

学校编码: 10384
学号: 14420051300975

分类号____密级____
UDC_

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

基于 Copula 的金融风险相关性研究

——Copula 在股指期货套利中的应用

**The Research in Dependence of Financial Risk
Based on Copula Theory**

郑 文 旭

指导教师姓名: 郑振龙 教授
专 业 名 称: 金 融 工 程
论文提交日期: 2008 年 3 月
论文答辩时间: 2008 年 5 月
学位授予日期:

答辩委员会主席:
评 阅 人:

200 年 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹提交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年 月 日

中文摘要

随着金融市场的不断发展和全球化程度的加深,金融市场和金融资产间的相关关系越来越复杂,呈现非线性、非对称性和尾部相关的相关模式等,基于线性相关系数的分析方法已经不能准确反映金融市场的相关信息。Sklar 的 Copula 理论认为随机变量间相关性的信息可以由 Copula 函数完全刻画,可用于描述金融市场间的相关模式。本文用基于 Copula 函数的方法研究金融市场、金融资产间的相关程度和相关模式,探讨了关于 Copula 函数的一些理论问题以及 Copula 函数在金融市场相关性方面的应用研究等问题,尤其是在股指期货套利中的应用问题。

本文第二章详细介绍了 Copula 函数的定义、基本性质及相关定理,分析了一些常用 Copula,尤其是阿基米德族 Copula 函数在描述相关结构方面的特点,认为可以将金融市场的相关性分析分为相关程度和相关模式两部分进行,不同的 Copula 函数可以描述不同的相关模式。

对由 Copula 函数导出的一些相关性度量指标进行深入的分析,它们能捕捉到非线性相关关系和尾部相关关系。总结了常用的几种风险相关性度量指标,并进行优劣比较,认为基于 Copula 的 Kendall's τ 和 Spearman's ρ 秩相关、尾部相关系数能够较好地用于度量非线性、非对称和尾部相关的金融数据相关模式。

在实证研究中,详细介绍了本文构造的二元 Copula-t-Garch 模型,将该模型应用于金融市场相关性分析,对股指期货套利中的两个环节:指数现货与期货、现货组合与它所跟踪的标的指数进行相关性和相关模式的分析。分析发现 Symmetrised Joe-Clayton Copula 能够较好地刻画本文所构建的现货组合与沪深 300 指数之间的相关模式,说明了两之间在市场出现巨幅震荡行情时上下尾部的相关性加强;实证研究也发现指数现货与期货间存在较为明显的尾部相关关系,存在尾部渐近相关现象。因此,本文通过 Copula 的实证研究认为,在市场行情出现较大幅度震荡时,进行股指期货套利是较为有利的,能取得较好的操作准确性和安全性,因为此时组合与标的指数、期现货的相关性加强。

关键词: 二元 Copula-t-Garch 模型; 相关性; 股指期货套利

ABSTRACT

With the development of the financial markets, the dependent relationship between them become more and more complicated and represent the character of nonlinear, asymmetric and tail dependence. Methods based on the linear correlation coefficients can not describe the dependence pattern accurately. Sklar's theory of copula believe that the information about the dependence is whole contained in the copula function. In this dissertation, we research the dependence pattern of the financial markets by using copula function, and probe into some theory questions of the copula and its application in financial analysis.

Definition and some basic property and some related theory of copulas are introduced in second chapter, dependent characters of some common copula are analyzed. Several measures of dependence educed by copula function, especially archimedean copula, are analyzed inside out. The copula theory divides the analysis of dependence between financial markets into dependence index and dependence pattern. Every Copula function stands for its dependence pattern.

We probe into some measure index of dependence based on copula function, which could clutch the characters of nonlinear, asymmetric and tail dependence. Some common measure indexes of dependency are summarized. Then we conclude that the Kendall's Tau and Spearman's Rho are the right tools to describe nonlinear, asymmetric and tail dependence.

In application part, the bivarite copula-t-garch model is introduced in detail, and is applied in the analysis of financial market dependence. We applied it in two steps of hedge of index futures: Dependence pattern between index and its futures, dependence pattern between index and investing portfolio. The conclusion is that Symmetrised Joe-Clayton copula is able to describe the dependence between index and investing portfolio, which means upper and lower tail dependence increased when market varied acutely. And we also found there was remarkable tail dependence between index and its futures. So we advised that, it's the best time to do hedge of index futures when market varied acutely.

Key words: Bivarite Copula-t-Garch model; Dependence; Hedge of Index Future

目 录

第一章 绪 论	1
1.1 选题的背景	1
1.2 问题的提出	2
1.3 文献回顾	4
1.4 论文框架、思路及创新	6
第二章 Copula 理论与金融分析	9
2.1 Copula 理论简介	9
2.2 Copula 的分类	12
2.3 Copula 在金融分析中的应用	16
2.4 相关性度量	19
2.5 各种相关性度量方法的优劣比较	24
第三章 Copula 理论实证的方法设计	27
3.1 构建现货组合	27
3.2 边际分布拟合	29
3.3 Copula 函数的选择	33
3.4 相关性检验	34
第四章 Copula 在股指期货套利中的应用	36
4.1 数据说明	36
4.2 边际分布拟合的实证检验	38
4.3 Copula 函数拟合联合分布的实证分析	41
第五章 总 结	46
参考文献	47
附 件	49
致 谢	50

Contents

1. Introduction.....	1
1.1 Background.....	1
1.2 Origin.....	2
1.3 Review of Literatures.....	4
1.4 Structure and Innovation of the Paper.....	6
2. Copula Theory and Financial Analysis.....	9
2.1 An Introduction of Copula Theory.....	9
2.2 Sorts of Copula Functions.....	12
2.3 The Application of Copula in Financial Analysis.....	16
2.4 Measurements of Dependence.....	19
2.5 Comparison between Methods of Dependence Measurement.....	24
3. Method Design in Application of Copula.....	27
3.1 Construct Investing Portfolio.....	27
3.2 Marginal Distrubtion.....	29
3.3 Choose Best Copula Functions.....	33
3.4 Test of Dependence.....	34
4. Application of Copula in Hedge of Index Future.....	36
4.1 Introduction of Data.....	36
4.2 Application of Marginal Distrubtion.....	38
4.3 Application of Copula in Joint Distrubtion.....	41
5. Summarise.....	46
References.....	47
Appendix.....	49

第一章 绪论

1.1 选题的背景

近两年内发生的多起全球经济金融事件，都表明全球金融市场联系的紧密程度不断加强。

2007年2月27日中国沪深股市跌幅超过8%，并引发全球股市大跌；2007年以两个事件为开端的次贷危机——4月份美国第二大次级抵押贷款机构新世纪金融申请破产保护、6月份美国第五大投资银行贝尔斯登公司旗下两只基金因涉足次级抵押债券市场出现亏损——其对全球经济及资本市场的影响到目前为止都难以估量，但是它加强了全球各股市间下跌时的联动性，这一点是毋庸置疑的；2008年1月21日由于对美国经济衰退的担忧引发的恐慌，导致包括欧美、日韩、中国在内的股市联动性大跌，其影响延续到1月28日。

结合历史上出现的多次股灾，我们可以发现：各个市场间的相关性并非线性的，并且在下跌时相关性明显增强；金融产品的收益率分布并非理论研究中常用的正态分布，一系列数据和证据均显示其存在尖峰、肥尾特性。

不仅全球各金融市场的联系日益加强，各种金融工具间的关联性也日益加强，而随着越来越多金融产品、尤其是金融衍生产品的推出，他们之间的风险相关关系更加复杂。

总的来说，国际金融市场已发生了巨大变化，市场间的关联性越来越强，经济自由化、金融全球化的程度在加深，资讯传播速度飞速发展。金融全球化导致了各国金融市场的开放程度不断加深，金融资本可以在全球范围内迅速流动，致使不同国家和地区的各种金融市场间的联系越来越紧密，市场间的相互影响越来越大。经济全球化使国家间的经济相互依赖性增强，单个国家的经济波动会以较快的速度影响其它国家。信息流通渠道的迅猛发展，使得信息可以在较短时间散布全球，提高了金融市场的效率，也增强了市场波动的协同性，这导致各个金融市场间的相关程度和相关模式发生了较大的变化，表现为全球金融市场之间的价格协同运动，使任何国家和地区金融市场的波动都会迅速波及到其他市场，如亚洲金融危机、如今的次贷危机和近年来的多次突发性股灾等。

而目前的金融分析多是基于一些脱离实际的假设展开的，如变量服从特定的分布（如正态分布、对数正态分布等）、各个变量收益率同分布、线性相关等，

由脱离实际的假设展开的研究成果必然存在较大的偏颇，也必然会给指导实际投资带来较大的风险。

中国的沪深 300 股指期货即将推出，将给目前的风险相关性研究带来极大挑战。股权分置改革顺利完成后，我国的资本市场结构发生了根本性的改变，投资者对规避风险和投资工具多元化的需求越来越大，迫切需要金融衍生工具的发展。由于股指期货的重要功能，如套期保值、套利和投机的功能，以及金融创新的内在要求，我国资本市场推出股指期货等金融衍生产品的举措已势在必行（房振明，2006）。

然而，由股指期货等金融衍生品所带来的市场风险将超出传统范围，带来整个市场风险的叠加和放大。如果不能准确衡量股指期货与现货、现货投资组合与所跟踪的沪深 300 指数的风险相关性，则在实际投资中不仅会造成套利机会的难以把握，也会产生许多难以测算的风险。

