 2004 年 8 月 1 日，到期日为 2014 年 8 月 1 日。设定 1 次发行人选择提前赎回的权利。发行人可以选择在该期固定利率债券第 5 个计息年度的最后一日，即 2009 年 8 月 1 日，按面值全部赎回该期固定利率债券。该期固定利率债券的前 5 个计

息年度的票面年利率为 4.87%；如果发行人不行使赎回权，则后 5 个计息年度的票面年利率为 7.67%。

### 三、含权债券的定价

在样本债券的选定上，本文选取市场上交易相对较活跃的品种。并选定 2005 年 3 月 31 日作为债券理论计算价格与市场价格进行比较的日期。如果在 2005 年 3 月 31 日某债券没有交易，那么以最近的有交易的日期作为比较的日期。

对于投资人持有的投资者可回售债券，其债券价值  $P_{PB}$ ：

$$P_{PB} = P_B + P_P$$

其中： $P_{PB}$  表示含有可回售权的债券价格；

$P_B$  表示纯债券价格；

$P_P$  表示含权债券中所含可回售权的价格。

对于投资者持有的发行人可赎回债券，其债券价值  $P_{PC}$ ：

$$P_{PC} = P_B - P_C$$

其中： $P_{PC}$  表示含有可赎回权的债券价格；

$P_B$  表示纯债券价格；

$P_C$  表示含权债券中所含可赎回权的价格。

如果计算的含权债券理论价格高于市场价格，那么该债券被市场低估。反过来，则被低估。

### 四、结论

计算结果如表 4-3 和表 4-4。从表 4-3 可以看出，含可赎回权的债券中，既存在被低估的债券，也存在被高估的债券，对含可赎回权债券的定价，市场存在分歧。而表 4-4 却表明，含可回售权的债券，其价值还是被低估，但其中所含的可回售权的价值非常小，有的甚至可以忽略不计。这说明含回售权债券的低估主要来自于债券本身价值的低估，而不是因为其中所含的回售权被忽略。并且，经过二级市场的交易，含回售权债券价格被低估的范围大部分在 10 元以内，被低估的程度比刚发行时减轻<sup>①</sup>。

<sup>①</sup>郑振龙、康朝峰（2004）计算得到的可回售债券价格的低估范围在 20 元以上。

表 4-3 可赎回债券的定价

债券名称	2002 十八期国开金融债	2003 二期国开金融债	2003 十三期国开金融债	2004 二十四期国开金融债(次级债)	2004 中行一期金融债(次级债)	2004 年中国建设银行债券第 1 期(次级债)
债券简称	02 国开 18	03 国开 02	03 国开 13	04 国开 24	04 中行 01	04 建行 01
债券代码	202180	302020	302130	40224	40601	40701
期限(年)	10	10	10	15	10	10
票面利率(%)	前 5 年利率为 3.3%； 后 5 年利率为 4.6%	前 5 年利率为 2.87%； 后 5 年利率为 4.17%	前 5 年利率为 2.77%； 后 5 年利率为 4.07%	前 10 年利率为 5.42%； 后 5 年利率为 7.42%	前 5 年利率为 4.87%； 后 5 年利率为 7.67%	前 5 年利率为 4.87%； 后 5 年利率为 7.67%
付息频率	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次	一年一次
到期日期	2012-12-10	2013-3-31	2013-7-29	2019-12-29	2014-7-19	2014-8-1
定价日	2005-3-7	2005-3-25	2005-3-29	2005-2-28	2005-3-30	2005-3-15
提前赎回日	2007-12-10	2008-3-31	2008-7-29	2014-12-30	2009-7-20	2009-8-2
提前赎回剩余期限(年)	2.76	3.02	3.34	9.84	4.31	4.39
债券剩余期限(年)	7.77	8.02	8.34	14.84	9.31	9.39
理论普通债券价格(全价)	114.513	110.2918	109.777	149.727	136.888	134.5274
赎回权价值	11.0417	7.4001	6.8532	44.146	31.9273	29.3518
含权债券理论价	103.4713	102.8917	102.9238	105.581	104.9607	105.1756
市场价(全价)	102.634	104.6	97.648	107.483	101.441	108.552
价差(市场价－理论价)	-0.84	1.71	-5.28	1.90	-3.52	3.38

表 4-4 可回售债券的定价

债券名称	2001 二十期国开 金融债	2002 五期国开金 融债	2003 十五期国开 金融债	2003 十六期国开 金融债	2004 二期国开金 融债	2004 十六期国开 金融债
债券简称	01 国开 20	02 国开 05	03 国开 15	03 国开 16	04 国开 02	04 国开 16
债券代码	10220	20205	302150	302160	402020	40216
期限(年)	10	20	10	20	10	5
票面利率(%)	3.00%	2.65%	2.77%	3.14%	3.51%	4.30%
付息频率	一年一次	半年一次	一年一次	半年一次	一年一次	一年一次
到期日期	2011-12-21	2022-5-9	2013-8-28	2023-9-4	2014-2-25	2009-10-25
可提前回售日	2006-12-21	2012-5-9	2008-8-28	2013-9-4	2009-2-25	2007-10-26
定价日	2005-3-30	2005-3-30	2005-3-30	2005-3-30	2005-3-30	2005-3-30
提前回售剩余期限(年)	1.73	7.12	3.42	8.44	3.91	2.58
债券剩余期限(年)	6.73	17.12	8.42	18.44	8.92	4.58
普通债券理论价格	104.8134	105.989	104.123	113.7242	110.2806	108.9721
回售权价值	0.00	0.00	0.3419	0.00	0.00	0.3129
含权债券理论全价	104.81	105.99	104.4649	113.7242	110.2806	109.285
市场价(全价)	102.408	100.007	100.395	100.477	102.491	103.766
价差(市场价-理论价)	-2.41	-5.98	-4.07	-13.25	-7.79	-5.52



```

% b 为要估计的系数
function quartc=quartc(b)
    global weight x
    mm=gmmm(x,b);
    quartc= mm * weight * mm';
    return

function [c,ceg]=nlconstraint(b)
    %非线性约束条件
c(1)=-2*b(1)-b(3)^2;           %满足根号内式子大于等于 0;
c(2)=-2*b(2)-b(4)^2;           %满足根号内式子大于等于 0;
c(3)=0.0001-abs(b(2)-b(1));    %满足 b(2)-b(1)不等于 0;
c(4)=0.0001-abs(b(3)+b(4));    %满足 b(3)+b(4)不等于 0;
c(5)=0.0001-abs(2*b(1)+b(3)^2); %满足 2*b(1)+b(3)^2 不等于 0
c(6)=0.0001-abs(2*b(2)+b(4)^2); %满足 2*b(2)+b(4)^2 不等于 0
ceg=[];

%计算矩的均值
function gmmm=gmmm(x,b)
    gmmm=mean(mf(x,b));
    return

function mom=mf(x,b)
%矩函数
    %load DY2
    %x=DY2;
    %b=[0.056 -5.07 1 2];
    %b=[-0.04 -0.08 0.33 14];
    [n,m]=size(x);
    h=m-2;           %共有 h 种期限
    t=[0.25 0.5 0.75 1 2 3 4 5];
    mom=zeros(n,(3*h));
    z=[ones(n,1),x(:,(h+1)),x(:,(h+2))];    % 设置工具变量: 常数项、delta_r 和 delta_v
    @
    for i=1:h
        fy=(2*b(1)+b(3)^2)^(1/2);
        delta=(2*b(2)+b(4)^2)^(1/2);
        at=2*fy/((b(3)+fy)*(exp(fy*t(i))-1)+2*fy);
        bt=2*delta/((b(4)+delta)*(exp(delta*t(i))-1)+2*delta);

        coef_b=(b(2)*delta*(exp(fy*t(i))-1)*at-b(1)*fy*(exp(delta*t(i))-1)*bt)/(fy*delta*(b(2)-b(1))*t(i));

        coef_c=(fy*(exp(delta*t(i))-1)*bt-delta*(exp(fy*t(i))-1)*at)/(fy*delta*(b(2)-b(1))*t(i));

        e=x(:,i)-coef_b*x(:,(h+1))-coef_c*x(:,(h+2));

        mom(:,(3*i-2))=z(:,1).*e;
        mom(:,(3*i-1))=z(:,2).*e;
        mom(:,(3*i))=z(:,3).*e;%每循环一次产生 3 个矩, 共循环 8 次所以总共有 24 个
        矩, 估计 4 个参数, 所以有 20 个矩约束。
    end
    return

function v=gmmv(x,b,plag);