Copula 在金融风险相关性的应用中存在的许多特性和优点，使得其能更准确和更清晰地衡量金融风险相关性。

1.2 问题的提出

相关性度量是金融分析中的一个非常重要的问题，是进行资产定价、组合选择和风险度量等研究的基础。在传统的风险管理理论中，通常假定资产收益服从正态分布，并采用 *Pearson's ρ* 线性相关系数作为资产相关性的度量指标。众多的研究成果表明，许多金融资产的收益具有明显的尖峰、肥尾特性，与正态分布假设相差较大；而当市场发生重大波动时，线性相关系数也无法反映出资产收益曲线的尾部相关特征 (Boyer, 2000)。而且，由于金融市场间和金融资产间并非简单的线性相关，也无法使用 *Pearson's ρ* 线性相关系数进行准确度量。由于 *Pearson's ρ* 脱离实际及其自身的局限，使得 *Pearson's ρ* 并不适用于实际投资的相关性度量，否则会带来潜在风险。

另一方面，国际金融市场、金融产品之间的相互影响越来越大，协同性越来越强，不仅市场间的相关程度增强了，而且相互间相关性的表现形式（即相关模式）也发生了较大变化。线性相关是相关模式中相对简单的一种模式，但实际上

金融市场中很少出现纯粹线性相关情形，大多数是非线性相关。除了线性、非线性相关模式，还有对称和非对称相关模式、尾部渐近相关和渐近独立的相关模式等。对称相关模式是指在上涨和下跌期间遵循相同的相关关系；非对称相关模式则相反，它表明金融市场在上涨和下跌期间，不仅相关程度不同，而且相关关系也不同，如下跌期间是尾部相关的，而上涨期间却是尾部渐近独立的；尾部相关模式在相关性分析中占据重要地位，这是因为它描述的是当一个市场出现极值收益（损失）时，另一个市场出现极值收益（损失）的可能性。一个金融市场的波动很容易引发其它金融市场的波动，从而使金融危机从一个市场扩散到另一个市场。

Copula 方法用于研究金融风险相关，与之前的风险相关性研究相比，其最大的特性在于：Copula 将风险相关分为相关程度和相关模式两方面进行研究，区别于之前将两者合而为一的研究方法；而且，Copula 应用的基本步骤是：第一步，构造各金融产品或各金融市场收益率的边际分布函数；第二步，将各边际分布函数作为自变量，用适当的 Copula 函数进行联合，由此构造的联合函数表现各金融产品或各金融市场收益率的联合分布函数。Copula 通过这两个步骤，将关于金融产品或金融市场的风险分解为个体风险和系统风险，个体风险由边际分布描述，而 Copula 函数与各金融产品的边际分布无关，它的性质反应了市场的特点，反映了市场风险。如果我们考虑的不是整个的市场，而是各个板块，于是每个板块就有各自连接函数 $C(u_1, \dots, u_k)$ 。不同的板块，相应的连接函数 $C(u_1, \dots, u_k)$ 是不同的，它们各自反映了所在板块的特点，这样比较不同板块 $C(u_1, \dots, u_k)$ 的特性，就比较了板块的市场特性（张尧庭，2002）。从这里就明显地看出连接函数 $C(u_1, \dots, u_k)$ 在股市风险分解中的作用。

Embrechts (2001) 提到 Sklar 定理，根据该定理，可以用 Copula 很好地描述资产间的相关模式。Copula 函数有很多类型，不同类型的 Copula 函数有不同的特征，可以描述不同的相关模式。通过一定的统计计量标准，从给定范围中挑选合适的 Copula，即可较为准确地描述实际相关模式。

Copula 正是通过对研究对象的分解和研究方法的分类，将风险相关的研究简单化了，也能更加准确地衡量风险相关性，这在股指期货的实际投资中有极大

的应用价值。

股指期货套利分为正向套利和反向套利，正向套利指买入指数现货、卖出指数期货，反向套利指买入指数期货、卖出指数现货。由于并没有现成的指数现货，因此在实际操作中常常需要构造现货组合，以跟踪标的指数的走势。

股指期货套利中最核心的问题是现货和期货相关性如何？构建的现货组合是否能很好地跟踪标的指数？投资组合与标的指数的相关性如何？投资组合的风险性如何？

由于 Copula 没有预先假定金融产品收益率满足正态分布、各个资产收益率同分布、线性相关等，它允许各资产可以服从不同的分布函数，而且这些分布函数可以是非正态分布，更加符合实际情况，由此得到的相关性度量必然更加接近真实，也可使得 Copula 在股指期货套利中可以获得更充分的利用。

因此，本文将对 Copula 在金融风险相关及风险测度上的应用加以研究，并将考察 Copula 在股指期货套利中的应用价值。

1.3 文献回顾

1.3.1 国外 Copula 方法的研究现状

Copula 函数可以理解为“相依函数”或者“连接函数”，它是把多维随机变量的联合分布用其一维边际分布连接起来的函数。最早介绍 Copula 的是 Sklar(1959)的一篇文章，提出了 Sklar 定理，为 Copula 方法体系的发展打下了基础。虽然在上世纪 50 年代就开始了 Copula 理论的研究，但直到上世纪末才逐渐把 Copula 函数应用在金融领域。Nelson(1999)比较系统地介绍了 Copula 的定义、构建方法、Archimedean Copula 及相关性。Embrechts & Lindskog (2001)把 Copula 理论引入到金融领域上来，把金融风险分析推向了一个新的阶段。直到最近几年，国外才出现了大量关于 Copula 理论应用于金融领域的文章。Bouye & Durrleman (2000)系统介绍了 Copula 在金融中的一些应用。Embrechts & Lindskog (2001)、Genest & Ghoudi (2003)分别用模拟技术、半参数估计、参数估计对 Copula 的统计推断作了详细介绍。Matteis (2001)对 Copula 函数，特别是 Archimedean Copula 函数作了较为全面地总结。Romano(2002)开始用 Copula 进行了风险分析，计算投资组合的风险值，同时用多元函数极值通过使

用 Monte Carlo 方法来刻画市场风险。Forbes & Rigobon (2002)通过固定 Copula 模型来描述 Copula 的各种相关模式,并把这一方法广泛地应用在金融市场上的风险管理、投资组合选择及资产定价上。Hu(2006)提出了混合 Copula 函数 (Mixed-Copula)的概念,即把不同的 Copula 函数进行线性组合,这样就可以用一个 Copula 函数来描述具有各种相关模式的多个金融市场的相关关系。

在实证研究方面, Fantazzini(2003)引入条件 Copula 函数的概念,同时将 Kendall 秩相关系数和传统的线性相关系数分别运用于混合 Copula 函数模型中对美国期货市场进行分析。Melchiori(2003)则从实际应用角度研究如何才能更好地选择阿基米德 Copula 函数, Romano(2002)将 Copula 函数用于意大利股票市场间的相关性研究。Patton(2004)则将 Copula 函数用于资产管理研究。

上述的文献都是基于在研究样本时间段内资产相关模式或者相关程度是不变的假设。Patton(2001)通过研究日元/美元和英镑/美元汇率间的相关性,发现在欧元体系推出前后这两种汇率之间的相关性程度发生了显著变化。在此基础上,Patton 提出引入时间参数,用时变 Copula 函数来刻画金融资产。Goorbergh & Genest (2005)在 Patton 的基础上设计出新的动态演进方程并用在时变 Copula 中对期权定价进行了研究。Guégan & Zhang(2006)开始构造拟合优度的统计检验量来判断样本数据在进行动态 Copula 建模时适用的模型结构,也就是时变相关 Copula 模型与变结构的 Copula 模型的统计推断。

在 Copula 函数的参数估计技术上, Genest & Ghoudi (2003)提出了半参数估计方法和非参数估计方法。

可以看出,到目前为止,国外有关 Copula 理论的相关文献还是主要集中在常规 Copula 函数的建模和分析上。有关动态的 copula 模型,如时变 copula、变结构 copula 模型,在近几年才开始出现和得到应用,文献资料相对较少。但可以发现动态 Copula 建模已成为目前 Copula 方法应用研究的热点。

1.3.2 国内 Copula 方法的研究现状

在国内,对 Copula 的研究起步较晚,最早是张尧庭(2002)在理论上,特别是概率论的角度上探讨了 Copula 方法在金融上应用的可行性。对 Copula 的分类研究和实证分析则是最近几年内的事情。韦艳华,张世英(2003; 2004; 2007)利

用 Copula 方法结合中国股票市场与金融市场的相关性做了较为深入的研究, 研究涉及到用 Copula 分析金融市场相关模式、多元 Copula-Garch 模型的应用及非对称相关模式等。史道济, 姚庆祝 (2004) 给出了相关结构 Copula、秩相关系数 Spearman's ρ 与 Kendall's τ 和尾部相关系数, 以及这三个关联度量与 Copula 之间的关系, 各个相关系数的估计方法等。叶五一, 缪柏其 (2006)、韦艳华, 张世英 (2006) 运用 Archimedean Copula 给出了确定投资组合条件在险价值 (CVaR) 的方法。而在动态 Copula 建模方面, 韦艳华, 张世英 (2006) 开始研究金融市场间的动态相关结构, 并实证分析变结构 Copula 模型与时变 Copula 模型在刻画动态相关结构能力上的优劣。

另外, Copula 理论也被应用于 VaR 的计算中, 柏满迎, 孙禄杰 (2007)、孔繁利, 段素芬 (2006) 等研究均表明, 基于 Copula 理论的投资组合 VaR 计算方法比传统 VaR 更加接近实际, 能更加准确地衡量投资组合的风险。

总的来说, 国内对 Copula, 特别是动态 Copula 的实证分析还是比较少见。

1.4 论文框架、思路及创新

1.4.1 思路及框架

本文首先对 Copula 理论进行了系统的整理、总结; 全面地介绍了目前有关 Copula 的概念、分类和性质等; 对 Copula 函数用于建模的步骤和方法进行了细致的总结。

在 Copula 理论介绍及分析的基础上, 本文结合 Copula 的特性及股指期货投资实务中的需要, 较为新颖地提出了自身的实证思路和实证设计方案, 并得出了较有意义的实证结论。

本文框架安排如下:

第一章 绪论。主要介绍本文的选题背景和意义, 以及目前理论研究中关于相关性和相关模式的研究现状, 并进而引出 Copula 理论, 探讨 Copula 理论在沪深 300 股指期货推出后的股指期货套利中具有怎样的研究和应用价值; 最后是对国内外关于 Copula 理论的研究现状进行回顾和总结。

第二章 Copula 理论与金融分析。介绍 Copula 方法的理论基础, 包括 Copula 函数的定义、性质以及 Copula 的分类、常用的 Copula 函数等内容, 特别是重点

介绍了阿基米德族 Copula 函数，并对多种相关性度量指标加以介绍并进行优劣比较，进而讨论了用 Copula 函数描述相关性的优势以及 Copula 函数对秩相关系数的改进，最后介绍了基于 Copula 的尾部相关系数。

第三章 本文构造的实证方法与步骤。详细介绍了本文进行该实证研究的思路和意义，论证了构造的实证方法的可行性和合理性，对整个实证过程进行了分步骤的详细说明，并且对实证中涉及到的一些研究方法和检验方法加以介绍。

第四章 实证研究——Copula 在股指期货套利中的应用。基于第二章所述的 Copula 理论和相关性度量指标，按照第三章所构造的实证方法，对沪深 300 指数、权重股以及股指期货套利中用以跟踪标的指数的现货投资组合的收益率数据进行实证分析，拟合了沪深 300 指数与权重股、沪深 300 指数与现货投资组合的二元 Copula 联合分布函数，进行相关模式的分析和秩相关、尾部相关的分析。

第五章 总结。对全文加以总结，并对进一步的研究进行展望。

1.4.2 创新与不足

本文的主要创新在于：

a 对几种重要的 Copula 函数及它们在建模时的应用特点进行了详细的讨论。在此基础上，根据金融市场数据收益率分布的尖峰、肥尾特性，引入了 t-Garch 模型来描述边际分布，构建了二元 Copula-t-Garch 模型，用此改进后的模型来分析股指期货套利中两个环节的相关程度和相关模式，结果表明改进后的模型能更好地拟合实际数据，二元 Copula-t-Garch 模型能够较好地考察期货与现货、组合与标的指数的相关程度和相关模式；

b 本文最大的创新点在于实证研究中将 Copula 理论应用于股指期货套利的研究，通过指数跟踪方法自行构建用于股指期货套利的现货投资组合，进而用 Copula 理论、基于 Copula 的相关性度量方法来度量该现货组合与沪深 300 指数、沪深 300 指数与指数期货的相关程度和相关模式；研究现货组合与沪深 300 指数相关性的目的就是为在股指期货交易中找出与股指期货标的指数相关性强的现货组合，提高期货交易的有效性。该研究有别于大部分文献仅将 Copula 实证研究局限于考察两个市场间的相关性的现状，如李悦, 程希骏(2006) 上证指数和恒生指数、曾健, 陈俊芳(2005) 上证 A 股与 B 股的 Copula 相关分析，使得 Copula

方法具备了更强的实践意义，对于 Copula 理论在纯理论的研究基础之上，加强实务应用性提供了一种思路。

另外，本文也存在一些不足，如本文所构建的数学模型较为复杂，程序实现较为困难，直接导致了本文实证方面的完整性不足，这也限制了 Copula 理论的推广应用；只限于二元分析等。

第二章 Copula 理论与金融分析

2.1 Copula 理论简介

“Copula”一词首次出现在 Sklar 1959 年的一篇统计学文献中，在拉丁语中是“连接”的意思，因此 Copula 函数也就是指连接函数，其基本原理是将各随机变量的一维边际分布函数连接起来，用以表示多维随机变量的联合分布函数。1959 年，Sklar 即提出了 Copula 理论，指出可以将一个联合分布分解为它的 k 个边际分布和一个 Copula 函数，其中 Copula 函数描述变量间的相关结构 (Embrechts, 2001)。但直至 1999 年，Nelson(1999) 才首次较系统地总结了 Copula 理论，系统介绍了 Copula 定义、构建方法和相关性等，Embrechts(1999) 将 Copula 理论引入金融应用研究，并由此引发了很多学者的研究。

本节的介绍也将从 Sklar 定理讲起。

2.1.1 Copula 的定义

1 Sklar 定理

Sklar 定理是 Copula 函数的存在性定理，是 Copula 应用的理论基础。

Sklar 定理：设随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的联合分布函数是 F ，边际分布函数分别为 F_1, F_2, \dots, F_n ，则存在一个 Copula 函数 C ，使得

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)), \quad -\infty \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq +\infty \quad (2.1)$$

成立。如果 F_1, F_2, \dots, F_n 都是连续分布函数，则 C 是唯一的；

反之，如果 C 是一个 Copula 函数， F 都是一维分布函数，则由式 (2.1) 定义的函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个边际分布为 F_1, F_2, \dots, F_n 的 n 维联合分布函数。

随机向量的联合分布函数是刻画随机向量概率性质的最好工具之一，它包含了两方面的信息：一个是变量的边际分布信息，另一个是变量间相关结构的信息。设随机向量 $X \sim (X_1, \dots, X_d)$ 的联合分布函数为 $F(x_1, \dots, x_d)$ ，由联合分布函数容易得到变量的边际分布函数，在联合分布中除去边际分布的信息后，就剩下相关结构的信息了。Copula 通过连接随机变量的边际分布来构造变量的联合分布函数，可以较大程度地保持随机变量数据的信息量，保证研究的准确性和真实性。

不仅如此，Sklar 定理还给出了如何利用联合分布函数求 Copula 函数的方

法，即通过式 (2.1) 利用联合分布函数和边际分布的反函数来求 Copula 函数：

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (2.2)$$

证明如下：

$$\text{令 } u_1 = F_1(x_1), \dots, u_n = F_n(x_n)$$

$$\text{则 } x_1 = F_1^{-1}(u_1), \dots, x_n = F_n^{-1}(u_n)$$

将以上两式带入式 (2.1)，即可得到式 (2.2)。

Sklar 定理向我们揭示：可以用边际分布函数和 Copula 函数来结合构造更多的联合分布函数，而不是仅仅局限于以前文献研究中的多元正态分布和多元 t 分布。

2 Copula 函数定义

Nelsen(1995)给 Copula 函数作了一个一般定义：

n 维 Copula 函数是指具有以下性质的函数 C：

- a、 $C \in [0,1]^n$ ；
- b、C 对它的每一个变量都是递增的；
- c、C 的边际分布 C_k 满足： $C_k(u_k) = C(1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k$ ，其中 $u \in [0,1]$ ，

$k \in [1, n]$ 。

2.1.2 Copula 函数的性质

n 维 Copula 函数 C 具有如下基本性质：

- a、对于变量 u 和 v， $C(u,v)$ 都是递增的；即若保持一个边际分布不变，联合分布将随着另一个边际分布的增大而增大；
- b、 $C(0,v)=C(u,0)=0, C(1,v)=v, C(u,1)=u$ ；即只要有一个边际分布的发生概率为 0，相应的联合分布的发生概率就为 0；若有一个边际分布的发生概率为 1，则联合分布由另一个边际分布给出；
- c、对于所有的变量 $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ ，如果 $u_1 < u_2$ ， $v_1 < v_2$ ，那么

$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$; 即若边际分布 u, v 的值同时增大, 则相应的联合分布的值也增大;

- d、若变量 u, v 独立, 则 $C(u, v) = uv$;
- e、设连续随机变量 X_1, \dots, X_d 的 Copula 函数为 C_{X_1, \dots, X_d} , 如果 $\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_d(X_d)$ 都是严格单增函数, 则

$$C_{X_1, \dots, X_d}(u_1, \dots, u_d) = C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_d(X_d)}(u_1, \dots, u_d)$$

即连接函数对于随机变量的严格单调增变换是不变的;

证明如下: (张尧庭, 2002)

设 (ξ, η) 的联合分布是 $F(x_1, x_2)$, 各自的边际分布为 $\xi \sim G(x)$,

$\eta \sim H(y)$, 于是由连接函数 $C(u_1, u_2)$ 的性质知道:

$$P(\xi < x, \eta < y) = F(x, y) = C(G(x), H(y))$$

若 $s(x), t(y)$ 分别是 x, y 的严格单调递增函数, 因此它们的反函数自然存在而且唯一, 只考虑所涉及函数均是连续的情形, 那么我们可以看出:

$$P(s(\xi) < s, t(\eta) < t) = P(\xi < s^{-1}(s), \eta < t^{-1}(t))$$

由于

$$F_{s(\xi)} = P(s(\xi) < x) = P(\xi < s^{-1}(x)) = G(s^{-1}(x))$$

$$F_{t(\eta)} = P(t(\eta) < y) = P(\eta < t^{-1}(y)) = H(t^{-1}(y))$$

于是有

$$\begin{aligned} P(s(\xi) < x, t(\eta) < y) &= P(\xi < s^{-1}(x), \eta < t^{-1}(y)) \\ &= F(s^{-1}(x), t^{-1}(y)) = C(G(s^{-1}(x)), H(t^{-1}(y))) \\ &= C(F_{s(\xi)}(x), F_{t(\eta)}(y)) \end{aligned}$$