```

```

%计算方差-协方差矩阵
%local n,m,v,s,j;
rc=size(x);
n=rc(1);
m=mf(x,b)/n;
v=m' * m;
for j=1:plag
    mlag=lagmatrix(m,j);
    mlag(1:j,:)=0;
    s = m'* mlag;
    v = v+(1-j/(plag+1))*(s+s');
end
return

function gmmoutput(x,b,plag)
%输出 GMM 估计结果
mm=gmmm(x,b);
vv=gmmv(x,b,plag);
gmmw=pinv(vv);
q=mm * pinv(vv) * mm';
g=grad(x,b);
%得到 b 的 GMM 估计量 b1 的渐进协方差矩阵
%与计算 vbb=inv(g'* gmmw * g)等价;
vb=pinv(g'* gmmw * g) * g' * gmmw * vv * gmmw' * g * pinv(g' * gmmw * g);
display('广义矩 (GMM) 估计结果')
display('*****')
display('参数值')
b
display('Std. Error')
Std_error=(realsqrt(diag(vb)))'
display('t')
t_ratio=b./(realsqrt(diag(vb)))'

display('^^^^^^^^^^^^')
display('矩约束的 Hansen 检验统计值')
q

```



## 附录 B Fong and Vasicek (1992)双因子利率模型的模拟矩估计

```

% 本程序用模拟矩方法计算均值、方差、偏度和峰度
clear all
tt=clock;
load data2          % 加载已经估计的样条函数的系数
n=36;              % 将要估计的最长期限分成36段,即用36个点估计整个曲线形状,
                  % 估计中每个月为一个点
t=3;               % 样本的最长期限, 单位: 年;
dt=t/n;
for i=1:5000       % 每天总模拟次数
    [dz1,dz2]=montle_carlo(0.213,n); % 从双变量正态分布中进行抽样
    ee1(i,:)=dz1;
    ee2(i,:)=dz2;
end %for i
rr=r;
vvar=v;
disc=Discount;
e1=ee1;
e2=ee2;
par0=[-0.2 14 -0.0001 9e-4 0.021]; %alpha=par(1);
                                     %gamma=par(2);
                                     %delta=par(3);
                                     %v_mean=par(4);
                                     %r_mean=par(5);

obs_all=pnomial_obs(dt,n,disc);      % 用多项式函数拟合真实利率期限结构
for i=21:21                          % 计算某一天的参数
    obs_mean = mean(obs_all(i,:));
    obs_variance = var(obs_all(i,:));
    obs_skewness = skewness(obs_all(i,:));
    obs_kurtosis = kurtosis(obs_all(i,:));
    obs_day=[obs_mean obs_variance obs_skewness obs_kurtosis]';
    options=optimset('TolFun',1e-8,'MaxIter',5000,'MaxSQPIter',1000,'MaxFunEvals',1e5);
    goal=[0.001 1e-6 1 1]';
    weight=[0.001 1e-6 1 1]';
    A=[0 0 -1 0 0;
        0 0 1 0 0;
        0 0 0 -1 0;
        0 0 0 1 0;
        0 0 0 0 -1;
        0 0 0 0 1];
    b=[ 0.01;
        0.01;
        0;
        5e-1;
        -0.015;
        0.10];];
    [x,fval,attainfactor,exitflag,output]=fgoalattain(@(par)...
        objectfun(par,obs_day,e1,e2,rr(i),vvar(i),dt),par0,goal,weight,A,b,[],[],[],[],[],options);

```

```

    ppar(i,:)=x;
end
time_using=clock-tt %得到计算所用时间

function ff=objectfun(par,obs_day,e1,e2,r0,v0,dt)
%alpha=par(1);
%gamma=par(2);
%delta=par(3);
%v_mean=par(4);
%r_mean=par(5);
[m,n]=size(e1);
montl_r(1:m,1)=r0;
montl_v(1:m,1)=v0;
term_r(1:m,1)=r0;
for j=1:(n-1) % total simulation number for each day
    dv = par(2) .* (par(4)- montl_v(:,j)) .* dt + par(3) .* sqrt(dt) .* sqrt(montl_v(:,j)).* e1(:,j);
    montl_v(:,j+1) = montl_v(:,j) + dv;
    dr = par(1) * (par(5) - montl_r(:,j)) .* dt + sqrt(dt)*sqrt(montl_v(:,j+1)) .* e2(:,j);
    montl_r(:,j+1)=montl_r(:,j)+dr; %模拟瞬时利率的走势
    term_r(:,j+1)=term_r(:,j)+ dt.* montl_r(:,j+1); %计算不同期限的利率
end % for j
term_r=mean(term_r,1); %计算所有模拟路径的均值
montl_r_mean=mean(term_r); %计算曲线的各阶中心矩
montl_r_variance=var(term_r);
montl_r_skewness=skewness(term_r);
montl_r_kurtosis=kurtosis(term_r);
mont_r=[montl_r_mean montl_r_variance montl_r_skewness montl_r_kurtosis]';
%pause;
ff=abs(obs_day-mont_r); % objective value

function [x,y]=montle_carlo(rho,n)
% 本程序模拟两个相关系数为 rho 的变量的二元正态分布
xm=0; % x 变量均值
ym=0; % y 变量均值
xsig=1; % x 变量标准差
ysig=1; % y 变量标准差
rho % 相关系数 (-1,1)

x=[];
y=[];
i=0;
while (i < n),
    i=i+1;
    a=randn;
    x1=xm+xsig*a;
    y1=ym+rho*ysig*a+ysig*randn*sqrt(1-rho*rho);
    x=[x x1];
    y=[y y1];
end;

```

## 附录 C CIR 模型参数估计的 GAUSS 程序代码

```

/*
** 本程序估计 CIR 模型的参数,
** 本程序参考部分使用了林光平教授的 GPE 计量软件数据包, 估计方法 Maximizing
Log-Likelihood Function
**
*/
use gpe2;
output file=interest\CIR_kmu_output reset;
load x[273,3]=interest\IBO_007.txt;

call reset;
_nlopt=1;           @全局控制变量, 1 表示是最大化问题@
_method=5;         @全局控制变量, 5 表示采用二次攀升法@
_iter=1000;        @最大的迭代次数@
_tol=1.0e-5;       @设定收敛的可容忍水平@
_vcov=1;           @表示方差-协方差矩阵是通过近似海赛矩阵得到的。@
_b={8.0,0.02,0.0012}; @待估计的参数向量初始值, b1 是 alpha,b2 是 mu,b3 是 sigma@

call estimate(&cesll,x);
end;

/* Objective Function */
proc cesll(data,b);
  local delta_t,r,delta_r,e,n;
  delta_t=data[.,1]; @时间间隔数据@
  r=data[.,2];      @收益率数据@
  delta_r=data[.,3]; @收益率变化值@
  e=delta_r-b[1]*(b[2]-r).*delta_t;
  n=rows(e);
  @ 对数似然函数 @
  retp(-0.5*n*(ln(2*pi)+ln(b[3]^2))-0.5*sumc(ln(r))-0.5*sumc(ln(delta_t))-0.5*b[3]^(-2)*
  sumc((e.*e)./(delta_t.*r)));
endp;