这证明了连接函数对于随机变量的严格单调增变换是不变的。

其中性质 a、b、d 可以扩展到三维甚至更高维的情况, 但性质 c 只有在二维情况下才成立。

2.1.3 Copula用于度量风险相关的优点

1、Copula 理论不限制边际分布的选择，通过各个随机变量根据自身特点建立相应的边际函数，再结合 Copula 函数，则可以更为灵活地构建多元分布函数。

2、在运用 Copula 理论建立模型时，边际分布反映的只是单变量的个体信息，而变量间的相关信息完全由 Copula 函数来体现。这样就可以将随机变量的边际分布和它们之间的相关关系分开来研究，让我们可以将精力集中在更重要的相关关系的研究上面，在简化了建模过程的同时也有助于我们对很多金融问题的理解和分析。

3、传统的线性相关关系在做非线性的单调增变换时数值会发生变化，而 Copula 理论中的一致性和相关性测度指标在单调增变换的条件下则不会发生改变。这一特性使 Copula 理论的相关性度量指标适用范围更广、实用性更强。

4、通过 Copula 函数的选择使用，可以捕捉到变量间非线性、非对称的相关关系，特别是容易捕捉到分布尾部的相关关系。

5、应用 Copula 理论，可以将风险分为两个部分：个体风险和个体相依的结构风险，即 Copula 函数可以将金融市场的风险分解分析。

2.2 Copula的分类

在金融研究中常用的Copula函数主要分为两大类：椭圆族Copula函数和阿基米德族Copula函数。

2.2.1 椭圆族Copula函数

假设 F 是一个椭圆分布的多元累积分布函数， F_i 表示其边际分布， F_i^{-1} 是边际分布函数的分位数函数，那么由 F 确定的连接函数椭圆Copula形式为：

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

椭圆族Copula函数在金融领域的应用十分广泛，其主要的原因是椭圆族Copula函数的性质容易掌握，而且模拟比较容易实现。但是，由于椭圆分布的对称性，椭圆族Copula函数存在对称的尾部相关性，无法捕捉到变量间的非对称相关和尾部相关。

该族函数主要包括Normal Copula和t-Copula函数，由于本文将重点应用阿

基米德族函数，在此不详述椭圆族Copula函数，有意者请参考Bouyé（2000）

2.2.2 阿基米德族Copula函数

Genest & Mackay(1986)给出了阿基米德Copula函数的定义。

阿基米德族Copula定义：对 $\forall \varphi \in \psi$ ，存在逆函数 $\varphi^{-1}: [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ ，且每个 $\varphi(t)$ 均可生成一个Copula，也即生成一个具有固定边际分布是服从 $[0, 1]$ 上均匀分布的n维分布函数，其表示形式为：

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n))$$

其中 φ^{-1} 是算子 φ 的分位数函数

这样的Copula成为阿基米德族Copula函数。

通过阿基米德族Copula的形式可以知道，我们仅需知道算子 $\varphi(t)$ 的表示形式就可以确定一种相应的Copula形式。不同的算子选择，会产生不同类别的阿基米德族Copula函数，具体情况如下：（由于本文实证部分将主要使用二元Copula函数，在此仅介绍二元的情况）

a、Gumbel Copula

当算子 $\varphi(t) = (-\ln t)^\alpha$ 时，所得的Copula函数定义为Gumbel Copula，表达为：

$$C_G(u, v; \alpha) = \exp\{-[(-\ln u)^{1/\alpha} + (-\ln v)^{1/\alpha}]^\alpha\}$$

其中 $\alpha \in [1, \infty)$ 。当 $\alpha = 1$ 时，随机变量 u 、 v 独立，即 $C_G(u, v; 1) = uv$ ；当 $\alpha \rightarrow 0$ 时，随机变量 u 、 v 趋向于完全相关。Gumbel Copula 函数上尾的相关性较强，能较好地拟合上尾数据，故在金融领域的实际应用中，一般用Gumbel Copula来刻画上尾风险。如果现货组合与沪深300风险关联的相关结构以Gumbel Copula 函数描述，则表明当证券市场出现利好行情时，现货组合可以更好地跟踪沪深300指数。

b、Rotated Gumbel Copula

该函数为Gumbel Copula的生存函数，即

$$C_{RG}(u, v; \alpha) = C_G(1-u, 1-v; \alpha)$$

该函数是Gumbel Copula函数在对称象限里的镜像，具有与Gumbel Copula函数相反的特征。因此，Rotated Gumbel Copula函数下尾的相关性较强，一般用于刻画下尾风险。

c、Joe-Clayton Copula

当算子 $\varphi(t) = \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$ 时，所得的Copula函数定义为Joe-Clayton Copula，函数表达式为：

$$C_{JC}(u, v; \alpha) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$$

其中 $\alpha \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ 。当 $\alpha \rightarrow 0$ 时，随机变量 u 、 v 趋向于独立；当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时，随机变量 u 、 v 趋向于完全相关。Joe Clayton Copula函数下尾的相关性较强，能较好地拟合下尾数据，故在金融领域的实际应用中，一般用Joe Clayton Copula来刻画下尾风险。如果现货组合与沪深300风险关联的相关结构以Joe Clayton Copula函数描述，则表明当证券市场出现利空行情时，现货组合可以更好地跟踪沪深300指数。

d、Rotated Clayton Copula

该函数为Joe Clayton Copula的生存函数，即

$$C_{RJC}(u, v; \alpha) = C_{JC}(1-u, 1-v; \alpha)$$

该函数是Clayton Copula函数在对称象限里的镜像，具有与Clayton Copula函数相反的特征，因此，Rotated Clayton Copula函数上尾的相关性较强，一般用于刻画上尾风险。

e、Symmetrised Joe-Clayton Copula

函数表达式为：

$$C_{SJC}(u, v | \tau_u, \tau_l) = 0.5(C_{JC}(u, v | \tau_u, \tau_l) + C_{JC}(1-u, 1-v | \tau_u, \tau_l)) + u + v - 1$$

由该表达式可知，Symmetrised Joe-Clayton copula结合了Joe-Clayton和Rotated Joe-Clayton Copula函数的优点，在上下尾均有较强的相关性，可用于刻画上下尾风险关联；如可用该函数描述世界各股票市场在大涨及大跌期间相关

性均加强的状态。

由于Gumbel或Clayton Copula函数通常只能度量变量间的上尾相关性或下尾相关性,为了可以在同一个Copula函数中同时对上尾部和下尾部的相关性进行度量,Patton(2003)构建了混合Copula函数,Symmetrised Joe-Clayton copula也是根据该思路构建的二元混合Joe-Clayton copula。

f、Frank Copula

当算子 $\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}$ 时,所得的Copula函数定义为Frank Copula,函数表达式为:

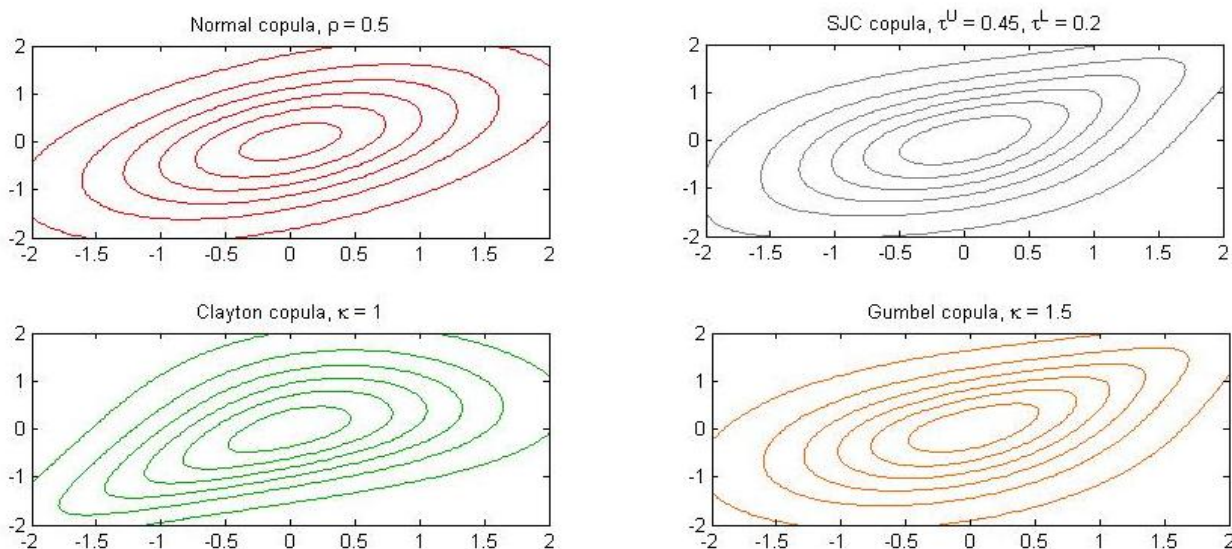
$$C_F(u, v; \alpha) = -\frac{1}{\alpha} \log \left[1 - \frac{(1 - e^{-\alpha u})(1 - e^{-\alpha v})}{1 - e^{-\alpha}} \right]$$