```

## 附录 D Vasicek 模型参数估计的 GAUSS 程序代码

```

/*
** 本程序估计 Vasicek 模型的参数,
** 本程序参考部分使用了林光平教授的 GPE 计量软件数据包, 估计方法 Maximizing
Log-Likelihood Function
**
*/
use gpe2;
output file=interest\Vasicek_kmu_output reset;
load x[273,3]=interest\IBO_007.txt;

call reset;
_nlopt=1;           @全局控制变量, 1 表示是最大化问题@
_method=5;         @全局控制变量, 5 表示采用二次攀升法@
_iter=1000;        @最大的迭代次数@
_tol=1.0e-5;       @设定收敛的可容忍水平@
_vcov=1;           @表示方差-协方差矩阵是通过近似海赛矩阵得到的.@
_b={8,0.02,0.005};
/*_b={0.004,0.02,0.003};    @待估计的参数向量初始值, b1 是 alpha, b2 是 mu, b3 是 sigma@*/

call estimate(&cesll,x);

end;

/* Objective Function */
proc cesll(data,b);
  local delta_t,r,delta_r,e,n;
  delta_t=data[.,1];    @1 时间间隔@
  r=data[.,2];          @收益率数据@
  delta_r=data[.,3];    @收益率变化值@
  e=delta_r-b[1]*(b[2]-r).*delta_t;
  n=rows(e);
  @对数似然函数@
  retp(-0.5*n*ln(2*pi)-0.5*n*ln(b[3]^2)-0.5*sumc(ln(delta_t))-0.5*(b[3]^(-2))*
  sumc((e^2)./delta_t));
endp;

```

## 附录 E 多项式样条的系数估计

```

%此程序对用于利率期限结构的多项式样条进行系数估计
clear
load data
maxtime=max(BONDDATA0(6,:));%max(BONDDATA0(6,:))寻找最长期限债券年限
i=1;%此循环计算每个交易日的利率期限结构
[mm,nn]=size(PRICE);% mm 为观测天数
nn=nn-1;% nn 为债券数
Discount=zeros(mm,5);
for i=1:mm
    Bondnum=nn;
    BONDDATA=[BONDDATA0;PRICE(i,2:(nn+1))];
    j=nn;
    while j>0
        if isnan(BONDDATA(10,j))==1
            BONDDATA(:,j)=[];
            Bondnum=Bondnum-1;
        end
        j=j-1;
    end
end

%此循环为现金流分解,将某一天债券的现金流进行分解,产生不同债券在以后不同时刻的
现金流。
c=zeros(Bondnum,maxtime*2);%maxtime*2 为最长期限现金流的期数
for j=1:Bondnum %总共有 Bondnum 只债券交易
    sdate=PRICE(i,1);
    edate=BONDDATA(3,j);%edate 为取第 j 只债券的到期日
    yrdif=yearfrac(sdate,edate,0);%从 sdate 到期日的年份数
    dif=yrdif-fix(yrdif);
    switch BONDDATA(9,j)
        case 0 % 贴现债券
            y=1;% 现金流次数为 1 次,即到期的本金返还
            a=0;% 贴现债券到期前利息现金流为 0
        case 1 % 一年付一次
            if dif==0 % 计算年付息频率为 1,非整数年份数 dif 为 0 时的现金流
                y=yrdif;% y 为非整数年份数 dif 为 0 时的现金流次数
                a=BONDDATA(5,j);% a 年付息频率为 1 时的现金流
            else %计算年付息频率为 1,非整数年份数 dif 不为 0 时的现金流次数
                y=fix(yrdif)+1;% y 为非整数年份数不为 0 时的现金流次数
                a=BONDDATA(5,j);% a 年付息频率为 1 时的现金流
            end
        case 2 % 一年付两次
            if dif==0.5 %计算年付息频率为 2,非整数年份数 dif 为 0.5 时的现金流
                y=yrdif*2;% y 为非整数年份数 dif 为 0.5 时的现金流次数
                a=BONDDATA(5,j)/2;% a 为年付息频率为 2 时的现金流
            end
            if dif>0.5 %计算年付息频率为 2,非整数年份数 dif 大于 0.5 时的现金流

```

```

        y=fix(yrdif)*2+2;%非整数年份数 dif 大于 0.5 时的现金流次数
        a=BONDDATA(5,j)/2;
    end
    if dif<0.5 %计算年付息频率为 2, 非整数年份数 dif 小于 0.5 时的现金流
        y=fix(yrdif)*2+1; %y 非整数年份数 dif 小于 0.5 时的现金流次数
        a=BONDDATA(5,j)/2;
    end
    otherwise
        error('如果出现一年付息次数大于 2 次的情况, 需要修改程序')
end
for k=1:y
    if k<y
        c(j,k)=a; % y 为相应债券的现金流次数, 此时为小于到期期数时的现金流
    else
        c(j,k)=a+100; % 到期时的现金流
    end
end
end
end

%此循环为产生现金流对应的时刻(年份数)
t=zeros(Bondnum,maxtime*2);
for j=1:Bondnum %有 Bondnum 只债券
    a=0;
    y=0;
    sdate=PRICE(i,1);
    edate=BONDDATA(3,j); %edate 为取第 j 只债券的到期日
    yrdif=yearfrac(sdate,edate,0); %从 sdate 到期日的年份数
    dif=yrdif-fix(yrdif);
    switch BONDDATA(9,j)
        case 0 %贴现券
            y=1;
            a=yrdif;
        case 1 %一年付一次
            if dif==0
                y=yrdif;
                a=1; %当前时刻为付息日时, 现金流对应的时刻应为年份数加 1。变
                量 a 即为要加上的数
            else %dif 不为 0
                y=fix(yrdif)+1;
                a=dif; %a 为求现金流对应的时刻时, 需年份数加上的那个数
            end
        case 2 %一年付两次
            if dif==0.5
                y=yrdif*2;
                a=0.5;
            end
            if dif>0.5
                y=fix(yrdif)*2+2;
                a=dif-0.5;
            end
            if dif<0.5 %dif 小于 0.5
                y=fix(yrdif)*2+1;
                a=dif;
            end
        end
    end
end
end

```

```

        end
    otherwise
        error('This is impossible')
    end
    if BONDDATA(9,j)~= 0
        for k=1:y
            t(j,k)=a+(1/BONDDATA(9,j))*(k-1); % 现金流对应的时刻,
            BONDATA(9,j)为年付息频率
        end
    else
        t(j,y)=a; % 贴现债券
    end
    for k=(y+1):maxtime*2
        t(j,k)=1;% 剩余的期限赋值为 1。
    end
end
end

% 多项式样条拟合
% 生成用于回归的系数矩阵
Redata=zeros(Bondnum,6);
for j=1:Bondnum
    a=0;
    bb=0;
    cc=0;
    d1=0;
    d2=0;
    d3=0; % 回归参数的初值赋为 0
    for l=1:maxtime*2
        a=a+c(j,l); % 本金和息票和
        bb=bb+c(j,l)*t(j,l);
        cc=cc+c(j,l)*(t(j,l).^2); % 现金流叠加
        if t(j,l)>=8
            td1=t(j,l).^3-(t(j,l)-5).^3;
            td2=(t(j,l)-5).^3-(t(j,l)-8).^3;
            td3=(t(j,l)-8).^3; % t(j,l)>=8 时
        end
        if t(j,l)<8
            td1=t(j,l).^3-(t(j,l)-5).^3;
            td2=(t(j,l)-5).^3;
            td3=0;
        end
        if t(j,l)<5
            td1=t(j,l).^3;
            td2=0;
            td3=0;
        end
        d1=d1+c(j,l)*td1;
        d2=d2+c(j,l)*td2;
        d3=d3+c(j,l)*td3;
    end
    Redata(j,2)=bb;
    Redata(j,3)=cc;
    Redata(j,4)=d1;
    Redata(j,5)=d2;
    Redata(j,6)=d3;
end

```

```
    Redata(j,1)=BONDDATA(10,j)-a; %现价减去常数项
end
b=robustfit(Redata(:,2:6),Redata(:,1),'logistic',1.205,'off');
Discount_logistic(i,:)=b';

end

clear Bondnum
clear Redata a b bb c cc d1 d2 d3
clear dif edate i j k l maxtime sdate t
clear td1 td2 td3 y yrdif mm nn
```



## 附录 F 利率期限结构的估计

```
function zero_bondyield=pnomial_obs(dt,n,Discount)
%本函数根据附录 E 得到的多项式样条的系数拟合现实利率期限结构。
termyear=[];
termyear(1)=dt;
for i=1:(n-1)
    termyear(i+1)=termyear(i)+dt;
end
Dis=Discount;
for i=1:n
%由于只估计 3 年内的利率期限结构，所以多项式函数只有一段，而没有三段。
    zero_bondprice(:,i)=1+Dis(:,1)*termyear(i)...
        +Dis(:,2)*termyear(i)^2 ...
        +Dis(:,3)*termyear(i)^3;
%计算零息票债券的年内部收益率
    %zero_bondyield(:,i)=(zero_bondprice(:,i)).^(-1/termyear(i))-1; %零息票债券每年内部收
    益率
    zero_bondyield(:,i)=(-1/termyear(i))*log(zero_bondprice(:,i)); %连续复合收益率
end
%figure(1)
clear i term termyear Dis
```

## 附录 G 基于 CIR 模型用有限差分法对含权债券的定价

```

function
bond(r_present,y_points,t_points,American_or_European,call_or_put,par,coupon_1,coupon_2,...
      strike_price,bond_mat,option_mat,...
      adjust_speed,long_mean,volatility_c,gamma)
%该程序基于有限差分法用 CIR 模型对含息债券进行估值、计算所含债券期权的价值

% i          表示竖轴上的点
% j          表示横轴上的点
% delta_t    表示时间划分单位
% delta_y    表示竖轴划分单位
% r_present  表示现在的利率
% y_points   表示竖轴上的总的划分点数
% t_points   表示横轴上的总的划分点数
% bond_prices 表示债券价格（全价）
% option_prices 表示期权价值
% spot_rate   表示即期利率
% accrued_interest 表示获得的利息
% American_or_European 表示期权类型，是美式或者是欧式期权
% sigma       表示波动率
% strike_price 表示债券期权执行价格（全价）
% option_mat   表示期权到期时间，以年计
% bond_mat     表示债券到期时间，以年计
% coupon_1    表示利率,假设利息一年付一次,如果是累进利率，表示初期利率。
% coupon_2    表示利率,假设利息一年付一次,如果是累进利率，表示后期利率，否则等于 coupon_1。
% coupon_flows 表示是否有付息，如有则为 1，否则为 0
% annual_coupon 表示每年付的利息
% adjust_speed 表示利率模型的调整参数
% long_mean    表示利率模型的长期均值
% volatility_c 表示利率模型的波动率参数
% par         表示面值
% a(), b(),c() 表示偏微分方程的系数
% gamma       表示状态变量转换参数

% *****
%display('请按以下的提示输入各参数的值')
%y_points=input(sprintf('y 轴的总划分点数(整数) 是:  %f'))
%t_points = input(sprintf('x 轴(时间轴)总划分点数是: %f'))
%bond_mat =input(sprintf('债券到期时间(单位:年)是:  %f'))          %给定债券到期期限
%option_mat = input(sprintf('债券期权到期时间(单位:年)是: %f')) %给定期权到期期限
%strike_price = input(sprintf('执行价格是: %f'))
%par = input(sprintf('债券面值是: %f'))
%coupon =input(sprintf('票面利率是: %f'))
%American_or_European = input(sprintf('期权类型，欧式输入“E”或者“e”，美式输入“A”

```

```

或者“a”： %f,'s'))
%adjust_speed = input(sprintf('CIR 模型的利率调整速度： %f'))
%long_mean = input(sprintf('CIR 模型的利率长期均值： %f'))
%volatility_c = input(sprintf('CIR 模型的波动率参数： %f'))
%call_or_put = input(sprintf('看涨或是看跌期权,看涨期权输入“C”或者“c”，看跌期权输入
“P”或者“p” :%f,'s'))
%gamma = input(sprintf('变量转换参数： %d'))
%*****

sprintf('你输入的变量如下，如果正确请输入“Y”或者“y”，如果错误请输入“N”或者“n”。
')
sprintf('y 轴的总划分点数： %f,y_points)
sprintf('x 轴总划分点数： %f,t_points)
sprintf('债券到期时间： %f,bond_mat)
sprintf('债券期权到期时间是： %f,option_mat')
sprintf('债券面值是： %f,par)
sprintf('初期票面利率 1 是： %f,coupon_1)
sprintf('后期票面利率 2 是： %f,coupon_2)
sprintf('执行价格是： %f,strike_price)
sprintf('期权类型%d',American_or_European)
sprintf('CIR 模型的利率调整速度： %f,adjust_speed)
sprintf('CIR 模型的利率长期均值： %f,long_mean)
sprintf('CIR 模型的波动率参数： %f,volatility_c)
sprintf('看涨或是看跌期权%d',call_or_put)
sprintf('状态转换参数',gamma)

tt=input('yes or no: ','s');
if ( tt == 'Y' | tt=='y')

    delta_y = 1.0 / (y_points-1);
    delta_t = bond_mat / (t_points-1);
    annual_coupon_1 = par * coupon_1;
    annual_coupon_2 = par * coupon_2;

    clear bond_prices option_prices a b c coupon_flows Y Z spot_rates
    clear mmu sigma y A d_bondprice d_option r s option_node_number
    clear accrued accrued_interest          %对变量清零

    %*****
    % 对数据和划分合理性的判断
    if (delta_y >0.2)
        sprintf('y_points is too few');
        delta_y ;
        return;
    end
    if (delta_t > 0.5)
        sprintf('t_points is too few');
        delta_t;
        return;
    end
    end
%*****

%计算期权期限的时间点数