其中 $\alpha \neq 0$ 。 $\alpha > 0$ 时,随机变量 u 、 v 正相关, $\alpha \rightarrow 0$ 时随机变量 u 、 v 趋向于独立, $\alpha < 0$ 时随机变量 u 、 v 负相关。Frank Copula函数的上尾和下尾相关系数均等于零,变量在Frank Copula函数分布的尾部都是渐近独立的并且变量间具有对称的相关模式。对金融市场的收益率序列来说,无论是正收益还是负收益,只要收益的绝对值相等,收益率序列之间的相关程度就相同,因此Frank Copula函数只适合于描述具有对称相关结构的金融市场之间的相关关系。此外由于变量在分布的尾部是渐近独立的,因此Frank Copula函数在上尾和下尾具有相同的相关模式,可用于描述具有对称相关模式的金融市场间的相关关系。

该函数与Symmetrised Joe-Clayton Copula描述的上下尾相关性不同,Symmetrised Joe-Clayton copula可用于描述非对称的上下尾相关模式,而Frank Copula只能描述对称的相关模式。

对于以上各函数所能刻画的相关模式，可以由下图看出：

图表 1：阿基米德族 Copula 函数等概率线图形



2.3 Copula 在金融分析中的应用

在金融分析中，如相关性分析、风险度量、组合选择中，一个重要步骤是确定资产间的联合分布。在以往的研究和应用中，多数以多元正态分布假设为基础，但是许多实证研究表明多元正态分布不是好的模型，主要原因有三：首先，边际正态分布不能描述金融数据中的厚尾和偏斜现象；第二，多元正态分布将金融资产间的相关结构限制为高斯相关结构；第三，金融资产间存在大量非线性相关，多元正态分布中的皮尔逊相关系数是线性相关性的度量，不能度量复杂的非线性相关。根据 Copula 理论，可以从边际分布和相关结构两个方面对资产间联合分布建模，实际上 Copula 起到构建新的联合分布函数的作用。通过 Copula 方法，可以构造大量的联合分布函数用于金融分析，而并非局限于多元正态分布或多元 t 分布等。

2.3.1 金融市场相关性分析中的应用

受经济、金融全球化的影响，金融市场间的相互影响在增强，这促使人们考虑金融市场的相关性问题，从随机变量角度看，这需要研究变量间的相关关系。

Sklar 定理表明, 随机变量间相关性的信息包含在 Copula 函数中, 与边际分布无关。因此, 在研究金融市场的相关性时, 可以将相关性的信息剥离出来, 用 Copula 函数进行深入研究, 而边际分布可以是任意的连续分布。用 Copula 函数研究金融市场的相关性, 突破了用一些相关性系数度量相关程度的局限, 相关性方法是用一个实数来描述相关的程度, 并没有给出相关模式的全面描述, 前面提及的各种相关性度量都是侧重于一定形式的相关性, 如线性相关系数给出线性相关程度, 尾部相关系数度量尾部相关的程度。具有相同相关性度量的两随机变量, 可以有不同的相关模式, 如存在这种情况, Kendall 秩相关系数都为 0.5, 但是却有明显不同的相关模式, 其中 Frank Copula 呈现对称相关模式, 而且两尾是渐近独立的; Symmetrised Joe-Clayton Copula 呈现非对称、两尾均渐近相关的相关模式; Gumbel Copula 上尾渐近相关, 下尾渐近独立; Clayton Copula 上尾渐近独立, 下尾渐近相关。在实际的金融分析中, 有很多涉及尾部相关性的问题, 如金融风险管理中高置信水平的 VaR 的估计问题, 单纯用尾部相关系数也不能很好描述尾部呈现渐近相关时的相关模式。例如, 对于 Gumbel Copula 和 GS Copula 当参数值都为同一 θ 时, 有相同的上尾相关系数 $\lambda_u = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$, 但是前者下尾是渐近独立的, 后者的下尾渐近相关系数为 $\lambda_l = 2^{\frac{1}{\theta}}$ 。所以用单个相关性度量指标甚至多个相关性度量指标都无法准确描述金融市场所包含的相关性的信息, 只有 Copula 函数才是对相关模式的全面描述。

2.3.2 组合选择和风险管理中的应用

金融市场充满了风险, Markowitz 用方差度量风险, 并提出通过分散化投资可以降低风险。投资者可以通过选择相关性较小的资产进行组合, 以降低投资风险。考虑一个由 n 种资产构成的投资组合, 用方差来描述资产的风险, 这样投资组合的风险为

$$\sigma^2 = \sum_i^n \sum_j^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = \sum_i^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i>j}^n \sum_j^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

其中 σ^2 为投资组合的风险; σ_i^2 为资产 i 的风险; w_i 为资产 i 在组合中的权

重, ρ_{ij} 为资产 i 和 j 的线性相关系数。其中, $\sum_i^n w_i^2 \sigma_i^2$ 仅与单个资产的风险有关, 称为非系统风险或个别风险; $2 \sum_{i>j}^n \sum_j^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$ 是由投资组合中的各项资产间的相关性所带来的风险, 称为系统风险。可以看出, ρ_{ij} 的大小是影响组合风险的重要因素, 因此可以选择相关性较小的资产来规避风险。

在多元正态分布假设下, 任意组合资产的收益都服从正态分布, 线性相关系数能较全面地描述资产间的关联性, 所以 Markowitz 的均值-方差资产选择模型是可行的。但大量的实证表明, 多元正态的假设经常与客观事实相违背, 因此根据线性相关系数进行组合选择的方法会产生误导。

考虑用效用函数方法进行组合选择。建立在西方经济学基础上的主流金融理论认为市场是完善的、投资者是理性的、追求效用最大化, 可以将效用函数表示为财富的函数, 投资者进行投资决策时要使期望效用最大化。

如果给定效用函数, 资产的联合分布就成为影响组合选择的唯一因素。在实际应用中, 关键是要找到恰当的联合分布函数来描述数据。运用 Copula 理论, 通过对边际分布和相关结构分别建模, 可以构建更适合数据的多元分布。这使 Copula 在组合选择中具有广阔的应用前景。

假定随机变量 X_1 和 X_2 分别代表两种金融资产的损益, 它们的边际分布分别为 $F_1(X_1)$ 和 $F_2(X_2)$, 具有 Copula 函数 C , 投资组合为 $Y = \omega X_1 + (1-\omega)X_2, 0 \leq \omega \leq 1$, 则组合的损益分布为:

$$\begin{aligned} P\{Y \leq u\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\frac{u-(1-\omega)x_2}{\omega}} dC(F_1(x_1), F_2(x_2)) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\frac{u-(1-\omega)x_2}{\omega}} c(F_1(x_1), F_2(x_2)) f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

其中 c 为 Copula 密度函数, $F_i(\cdot)$ 和 $f_i(\cdot)$, $i=1, 2$ 分别为边际分布函数和边际密度函数。给定置信水平 α , 由 $P\{Y \leq VaR_\alpha\} = 1-\alpha$ 可得到 VaR。当然, 一般难以得到 VaR 的解析表达, 可以用模拟方法得到 VaR。

2.4 相关性度量

2.4.1 金融市场间的相关性分析

受经济全球化和金融一体化、金融创新、信息技术和竞争等因素的影响，全球金融市场正发生着根本性的结构变化，金融市场间的相互依赖、相互影响与日俱增，这促使了对金融市场间的相关性如相关程度、协同运动、波动的传导和溢出等的研究。Copula 理论用于金融市场间的相关性分析具有其独特的优势，本文也将利用 Copula 进行投资组合与沪深 300、沪深 300 指数现货与指数期货的相关性分析。

首先，应用 Copula 理论可以直接对相关结构建模，相关结构与边际分布无关，因此一元收益分布可以是任意的分布；

其次，如果对变量作非线性的单调增变换，由 Copula 函数导出的一致性和相关性测度的值不会改变，因此可以捕获随机变量间非线性的相关关系；

再次，Copula 函数还可以迅速而有效地捕捉到非正态、非对称分布的尾部信息，这对尾部相关性分析是极为有用的；

最后，Copula 函数可以将随机变量之间的相关程度和相关模式有机的结合在一起，不仅可以得到度量相关程度的相关参数，还可以得到描述相关模式的 Copula 函数，因此可以更全面地刻画随机变量间的相关关系。

在实际的金融分析中，有很多涉及尾部相关性的问题，如金融风险管理中 VaR 的估计问题、再保险的定价问题等等，但简单用线性相关系数或是单纯用尾部相关系数来描述变量的尾部相关性显然是不充分的，因为线性相关系数只能度量变量间的线性相关程度，而尾部相关系数虽然可以作为单调相关程度的度量，但它也只能对变量间的相关性做出简单的描述。为此 Juri 提出了尾部事件的 Copula 收敛理论，指出可以用 Copula 函数来描述尾部相关的分布，特别地对阿基米德 Copula 函数，当它的母函数为特定形式时，上尾相关 Copula 函数和下尾相关 Copula 函数将各自收敛于一个易于计算的 Copula 函数，这个 Copula 函数包涵了尾部相关的全部信息，因此它可以更全面、更深入的刻画变量之间的尾部相关关系，这为它们在实际中的应用提供了有利的理论基础。

Forbes (2002) 通过对金融市场历史数据的观察，使我们知道，一个金融市场中的小波动一般不会对整个市场产生很大的影响，但一旦波动达到或超过一定程

度，其影响便会显现并可能迅速蔓延，即产生波动溢出效应。尾部相关性分析可以有效的捕获这种波动信息，基于 Copula 的尾部相关分析将发挥更大的效力。

2.4.2 关于相关性的一般度量方法

两个随机变量之间的关系一般用相关性来描述，相关系数是相关性的一种度量。常见的相关性度量有 Pearson' ρ 、Spearman' ρ 、Kendall' τ 。第一种度量通常称为线性相关性度量，后两种度量称为秩相关性度量(吴喜之，王兆军，1999)。在相关分析中，大多数研究者都采用 Pearson' ρ 来度量随机变量之间的相关性。然而，Pearson' ρ 实际上只是在线性变换下不变的一种相关性指标，在多元正态分布的情况下或者在评价线性相关性的时候，用它来度量随机变量之间的相关性是足够的。但是当涉及到非正态性或者非线性函数的相关性时，它可能会导出错误的结论(张尧庭，2002)。因此，为了更好地刻画非正态行为或非线性的随机变量之间的相关性结构，就要寻求一种和 Pearson' ρ 不同的相关性度量，来刻画不同随机变量之间的相关性结构。