```

```

option_node_number = round(option_mat / delta_t);    % 需要取整
if (option_node_number == 0 | option_mat > bond_mat)
    sprintf('error! option_node_number out or option maturity greater than bond maturity')
end

% 寻找计算每年付利息的节点, 债券在最后一期一般是本息同时还
h=0;
for j = t_points:(-1):1
    k = ceil(h * 1.0 / delta_t);    % 一年付息一次
    if (j == t_points - k)
        coupon_flows(j) = 1;
        h = h + 1;
    else
        coupon_flows(j)=0;
    end
end

Y=zeros(y_points,1);
Z=zeros(y_points,1);
spot_rate = zeros(y_points,1);    % 计算经过 gamma 修改后偏微分方程的参数 mmu、
sigma、即期利率 spot_rates
mmu = zeros(y_points,1);
sigma = zeros(y_points,1);
spot_rate(1,1) = 1.0e15;    % 表示利率无穷大

% 以下是计算利率随机过程系数的过程
% i                表示 y 轴上的位置
% gamma            表示状态转换参数
% delta_y          表示 y 轴上一个单位的划分空间
% adjust_speed     表示调整速度
% long_mean        表示长期均值
% volatility_c      表示波动率参数
% spot_rate        表示即期利率
% mmu              表示经过 gamma 调整后的漂移率
% sigma            表示经过 gamma 调整后的波动率

% 计算即期利率,由于我们假设短期利率模型遵循 CIR 模型, 因此,  $A = (X' - X) \cdot \sigma^2 = C^2 \cdot X$ , 其中 parameter(0)是调整速度 A, parameter(1)是长期均值 X', parameter(2)是波动率参数 C
% 如果是不同的单因素模型, 那么我们可以在这个部分进行修改以适应不同的模型。
for i=1:(y_points-1)
    y = i * delta_y;
    spot_rate(i+1,1) = (1.0 - y) / (gamma * y);
    s = spot_rate(i+1,1) * (volatility_c^2.0);
    % 计算漂移率
    r = adjust_speed * (long_mean - spot_rate(i+1,1));
    r = r * (-gamma) * y^2.0;
    r = r + (gamma^2.0) * (y^3.0) * s;
    mmu(i+1,1) = r;
    % 计算 二分之一波动率;
    r = 0.5 * (gamma^2.0) * (y^4.0) * s;
    sigma(i+1,1) = r;
end

```

```

end

%将债券的价值计算分为两段，一段是期权执行日之前，一段是期权执行日之后
%先计算期权到期以后的节点的价值计算
bond_prices = zeros(y_points,t_points);
option_prices = zeros(y_points,option_node_number);
Y = zeros(y_points,1);
Z = zeros(y_points,1);
d_bondprice=zeros(y_points,t_points);
bond_prices(:,t_points) = par; %右边界值

for j = t_points:(-1):(option_node_number+1) %从最后一点向后循环
    %加上每年的利息
    if (coupon_flows(j)) %判定是否
        付息
            bond_prices(:,j) = bond_prices(:,j) + annual_coupon_2; %若是，则加上利
        息
    end
    %上边界参数的界定
    a(1) = 0.0;
    b(1) = 1.0;
    c(1) = 0.0;

    %下边界参数的界定
    a(y_points) = -mmu(y_points) / delta_y;
    b(y_points) = mmu(y_points) / delta_y - 1.0 / delta_t;
    c(y_points) = 0.0;
    d_bondprice(y_points,j-1) = -bond_prices(y_points,j)/ delta_t;

    %内部参数的界定
    for i=2:(y_points-1)
        r = mmu(i) / (4.0 * delta_y);
        s = sigma(i) / (2.0 * (delta_y^2.0));
        a(i) =(s-r);
        b(i) = -(1.0 / delta_t) -(2.0 * s) - 0.5 * spot_rate(i);
        c(i) = (s + r);
        aa = (r-s) * bond_prices(i-1,j);
        bb = ((2.0 * s) - (1.0 / delta_t)+0.5 * spot_rate(i))* bond_prices(i,j);
        cc = - (r+s) * bond_prices(i+1,j);
        d_bondprice(i,j-1) = aa + bb + cc;
    end

    %解三角矩阵
    A = diag(b) + diag(a(2:y_points),-1) + diag(c(1:y_points-1),1); %对角矩阵的形成
    Y(:,1) = d_bondprice(:,j-1);
    bond_prices(:,j-1) = max([ A \ Y ],0); %解三角矩阵结束
end

% 计算期权到期之前的价值,其中分为美式期权和欧式期权
% 以下是欧式债券期权价值和债券价值计算,期权价值与债券价值分开计算
% 期权终值的初始化

```

```

if (coupon_flows(option_node_number)) %判定期权到期点是否付息
    accrued = 0.0; %如果付息，那么增值利息等于0
else
    j = option_node_number;
    while (~coupon_flows(j)) % 否则就判定离下一次付息还有多少
        时间和增值利息
            j = j + 1; %如果不是付息日
        end
        accrued = (1.0-(j - option_node_number) * delta_t) * annual_coupon_1; %计算从期
        权执行日到下次付息点增值的利息
    end

for i=1:y_points
    if (call_or_put == 'C' | call_or_put == 'c')
        option_prices(:,option_node_number) = max(bond_prices(:,option_node_number) -
accrued - strike_price, 0.0); %计算在看涨期权到期点的期权价值
    else
        option_prices(:,option_node_number) =
max(strike_price-bond_prices(:,option_node_number) + accrued, 0.0); %计算在看跌期权到期
        点的期权价值
    end
end

end

for j=option_node_number:-1:2
    %将每年的利息加入
    if coupon_flows(j)
        bond_prices(:,j) = bond_prices(:,j) + annual_coupon_1;
    end
end
%上边界参数界定
spot_rate(1) = 1.0e15;
a(1) = 0.0;
b(1) = 1.0;
c(1) = 0.0;
d_bondprice(1,j-1) = 0;
d_option(1,j-1) = 0;

%下边界参数的界定
a(y_points) = -mmu(y_points) / delta_y;
b(y_points) = mmu(y_points) / delta_y - 1.0 / delta_t;
c(y_points) = 0.0;
d_bondprice(y_points,j-1) = -bond_prices(y_points,j)/ delta_t;
d_option(y_points,j-1) = -option_prices(y_points,j) / delta_t;

%内部点参数界定
for i=2:(y_points-1)
    r = mmu(i) / (4.0 * delta_y);
    s = sigma(i) / (2.0 * (delta_y^2.0));
    a(i) =(s-r);
    b(i) = -(1.0 / delta_t) -(2.0 * s) - 0.5 * spot_rate(i);
    c(i) = (s + r);
    d_bondprice(i,j-1) = (r-s) * bond_prices(i-1,j) +...
        ((2.0 * s) -(1.0 / delta_t)+0.5 * spot_rate(i))*

```

```

bond_prices(i,j)- ...
                (r+s) * bond_prices(i+1,j);
d_option(i,j-1) = (r-s) * option_prices(i-1,j) +...
                ((2.0 * s) - (1.0 / delta_t)+0.5 * spot_rate(i))*
option_prices(i,j) -...
                (r+s) * option_prices(i+1,j);
end
% 解三角矩阵
A = diag(b) + diag(a(2:y_points),-1) + diag(c(1:y_points-1),1); %构造三角形
矩阵

Y(:,1) = d_bondprice(:,j-1);
bond_prices(:,j-1) = max([ A \ Y ],0);
                %计算 j 时刻的债券价值

Z(:,1) = d_option(:,j-1);
option_prices(:,j-1) = max( [A \ Z ],0);
                %计算 j 时刻的期权价值

%如果是美式期权，那么还要估计美式期权的计算
if (American_or_European == 'E' | American_or_European == 'e')
    if coupon_flows(j)
        accrued=0.0;
    else
        i = j;
        while (coupon_flows(i)==0)
            i=i+1;
        end
        accrued = (1.0- (i-j) * delta_t) * annual_coupon_1;
        for i =1:y_points
            if (call_or_put == 'C' | call_or_put == 'c')
                option_prices(i,j-1) =
max(option_prices(i,j-1),bond_prices(i,j-1) - accrued - strike_price);
            else
                option_prices(i,j-1) = max(option_prices(i,j-1),strike_price
- bond_prices(i,j-1) + accrued);
            end
        end
    end
end %美式期权计算结束

end

j=1;
while ~coupon_flows(j)
    j=j+1;
end
if (j==1)
    accrued_interest = 0.0; %判断在最初时刻是否有红利，如果有，则扣除。
else
    accrued_interest = (1.0 - j * delta_t) * annual_coupon_1;
    bond_prices(2:y_points,1) = bond_prices(2:y_points,1) - accrued_interest;
end

bond_prices(:,1);
option_prices(:,1);