而 Copula 函数可以在不知道联合分布的情况下，通过边际分布来研究随机变量之间的相关性结构。Copula 函数作为相关性结构的一个刻画，它包含了所有关于这些随机变量之间的相关性结构的信息。

根据 Copula 函数的性质 a，若对变量作单调增的变换，相应的 Copula 函数不变，因而由 Copula 函数导出的一致性和相关性度量的值也不会改变。这意味着与常用的相关性测度——线性相关系数相比，由 Copula 函数导出的一致性和相关性测度应用范围更广、实用性更强。常见的几种重要的一致性和相关性测度，如 Spearman' ρ 、Kendall' τ ，都可以重新由 Copula 函数给出。特别地，对一些 Copula 函数，如阿基米德族 Copula，这些测度还与 copula 函数中的参数有一一对应关系，且很容易求得(Frees & Valdez, 1998)。

2.4.3 基于Copula的和谐性和一致性度量

在该部分我们讨论两种重要的度量和谐性和一致性的相关性度量指标——Kendall' τ 、Spearman' ρ ，它们提供了比线性相关系数更好的、用以度量非椭圆分布的相关性的度量工具。关于 Kendall' τ 、Spearman' ρ 的更详细的知识，可以参考 Kendall & Stuart (1999)。

一 Kendall' τ 定义

对于随机变量 $(X, Y)^T$ ，Kendall' τ 为：

$$\begin{aligned}\tau(X, Y)^T &= P\{(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0\} - P\{(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0\} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign}((X_i - X_j)(Y_i - Y_j))\end{aligned}\quad (2.3)$$

其中， $(X_i, Y_i)^T, (X_j, Y_j)^T$ 分别表示随机变量 $(X, Y)^T$ 的两个样本值；

$$\text{sign}((X_i - X_j)(Y_i - Y_j)) = \begin{cases} 1, & (X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0 \\ 0, & (X_i - X_j)(Y_i - Y_j) = 0 \\ -1, & (X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0 \end{cases}$$

由于若 $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0$ ，表示随机变量 X, Y 的变化是一致的；若 $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0$ ，表示随机变量 X, Y 的变化是相反的，因此 $\tau(X, Y)^T$ 就反映了两个随机变量变化一致与否的程度。它是一种协调性度量，既可以度量线性的相关性，也可以度量非椭圆分布的随机变量之间的相关性，这是它和常见线性相关系数之间的主要区别。

二 Spearman' ρ 定义

对于随机变量 $(X, Y)^T$ ，Spearman' ρ 为：

$$\rho_s(X, Y)^T = 3(P\{(X_i - X_j)(Y_i - Y_k) > 0\} - P\{(X_i - X_j)(Y_i - Y_k) < 0\}) \quad (2.4)$$

其中， $(X_i, Y_i)^T, (X_j, Y_j)^T, (X_k, Y_k)^T$ 分别表示随机变量 $(X, Y)^T$ 的三个独立样本值；

注意：尽管 Kendall' τ 和 Spearman' ρ 都是和谐概率减去不和谐概率，但式 (2.4) 中 X_j 和 Y_k 是独立的， $(X_i, Y_i)^T$ 与 $(X_j, Y_k)^T$ 具有不同的相关结构，而式

(2.3) 中 $(X_i, Y_i)^T$ 与 $(X_j, Y_j)^T$ 具有相同的相关结构, 即 Spearman' ρ 可用于衡量变相关结构变量的相关性, 而 Kendall' τ 用于衡量固定相关结构变量的相关性。

根据 Embrechts (2001) 证明, 我们可得到如下两个基于 Copula 的相关性度量指标的表达式; 详细证明过程请参见 Embrechts (2001)

3 基于 Copula 的 Kendall' τ

对于随机变量 $(X, Y)^T$, 假设其联合分布函数为 Copula 函数 C , 则 $(X, Y)^T$ 的 Kendall' τ 系数可以表示为:

$$\tau(X, Y)^T = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 = 4E(C(U, V)) - 1$$

不仅如此, 对于特定的 Copula 函数, 如阿基米德族 Copula, 由于该族函数均可由特定的算子 (Generator) $\varphi(t)$ 生成, Kendall' τ 更可表达为 $\varphi(t)$ 的函数, 具有解析解 (Genest & McKay, 1986)¹:

$$\tau(X, Y)^T = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt$$

因此, 对于阿基米德族函数, 可以通过非参数估计方法求取 Copula 函数的参数, 这将在下文详述。

4 基于 Copula 的 Spearman' ρ

对于随机变量 $(X, Y)^T$, 假设其联合分布函数为 Copula 函数 C , 则 $(X, Y)^T$ 的 Spearman' ρ 系数可以表示为:

$$\rho_s = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) du dv = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3$$

2.4.4 基于 Copula 的尾部相关性度量

尾部相关系数, 它表示当一个观测变量的实现值为极值时, 另一个变量也出现极值的概率, 例如它度量沪市的大波动是否会引引起深市的大波动, 沪深 300 指数的深幅下跌是否会导致跟踪指数的现货投资组合或相关权重股的深幅下跌, 这方面的研究在实际操作中具有很强的实用性。在 Copula 函数出现之前, 尾部相关性的分析一直是一件棘手的事情。

¹ 具体函数表达式详见附件

接下来我们首先介绍尾部相关系数的概念，再分析为什么 Copula 函数使得尾部相关性的分析变得简单了。

以二元变量尾部相关性为例。尾部相关性包括上尾相关和下尾相关，度量的是变量间的极值相关性。

尾部相关系数定义：假设随机变量 X 、 Y ，其边际分布分别为 F_1 、 F_2 ，则 X 、 Y 的上尾相关系数为：

$$\lambda_u = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P[Y > F_2^{-1}(\alpha) | X > F_1^{-1}(\alpha)] \quad \lambda_u \in [0,1]$$

其中， α 为边际分布函数 F_1 、 F_2 的分位数， $\alpha \in (0,1)$ ；

相应地，下尾相关系数为：

$$\lambda_l = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P[Y \leq F_2^{-1}(\alpha) | X \leq F_1^{-1}(\alpha)] \quad \lambda_l \in [0,1]$$

而在将 Copula 引入金融分析后，尾部相关系数可以简单地表示为 Copula 函数的表达式。

我们假设 X 、 Y 的联合分布函数为 Copula 函数 C ，则

$$\begin{aligned} \lambda_l &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P[Y \leq F_2^{-1}(\alpha) | X \leq F_1^{-1}(\alpha)] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{P[Y \leq F_2^{-1}(\alpha), X \leq F_1^{-1}(\alpha)]}{P[X \leq F_1^{-1}(\alpha)]} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{C(\alpha, \alpha)}{\alpha} \\ \lambda_u &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P[Y > F_2^{-1}(\alpha) | X > F_1^{-1}(\alpha)] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{P[Y > F_2^{-1}(\alpha), X > F_1^{-1}(\alpha)]}{P[X > F_1^{-1}(\alpha)]} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{C(1-\alpha, 1-\alpha)}{1-\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{\bar{C}(\alpha, \alpha)}{1-\alpha} \end{aligned}$$

其中， $\bar{C}(u, v)$ 是 Copula 生存函数，即 $\bar{C}(u, v) = C(1-u, 1-v)$ ，且 $\bar{C}(\alpha, \alpha) = 1 - 2\alpha + C(\alpha, \alpha)$ 。

由以上分析可见，Copula 的出现使得尾部相关系数的计算简单化，这增强了尾部相关性度量方法的实用性和使用范围，例如它提高了测量在险价值 VaR 的准确性，对于理论研究和实际投资研究的贡献极大。Copula 函数包含了尾部

相关的全部信息，因此它可以更全面、更深入地刻画随机变量之间的尾部相关关系。

2.5 各种相关性度量方法的优劣比较

2.5.1 线性相关系数

常用的相关性度量方法有线性相关系数 *pearson's ρ* ，秩相关系数 *Kendall's τ* 、*Spearman's ρ* ，但是线性相关系数存在如下不足，限制了它的应用范围：

(1) *pearson's ρ* 要求 $\text{var}(X)$ 、 $\text{var}(Y)$ 都存在；只在方差有限时才有定义，不适用于方差无限的厚尾分布。例如二元 t 分布，在自由度 $\nu < 2$ 时，具有无穷方差。实际上，许多实证研究表明很多金融资产的收益率分布呈现尖峰、肥尾分布，他们的二阶距——方差是不存在的，有的分布可以连期望都不存在，因此不适合用 *pearson's ρ* 来反映相关性；

(2) *pearson's $\rho = 0$* 不能暗示 X 、 Y 相互独立。只有 X 、 Y 都是在正态的情况下， $\rho = 0$ 才表示 X 、 Y 相互独立；

(3) 完全正相关不一定 *pearson's $\rho = 1$* ，完全负相关也不一定 *pearson's $\rho_{\max} = 1$* 。事实上，当 X 和 $-Y$ 分布同类型时（即分布只有位置参数和尺度参数不同）， $\rho_{\min} = -1$ ，这表明 X 、 Y 完全负相关，相关系数为 -1 ；当 X 和 Y 分布同类型时， $\rho_{\max} = 1$ ，完全正相关相关系数为 1 ，其它情形都不成立。比如 $x \sim N(0,1)$ ， $y = x^2$ ，两个随机变量 x 、 y ，实际上相关性是很强的，但是相关系数却是零；

(4) *pearson's ρ* 不具有非线性严格单调变换下的不变性。常用的两种收益率表示方法是：对数收益率和百分比收益率，设 X_t ， Y_t 表示时间 t 的两金融资产价格，如果用 ρ 表示金融市场或金融资产减收益率的相关程度时，一般都会有：

$$\rho\left(\log \frac{X_t}{X_{t-1}}, \log \frac{Y_t}{Y_{t-1}}\right) \neq \rho\left(\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}, \log \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}}\right)$$

因此，如果用 ρ 对金融市场进行相关性分析时，采用不同的收益率，就会得到不同的结论；

(5) 用线性相关系数来分析存在非线性关系的相关性时有时会产生误导。

2.5.2 秩相关系数

而标准非参数相关测度 *Kendall's τ* 、*Spearman's ρ* 秩相关系数都是单调变换不变的相关性度量，由于 Copula 函数的不变性，它们可以通过 Copula 函数唯一来表达。相比之下，*Kendall's τ* 、*Spearman's ρ* 秩相关系数则消除了线性相关系数的上述不足，更符合一个理想的相关性度量指标所要求的性质：

假设存在随机变量 X 、 Y ， $\delta(X, Y)$ 表示它们的相关性指标，则 *Kendall's τ* 、*Spearman's ρ* 秩相关系数满足以下性质：

- (1) 对称性： $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$ ；
- (2) 正规性： $-1 \leq \delta(X, Y) \leq 1$
- (3) $\delta(X, Y) = 1 \Leftrightarrow X, Y$ 正单调相关；

$$\delta(X, -Y) = 1 \Leftrightarrow X, Y \text{ 负单调相关；}$$

即相关系数 $\delta \in [-1, 1]$ 是与 X 、 Y 的相关性一一对应的；

- (4) $\delta(X, Y) = 0$ 对应于变量 X 、 Y 相互独立。

由于金融数据具有尖峰、肥尾特性，且金融变量间相关性并非线性相关，在不同时期也有不同的相关结构，因此 *Kendall's τ* 、*Spearman's ρ* 秩相关系数是更合理的相关性度量指标。

2.5.3 尾部相关性度量

尾部相关性度量可以理解为一个变量是极值条件下，另一个变量也是极值的

概率。如果这个概率为零，则称两个变量渐近独立。区分变量在极值水平上是相关还是独立，对金融风险分析和管理的非常重要的，渐近相关意味着极端市场情况事件可以同时出现，如两市场或两资产同时出现暴涨或暴跌的情形。如果将渐近相关模型用于分析渐近独立的金融数据，必将导致过高地估计同时出现暴涨或暴跌的概率；如果将渐近独立模型用于分析渐近相关的金融数据，必将导致过低地估计同时出现暴涨或暴跌的概率。

因此尾部相关系数度量的情形与上述相关系数不同，适用于不同的研究领域，如可用于考察市场出现极端情形时，如股灾，金融投资会面临怎样的跨市场风险。联系到股指期货套利，则可用上尾、下尾相关系数度量股指期货与标的指数、标的指数与投资组合在市场出现暴涨、暴跌行情时相关性如何，这直接影响到套利的效率。

第三章 Copula 理论实证的方法设计

在本文实证部分，将通过构造的二元 Copula-t-Garch(1, 1) 模型对股指期货套利中两个环节的相关性进行度量：即指数现货与期货的相关性、用于跟踪标的指数的现货组合与指数现货的相关性。是否能准确度量这两个环节的相关性，是进行股指期货套利的关键。

股票与股指期货市场的风险关联性研究应该从两市场的价格行为和风险特征出发进行定量分析，但是，由于国内股指期货尚未正式开始交易，并未存在这方面的数据。为此，本文退而求其次的研究了股票市场大盘股收益率的变化对股指期货市场可能的影响，即大盘股收益率变化与即将作为股指期货标的沪深 300 指数风险关联性，这是因为权重股收益率变化对于沪深 300 指数收益率有较大影响，与中、小盘股相比，大盘股与股指期货的风险关联程度强，能够比较精确的描述股市和期市的风险特征（房振明，2006）。

运用 Copula 理论构建金融模型，可分以下两步进行：

- a、确定边际分布；
- b、定义一个适当的 Copula 函数，以便能很好地描述出边际分布的相依结构。

运用 Copula 技术构建金融模型时，可以将边际分布和随机变量间的相关结构分开来研究，这有助于我们对很多金融问题的分析和理解。而构建多变量金融时间序列 Copula 模型的两个关键问题即为：单变量金融时间序列分布模型的确立和 Copula 函数的选择。

3.1 构建现货组合

股指期货套利中一个关键的环节是构建现货组合以跟踪标的指数走势，现货组合的构建方法主要可以分为三大类：（1）成份股复制；（2）指数基金替代；（3）ETF 基金拟合。其中指数基金替代和 ETF 基金拟合较易实现，成份股复制方法又分为完全复制法、优化复制法和分层抽样复制法。

综合比较各种现货组合的构建方法，分层抽样复制法在目前实际投资操作中具备较强的可操作性和准确性，有较大的实践意义。

ETF 基金拟合和指数基金替代方法由于市场宽度及深度的限制，无法满足股

股指期货上市后爆发性增长的需求，将产生严重的系统性风险，目前并不适宜用来构建现货组合以跟踪标的指数；而在成份股复制方法中，完全复制法构建的组合涉及的成份股多、成份股调整或遇休市停市的概率大、权重变动频繁、管理及维护成份股票的难度极大等缺点，都使得该方法不具备可操作性；优化复制法能够取得较小的跟踪误差，但由于其在规划求解时对初始值的设定较为敏感，实务操作性差；而分层抽样复制法则通过采取分步复制，结合了完全复制和优化复制法的优点，大幅减少了需复制的股票数，并采用优化算法最小化其跟踪误差，因此具备较强的可操作性和准确性，本文也将利用权重分层抽样复制方法来构建现货投资组合。

在评价构建现货组合以跟踪标的指数的方法时，跟踪误差是最核心的评价指标，抽样复制法以最小化跟踪误差为目标进行优化求解，计算出投资组合中各成份股的投资权重。

跟踪误差：

$$TE_1 = \sqrt{\sum_{t=1}^T (e_t - \bar{e})^2 / (T - 1)}$$

$$e_t = \sum_{i=1}^n \omega_i R_{i,t} - R_{idx,t}$$

其中， e_t ：样本期内各时点的现货投资组合与标的指数间的收益率差额

\bar{e} ：收益率差额的均值

T ：样本个数

ω_i ：第 i 种股票的投资权重

$R_{i,t}$ ： t 时刻第 i 种股票收益率

$R_{idx,t}$ ： t 时刻标的指数收益率

构建现货组合的模型如下：

$$\min TE_1 = \sqrt{\sum_{t=1}^T (e_t - \bar{e})^2 / (T-1)}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 0 \leq \omega_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \\ 0 \leq n \leq 300 \end{cases}$$

ω_i 表示第 i 种股票的投资权重，根据计算出来的 ω_i 数值来构建现货投资组合，以使得对于标的指数的跟踪误差最小。

在本文的实证研究中，将会对权重抽样复制法构建的现货组合、部分大盘股与沪深 300 指数之间的相关程度和相关模式进行综合分析，以体现出 Copula 在股指期货套利中的实践意义。

3.2 边际分布拟合 (t-Garch(1, 1) 模型)

通过模型构建出现货组合后，由于我们将考察现货组合与沪深 300 指数、沪深 300 指数与大盘股之间的联合分布函数，构建 Copula 函数，因此根据 Copula 理论应用的步骤，我们先对现货组合、沪深 300 指数、大盘股进行边际分布的拟合。选择一个恰当的边际分布模型是正确构建 Copula 模型的重要前提。

自 20 世纪 80 年代初发展至今，金融时间序列的一元建模问题取得了极大的进展，已经趋于成熟，其中描述时变方差的模型一般有两类，即自回归条件方差 (ARCH) 模型和随机波动 (SV) 模型。我们知道，金融时间序列的条件分布多呈现时变波动、波动聚类、偏斜、高峰、厚尾等特性，而 ARCH 模型和 SV 模型都可以较好的刻画金融时间序列的这些分布特性，进而可以较好的描述金融收益序列的条件边际分布。

因为将在实证中使用，本文将重点介绍 ARCH 类模型。

ARCH 类模型

金融时间序列的一个显著特点是存在条件异方差，Engel(1982)提出自回归条件异方差 (ARCH) 模型来刻画时间序列的条件二阶矩性质，并通过条件异方差的变化来刻画波动的时变性及聚集性。ARCH 模型由于具有明确的经济涵义、能够

准确刻画市场波动, 一经提出便得到了经济学家们的广泛重视并迅速应用到金融研究的诸多领域。在二十多年的时间里, ARCH 模型的各种衍生形式以及各种应用研究成果不断涌现, 并成为现代经济计量学飞速发展的一个重要领域。在众多的单变量 ARCH 类模型中, 最基本也是最常用的几种模型为 ARCH 模型、GARCH 模型、IGARCH 模型、EGARCH 模型等。在这里仅就几个简单实用的单变量 ARCH 类模型及它们的统计特性做简要讨论。