```

```

figure(1)
plot(bond_prices)
title('债券价格');
grid on
figure(2)
plot(option_prices)
title('期权价格');
grid on
figure(3)
plot(spot_rate(3:y_points,1),bond_prices(3:y_points,1));
title('债券在现在时刻的价格');ylabel('债券价格');xlabel('当前时刻的即期利率');
grid on
figure(4)
plot(spot_rate(3:y_points,1),option_prices(3:y_points,1));
title('期权在现在时刻的价格');ylabel('期权价格');xlabel('当前时刻的即期利率');
grid on

figure(5)
xx=(0:delta_t:bond_mat);
yy=spot_rate(3:y_points,1);
[xx,yy] = meshgrid(xx,yy);
zz = bond_prices(3:y_points,:);
surf(xx,yy,zz);
title('债券的价格');ylabel('即期利率');xlabel('时间');zlabel('债券价格');

figure(6)
xx=(0:delta_t:(option_mat-delta_t));
yy=spot_rate(((y_points-1)/2):y_points,1)';
yy=spot_rate(4:y_points,1)';
[xx,yy] = meshgrid(xx,yy);
zzz = option_prices(4:y_points,1:option_node_number);
surf(xx,yy,zzz);
title('期权的价格');ylabel('即期利率');xlabel('时间');zlabel('期权价格');
bondprices=bond_prices;
optionprices=option_prices;

% 寻找实际利率的情况下的债券的价格和所含期权的价值
% 先找到与实际利率最接近的两个利率，然后用插值法求得债券的价格和期权的价值。
for i =1:(y_points-1)
    if (r_present<=spot_rate(i) & r_present>=spot_rate(i+1))
        num=i
    end

bondprice_present=(r_present-spot_rate(i))*(bond_prices(i+1)-bond_prices(i))/(spot_rate(i+1)-spot_rate(i))+bond_prices(i)

optionprice_present=(r_present-spot_rate(i))*(option_prices(i+1)-option_prices(i))/(spot_rate(i+1)-spot_rate(i))+option_prices(i)
    else
    end
end

else
end
clear

```



## 附录 H 显性差分方程的推导

已知  $f$  是以不付红利股票  $S$  为标的资产的期权价格，其满足以下：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \beta(S, t) \frac{\partial f}{\partial S} + \alpha(S, t) \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - \gamma(S, t) = 0 \quad (\text{I-1})$$

其中， $\alpha(S, t) = (\sigma S)^2 / 2$ ， $\beta(S, t) = rS$ ， $\gamma(S, t) = rf$ ， $\sigma$  是标的资产价格的波动率， $r$  是无风险收益率。

并且对显性差分法，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial S} &\sim \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta S} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &\sim \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &\sim \frac{\left( \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta S} - \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta S} \right)}{\Delta S} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} \end{aligned} \quad (\text{I-2})$$

将 (I-2) 代入 (I-1) 可以得到：

$$\begin{aligned} \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rS \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{2\Delta S} + \frac{(\sigma S)^2}{2} \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} &= rf_{i,j} \\ \Rightarrow \\ \frac{1}{\Delta t} f_{i+1,j} - \frac{1}{\Delta t} f_{i,j} + \frac{rS}{2\Delta S} f_{i,j+1} - \frac{rS}{2\Delta S} f_{i,j} + \frac{(\sigma S)^2}{2\Delta S^2} f_{i+1,j} + \frac{(\sigma S)^2}{2\Delta S^2} f_{i-1,j} - \frac{(\sigma S)^2}{\Delta S^2} f_{i,j} &= rf_{i,j} \\ \Rightarrow \\ \frac{1}{\Delta t} f_{i+1,j} = rf_{i,j} - \frac{1}{\Delta t} f_{i,j} - \frac{(\sigma S)^2}{2\Delta S^2} 2f_{i,j} + \frac{rS}{2\Delta S} f_{i,j+1} + \frac{(\sigma S)^2}{2\Delta S^2} f_{i,j+1} - \frac{rS}{2\Delta S} f_{i,j-1} + \frac{(\sigma S)^2}{2\Delta S^2} f_{i,j-1} \\ \Rightarrow -\frac{1}{\Delta t} f_{i+1,j} &= \left( -r - \frac{1}{\Delta t} - \frac{(\sigma S)^2}{2\Delta S^2} 2 \right) f_{i,j} + \left( \frac{rS}{2\Delta S} + \frac{(\sigma S)^2}{2\Delta S^2} \right) f_{i,j+1} + \left( -\frac{rS}{2\Delta S} + \frac{(\sigma S)^2}{2\Delta S^2} \right) f_{i,j-1} \\ \Rightarrow \left( \frac{(\sigma S)^2}{2\Delta S^2} \Delta t - \frac{rS}{2\Delta S} \Delta t \right) f_{i,j-1} + \left( 1 + r\Delta t + \frac{(\sigma S)^2}{\Delta S^2} \Delta t \right) f_{i,j} + \left( -\frac{rS}{2\Delta S} \Delta t - \frac{(\sigma S)^2}{2\Delta S^2} \Delta t \right) f_{i,j+1} &= f_{i+1,j} \\ \Rightarrow \left( \frac{\sigma^2 i^2}{2} \Delta t - \frac{ri}{2} \Delta t \right) f_{i,j-1} + \left( 1 + r\Delta t + \sigma^2 i^2 \Delta t \right) f_{i,j} + \left( -\frac{ri}{2} \Delta t - \frac{\sigma^2 i^2}{2} \Delta t \right) f_{i,j+1} &= f_{i+1,j} \end{aligned}$$

令：

$$a_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j} i^2}{2} \Delta t - \frac{r_{i,j} i}{2} \Delta t$$
$$b_{i,j} = 1 + r_{i,j} \Delta t + \sigma_{i,j}^2 i^2 \Delta t$$
$$c_{i,j} = -\frac{r_{i,j} i}{2} \Delta t - \frac{\sigma_{i,j} i^2}{2} \Delta t$$

则可以得到:

$$a_{i,j} f_{i,j-1} + b_{i,j} f_{i,j} + c_{i,j} f_{i,j+1} = f_{i+1,j}$$

## 附录 I 克朗可一尼科尔森有限差分法的推导

已知  $f$  是以不付红利股票  $S$  为标的资产的期权价格，其满足以下：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \beta(S, t) \frac{\partial f}{\partial S} + \alpha(S, t) \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - \gamma(S, t) = 0 \quad (\text{I-1})$$

其中， $\alpha(S, t) = (\sigma S)^2 / 2$ ， $\beta(S, t) = rS$ ， $\gamma(S, t) = rf$ ， $\sigma$  是标的资产价格的波动率， $r$  是无风险收益率。

并且对克朗可一尼科尔森有限差分法，有：

$$\begin{aligned} f_x(x_i, t_i) &\sim \frac{f_{i+1, j+1} - f_{i-1, j+1} + f_{i+1, j} - f_{i-1, j}}{4\Delta x} \\ f_t &\sim \frac{f_{i, j+1} - f_{i, j}}{\Delta t} \\ f_{xx}(x_i, t_j) &\sim \frac{f_{i+1, j+1} - 2f_{i, j+1} + f_{i-1, j+1} + f_{i+1, j} - 2f_{i, j} + f_{i-1, j}}{2(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (\text{I-2})$$

将 (I-2) 代入 (I-1) 可以得到：

$$\begin{aligned} &\frac{f_{i, j+1} - f_{i, j}}{\Delta t} + rS \frac{f_{i+1, j+1} - f_{i-1, j+1} + f_{i+1, j} - f_{i-1, j}}{4\Delta S} + \\ &\quad \frac{(\sigma S)^2}{2} \frac{f_{i+1, j+1} - 2f_{i, j+1} + f_{i-1, j+1} + f_{i+1, j} - 2f_{i, j} + f_{i-1, j}}{2(\Delta x)^2} - \frac{r_{i, j} f_{i, j+1} + r_{i, j} f_{i, j}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \\ &\frac{1}{\Delta t} f_{i, j+1} - \frac{1}{\Delta t} f_{i, j} + \frac{rS}{4\Delta S} f_{i+1, j+1} - \frac{rS}{4\Delta S} f_{i-1, j+1} + \frac{rS}{4\Delta S} f_{i+1, j} - \frac{rS}{4\Delta S} f_{i-1, j} \\ &\quad + \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} f_{i+1, j+1} - \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} 2f_{i, j+1} + \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} f_{i-1, j+1} + \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} f_{i+1, j} \\ &\quad - \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} 2f_{i, j} + \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} f_{i-1, j} - \frac{r_{i, j} f_{i, j+1} + r_{i, j} f_{i, j}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \\ &\left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{(\sigma S)^2}{2(\Delta S)^2} \right) f_{i, j+1} + \left( -r_{i, j} - \frac{1}{\Delta t} - \frac{(\sigma S)^2}{2(\Delta S)^2} \right) f_{i, j} + \left( \frac{rS}{4\Delta S} + \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} \right) f_{i+1, j+1} \\ &\quad + \left( -\frac{rS}{4\Delta S} + \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} \right) f_{i-1, j+1} + \left( \frac{rS}{4\Delta S} + \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} \right) f_{i+1, j} + \left( -\frac{rS}{4\Delta S} + \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} \right) f_{i-1, j} + \left( \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} + \frac{rS}{4\Delta S} \right) f_{i+1, j} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \left( -\frac{rS}{4\Delta S} + \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} \right) f_{i-1,j} + \left( -\frac{r_{i,j}}{2} - \frac{1}{\Delta t} - \frac{(\sigma S)^2}{2(\Delta S)^2} \right) f_{i,j} + \left( \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} + \frac{rS}{4\Delta S} \right) f_{i+1,j} \\ & = -\left( -\frac{rS}{4\Delta S} + \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} \right) f_{i-1,j+1} + \left( -\frac{1}{\Delta t} + \frac{r_{i,j}}{2} + \frac{(\sigma S)^2}{2(\Delta S)^2} \right) f_{i,j+1} - \left( \frac{rS}{4\Delta S} + \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} \right) f_{i+1,j+1} \end{aligned}$$

令：

$$a_{i,j} = -\frac{rS}{4\Delta S} + \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2}$$

$$b_{i,j} = -\frac{r_{i,j}}{2} - \frac{1}{\Delta t} - \frac{(\sigma S)^2}{2(\Delta S)^2}$$

$$c_{i,j} = \frac{(\sigma S)^2}{4(\Delta S)^2} + \frac{rS}{4\Delta S}$$

$$b_{i,j}^* = -\frac{1}{\Delta t} + \frac{r_{i,j}}{2} + \frac{(\sigma S)^2}{2(\Delta S)^2}$$

则可以得到：

$$a_{i,j} f_{i-1,j} + b_{i,j} f_{i,j} + c_{i,j} f_{i+1,j} = -a_{i,j} f_{i-1,j+1} + b_{i,j}^* f_{i,j+1} - c_{i,j} f_{i+1,j+1}$$

## 参考文献

- [1] Abken, Peter A. 1990, “Innovations in Modeling the Term Structure of Interest Rates”. *Economic Review*, Federal Reserve Bank of Atlanta, 75: 2-27.
- [2] Andrew J. Kalotay, George O. Williams, and Frank J. Fabozzi, 1993, “A Model for the Valuation of Bonds with Embedded Options”, *Financial Analysts Journal*, May-June, 35-46, .
- [3] Babbel, David F. 1988, “Interest Rate Dynamics and the Term Structure: A Note.” *Journal of Banking and Finance*, September, 12: 401-417.
- [4] Bessler W, and Booth G. G., 1994, “An Interest Rate Risk Management Model”, *European Journal of Operation Research*, 74:243—256.
- [5] Black, F., 1976, “The Pricing of Commodity Contracts,” *Journal of Financial Economics*, 3:167-79.
- [6] Fama, E. F., 1984, “Term Premiums in Bond Returns”. *Journal of Financial Economics*,13:529-546
- [7] Black, Fisher, Emanuel Derman and William Toy, 1990, “A One Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options”, *Financial Analysts Journal*, January-February,33-39.
- [8] Black, Fischer and Piotr Karasinski, 1991, “Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal”. *Financial Analysts Journal*, 47:52-59.
- [9] Brennan, Michael J. and Eduardo Schwartz. 1979, “A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds”. *Journal of Banking and Finance* 3 July, 133-155.
- [10] Brennan, Michael J. and Eduardo Schwartz. 1982, “An Equilibrium Model of Bond Prices and a Test of Market Efficiency.” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17:301-329.
- [11] Carverhill, A., and L. Clewlow. 1994, “ On the simulation of contingent claims”, *Journal of derivatives*, 66-74
- [12] Clewlow. L., and C. Strickland, 1997, “Montle Carlo valuation of interest rate derivatives under stochastic volatility”, *The Journal of Fixed-income*, 35-45
- [13] Chan, K. C., G. Andrew Karolyi, and A. Francis. Longstaff and Anthony B. Sanders. 1992, “An Empirical Comparison of Alternative Models of the Term Structure of Interest Rates.” *The Journal of Finance*, 47: 1209-1228.
- [14] Chen, R. and L. Scott, 1993, “Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates”, *Journal of Fixed Income*, 3:14-31.

- [15] Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephen A. Ross, 1979, "Duration and the Measurement of Basis Risk", *Journal of Business*, 52:51-61.
- [16] Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephen A. Ross, 1985a, "A Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 53:363-384.
- [17] Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephen A. Ross, 1985b, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates". *Econometrica*, 53:385-407.
- [18] Duffie, Darrell. 1996, *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2nd. Princeton: Princeton University Press, Ch.7.
- [19] Duffie, D. and K. Singleton, 1993, "Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices", *Econometrica*, 61:929-52.
- [20] Fabozzi, Frank J., 1996, *Bond Market Analysis and Strategies*, 3rd, Prentice Hall, Inc.
- [21] Goldstein, R. S., 2000, "The Term Structure of Interest Rates as a Random Field", *Review of Financial Studies*, 13:365-384.
- [22] Geske, R. and K. Shastri, 1985, "Valuation by approximation: A comparison of alternative option valuation techniques". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20:45-71
- [23] Heath, David, Robert Jarrow and Andrew Morton, 1990, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation." *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 25:419-440
- [24] Heath, David, Robert Jarrow and Andrew Morton, 1992, "Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation." *Econometrica*, 60:77-105.
- [25] Ho, Thomas S. Y. and Sang-Bin Lee, 1986, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *Journal of Finance*, 41:1011-1029.
- [26] Hull, J.C., 2006, *Options, Futures and Other Derivatives* (sixth edition), Prentice Hall.
- [27] Hull, John and Alan White, 1990, "Pricing Interest Rate Derivative Securities." *The Review of Financial Studies*, 3: 573-592.
- [28] Hull, John and Alan White. 1993, "One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28:235-254.
- [29] Hull, John and Alan White, 1994a, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models." *The Journal of Derivatives*, 2:7-16.
- [30] Hull, John and Alan White, 1994b, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models." *The Journal of Derivatives*, 2:37-47.
- [31] Jamshidian, F., 1989, "An exact bond option formula", *Journal of finance*, 44:205-209.
- [32] Litterman, R. and J. Scheinkman, 1991, "Common Factors Affecting Bond Returns", *Journal of Fixed Income*, 1, 54-61.
- [33] Longstaff, Francis A. and Eduardo S. Schwartz, 1992, "Interest Rate Volatility and the

- Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model.” *The Journal of Finance*, 47:1259-1282.
- [34] McFadden, D., 1989, “A method of simulated moments for estimation of discrete response models without numerical integration”, *Econometrica*, 57:995-1026.
- [35] Macaulay, F. R., 1938, “Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in U.S. since 1856”, NBER, New York.
- [36] Merton, Robert C., 1973, “Theory of Option Pricing”, *Bell Journal of Economics and Science*, Vol 4.
- [37] Merton, Robert C., 1992, *Continuous-Time Finance*, Blackwell Publisher, Cambridge, Massachusetts USA. Chapter 3, On the Mathematics and Economics Assumptions of Continuous-Time Models, 57-97.
- [38] Nelson, C., and A. Siegel. 1987, “Parsimonious modeling of yield curve”. *Journal of Business*, 60:473-489
- [39] Pakes, A., and D. Pollard, 1989, “Simulation and the asymptotics of optimization estimators”, *Econometrica*, 57:1027-57.
- [40] Rebonato, Ricardo. 1999, “Volatility and correlation in the pricing of equity, FX, and interest-rate options”, Chichester, England, New York, John Wiley.
- [41] Rendleman, Richard J., Jr. and Brit J. Bartter, 1980, “The Pricing of Options on Debt Securities”. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15:11-24.
- [42] Schaefer, Stephen M. and Eduardo S. Schwartz. 1984, “A Two-Factor Model of the Term Structure: An Approximate Solution.” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, 413-424.
- [43] Uhrig, M. and U. Walter, 1996, “A new numerical approach for fitting the initial yield curve.” *Journal of Fixed Income*, 5: 82-90
- [44] Vasicek, Oldrich, 1977, “An Equilibrium Characterization of the Term Structure.” *Journal of Financial Economics*, 5: 177-188.
- [45] Yan, Hong. 2001, “Dynamic Models of the Term Structure.” *Financial Analysts Journal*, 57:60-76.
- [46] 布鲁斯.塔克曼著, 黄嘉斌译, 固定收益证券[M], 北京: 宇航出版社, 1999。
- [47] 李奥奈尔.马特里尼, 菲利普.普里奥兰德著, 肖军译, 固定收益证券——对利率风险进行定价和套期保值德动态方法[M], 北京: 机械工业出版社, 2002。
- [48] 郑振龙主编, 金融工程学[M], 北京: 高等教育出版社, 2003年7月。
- [49] 张亦春. 郑振龙主编, 金融市场学[M], 北京: 高等教育出版社, 2003年6月。
- [50] 林海、郑振龙, 中国利率期限结构: 理论与运用[M], 北京: 中国财经出版社, 2004。
- [51] 朱世武. 陈健恒. 交易所国债利率期限结构实证研究[J], 金融研究, 2003第10期。
- [52] 杨大楷. 国债利率管理[M], 上海: 上海财经大学出版社, 1999。

- [53] 庄晓玫. 杜海涛. 利率期限结构理论在我国证券市场的实证分析[J], 金融论坛, 2003 年第 11 期。
- [54] 谢赤. 吴雄伟. 基于 Vasicek 和 CIR 模型中的中国货币市场利率行为实证分析[J], 中国管理科学, 2002 年第 3 期。
- [55] 唐革榕. 朱峰. 我国国债收益率曲线变动模式及组合投资策略研究[J], 金融研究, 2003 年第 11 期。
- [56] 朱世武. 陈健恒. 利用均衡利率模型对浮动利率债券定价[J], 世界经济, 2005 年第 2 期。
- [57] 朱世武. 陈健恒. 交易所国债利率期限结构实证研究[J], 金融研究, 2003 年第 10 期。
- [58] 潘冠中. 单因子利率期限结构模型参数估计的数据选择[J], 数量经济技术经济研究, 2004 年第 9 期。
- [59] 康朝锋. 郑振龙. 中国利率衍生产品的定价和保值, 2005, 博士论文。
- [60] 郑振龙. 康朝锋. 中国可转债市场效率的随机占优检验[J], 当代财经, 2004 年第 3 期。
- [61] 郑振龙. 林海. 中国违约风险溢酬研究[J], 证券市场导报, 2003 年第 6 期。
- [62] 郑振龙. 林海. 中国市场利率期限结构的静态估计[J], 武汉金融, 2003 年第 3 期。
- [63] 郑振龙. 林海. 可转债发行公司的最优决策[J], 财经问题研究, 2004 年第 11 期。
- [64] 郑振龙. 林海. 可转换债券的价格敏感性分析与条款设计[J], 银行家, 2004 年第 11 期。
- [65] 林海. 郑振龙. 中国市场利率流动性溢酬实证分析[J], 武汉金融, 2004 年第 9 期。
- [66] 郑振龙. 林海. 银行资产负债中隐含期权的分解和定价[J], 金融研究, 2004 年第 7 期。
- [67] 郑振龙. 林海. 中国可转换债券定价研究[J], 厦门大学学报(哲社版), 2004 年第 2 期。
- [68] 郑振龙. 王保合. 基于极值理论的风险价值度量[J], 金融学季刊, 2005 年创刊号。
- [69] 林海. 郑振龙. 中国利率动态模型研究[J], 财经问题研究, 2005 年第 9 期。
- [70] 郑振龙. 康朝锋. 含期权债券利率风险的衡量[J], 金融论坛, 2005 年第 8 期。
- [71] 康朝锋. 郑振龙. 我国可转债转股价调整条款设计存在的问题与修正建议[J], 商业经济与管理, 2005 年第 6 期。
- [72] 康朝锋. 郑振龙. 外汇结构性产品的定价[J], 国际金融研究, 2005 年第 5 期。
- [73] 郑振龙. 康朝锋. 可转债投资对股票投资的绝对占优: 中国股票市场效率的一个反例[J], 当代财经, 2005 年第 5 期。
- [74] 郑振龙. 林海. 民间金融的利率期限结构及其风险分析: 来自标会的检验[J], 金融研究, 2005 年第 4 期。



- [75] 郑振龙. 康朝锋. “国开行可赎回债券和可回售债券的定价探讨”,《证券市场导报》, 2005 年第 12 期.
- [76] 郑泽星. 唐革榕. 商业银行住房贷款还款方式的创新和比较[J], 上海金融, 2005 年第 6 期.
- [77] 郑泽星. 黄娟. 被忽视的风险源—投资行为偏差[J], 经济纵横, 2005 年第 9 期.
- [78] 郑泽星. 信息冲击对收益波动的影响—基于交易量的研究[J], 山西财经大学学报, 2005 年第 4 期.