(1) ARCH 模型

ARCH 模型是 Engle(1982) 研究英国通货膨胀指数时提出的。设 $\{y_t\}$ 为一随机过程, 一般地 ARCH 模型可由如下线性回归形式给出

$$\begin{cases} E(y_t, t=1, \dots, T) = x_t \beta \mid I_{t-1} \sim n.i.d(x_t \beta, h_t) \\ h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p y_{t-p}^2 \\ \varepsilon_t = y_t - x_t \beta \\ \varepsilon_t = h_t^{1/2} \xi_t \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \\ \xi_t \mid I_{t-1} \sim n.i.d(0, 1) \end{cases}$$

其中 β 为参数向量, x_t 为外生变量, h_t 是 y_t 的条件方差, I_{t-1} 表示已知信息集, p 表示 ARCH 过程的阶数, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ 为参数。显然 $E(y_t) = x_t \beta$, 这表明 y_t 的均值是外生变量的某个线性组合。ARCH 模型表明方差的变化依赖于时间序列的过去观测值。

ARCH 模型一经提出, 即以良好的统计性能和广泛的适用性得到了普遍的应用。令 $y_t, t=1, \dots, T$ 表示一个给定的收益率序列, 若它服从上述 ARCH 过程, 那么根据 ARCH 模型描述, 在已知信息条件下, y_t 服从均值为 $x_t \beta$, 方差为 h_t 的正态分布, 因此 ARCH 模型可用来描述变量的条件边缘分布。

(2) GARCH 模型

在 ARCH 模型基础上, Bollerslev 提出了广义自回归条件异方差(GARCH)模型。GARCH 模型是对 ARCH 模型的重要扩展, 它比 ARCH 模型有更快的滞后收敛性, 并有与 ARMA 模型相类似的结构, Bollerslev 给出的 GARCH(p, q) 模型可以表示为:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = h_t^{\frac{1}{2}} \xi_t \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \\ \xi_t | I_{t-1} \sim n.i.d(0,1) \end{cases}$$

其中 $p \geq 0, q > 0; \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q; \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, p$ 。当 $p=0$, GARCH 过程就成为 ARCH (q) 过程, 显然 ARCH 过程可看作 GARCH 过程的一个特例。

为了讨论给定的收益率序列 $y_t, t=1, \dots, T$ 的条件分布特性, 考虑最简单的一种情况, 令 t 时刻的收益率 y 可分解为条件均值 u_t 和 ε_t 两部分, 即:

$$y_t = u_t + \varepsilon_t$$

其中 $\varepsilon_t, t=1, \dots, T$ 服从上述 GARCH 过程, 那么根据 GARCH 模型描述, 在已知信息条件下, ε_t 服从均值为 0, 方差为 h_t 的正态分布, 即 $\varepsilon_t | I_{t-1} \sim n.i.d(0, h_t)$, 从上式可以知道, y_t 是 ε_t 的函数, 它的条件分布很容易得到:

$$y_t | I_{t-1} \sim n.i.d(u_t, h_t)$$

由此可见, GARCH 模型可以较好地描述具有条件异方差特性的时间序列的条件边际分布。

(3) EGARCH 模型

前面讨论的 ARCH 类模型都是线性的, 与之相对应, Nelson 将线性 ARCH 模型拓展到非线性的形式, 提出了一类基于非线性变换的指数 GARCH 模型, 也即 EGARCH 模型。该模型可以表示为:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = h_t^{\frac{1}{2}} z_t \\ \ln h_t = \alpha_t + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k g(z_{t-k}), \\ z_t | I_{t-1} \sim n.i.d(0,1) \end{cases}$$

其中 $\{\alpha_t\}_{t=-\infty}^{\infty}, \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是非随机的实数标量序列。并且:

$$g(z_t) = \theta z_t + \gamma [|z_t| - E|z_t|]$$

$\{g(z_t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 是一个零均值、独立同分布的随机过程。上述两式表明 h_t 的对数

是关于 z_t 和 $|z_t|$ 的线性函数。并且 θz_t 和 $\gamma(|z_t| - E|z_t|)$ 都是零均值且序列不相关的分量。

同样,若 t 时刻的收益率 y_t 可分解为条件均值 u_t 和 ε_t 两部分,即: $y_t = u_t + \varepsilon_t$, 其中 $\varepsilon_t, t=1, \dots, T$ 服从上述 EGARCH 过程, 那么容易得到 y_t 的条件边际分布:

$$y_t | I_{t-1} \sim n.i.d(u_t, h_t)。$$

EGARCH 过程既保证了 h_t 的非负性, 同时又取消了 GARCH 过程的系数的非负限制, 并且能够反映波动的非对称性, 因此具有较强的刻画金融波动的能力, 在实践中得到广泛应用。

本小节总结

由于大多数金融数据序列的分布相比较正态分布而言, 具有更加明显的尖峰和肥尾现象, t 分布则可以很好地描述这些分布特性, 其中 t 分布中的自由度 v 可以看作是测量厚尾程度的参数, v 越小表明分布的尾部越厚; 而 Garch 模型又能很好地描述金融时间序列的波动特性, 因此 t -Garch 模型可以更好地描述金融时间序列的波动聚类 and 尖峰、肥尾现象。

大量的实证研究也表明, 在股市中大多数情况下, 简洁的 GARCH(1, 1)、GARCH(1, 2)、GARCH(2, 1) 模型已能充分反映长时期的金融数据的波动特征。其中 t -GARCH 模型对金融时间序列条件分布特性的刻画能力优于普通的 GARCH-normal 模型, 它可以较好的描述金融时间序列高峰厚尾的分布特性。因此本文将采用 t -Garch(1, 1) 模型来拟合收益率序列的边际分布。

模型如下:

$$\begin{cases} R_t = u + \varepsilon_t & R_t: \text{收益率序列} \\ \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ \sqrt{\frac{v}{v-2}} \xi_t | I_{t-1} \sim t(v) \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 R_t 为收益率, u 为常数项, ε 为残差项, σ^2 是 R_t 的条件方差, I_{t-1} 表示已知信息集, α 、 β 为参数, v 为 t 分布的自由度。

本文将进行的是二元 Copula 分析，在分别对两个金融产品进行上述模型的边际分布拟合后，还将运用 Copula 函数将两者联合，以构建金融产品的二元联合分布函数，该 Copula 函数模型如下：

$$\begin{aligned} (\xi_{1t}, \xi_{2t}) | I_{t-1} &\sim C(T_{v_1}(\xi_{1t}), T_{v_2}(\xi_{2t}) | I_{t-1}) \\ \sqrt{\frac{v_1}{v_1-2}} \xi_{1t} | I_{t-1} &\sim t(v_1), \sqrt{\frac{v_2}{v_2-2}} \xi_{2t} | I_{t-1} \sim t(v_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

结合式 (3.1) 与式 (3.2)，即可得到 Copula-t-Garch(1, 1) 模型。

该 Copula 模型将在本章第三部分进行详细描述。

由式 (3.1) 明显可见收益率序列 R_t 与 ε_t 同分布，因此式 (3.1) 可以用来描述收益率序列的边际分布。在此，我们将证明 Copula 函数中为何能将 $\sqrt{\frac{v}{v-2}} \xi_t$ 的累积边际分布作为自变量，等同于收益率序列 R_t 的边际分布，来构造两种金融产品的二元联合分布函数的。

证明如下：

$$\begin{aligned} P(R_t \leq r | I_{t-1}) &= P(R_t - u \leq r - u | I_{t-1}) \\ &= P\left(\frac{R_t - u}{\sigma_t} \leq \frac{r - u}{\sigma_t} | I_{t-1}\right) \\ &= P\left(\xi_t \leq \frac{r - u}{\sigma_t} | I_{t-1}\right) \\ &= t_v\left(\frac{r - u}{\sigma_t} | I_{t-1}\right) \sim \xi_t \end{aligned}$$

可知 R_t 的边际分布函数可以转化成 ξ_t 的 t 分布，因此 $(R_{1t}, R_{2t}) \sim C(F_1(R_{1t}), F_2(R_{2t}))$ 等同于 $(\xi_{1t}, \xi_{2t}) \sim C(t_{1,v_1}(\xi_{1t}), t_{2,v_2}(\xi_{2t}))$ 。

3.3 Copula 函数的选择

根据拟合优度选择最合适的 Copula 函数，不同的 Copula 函数说明不同的相关模式。

要选择出相对样本数据而言最优的 Copula 函数，我们还得就其对样本数据拟合程度的优劣做出评价，常用的 Copula 模型检验方法有以下两种：

a、K-S 检验

Kolmogorov-Smirnov 检验是一个非参数检验，揭示了理论分布与经验分布之间的偏离，主要用于一元分布函数模型的拟合优度检验。

为了确定选定的 Copula 函数是否合适，能否正确地描述变量间的相关结构，就需要对 Copula 函数的拟合度进行评价。根据 Copula 理论，如果 $C(u, v)$ 是一个 Copula 函数，其中 $u = F(x)$ ， $v = G(y)$ ， F 和 G 分别表示随机变量 X 和 Y 的分布函数，那么 $Y | X = x$ 的条件分布为：

$$H(Y \leq y | X = x) = C(F(x), G(y))$$

其中 $C_1(u, v) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$ 服从 $(0, 1)$ 均匀分布。

通过 Copula 函数的这个性质，就可以把对 Copula 函数的拟合优度检验转化到检验 Copula 函数的一阶偏导是否服从 $[0, 1]$ 均匀分布上来，也就让使用 K-S 检验来评价选定的 Copula 函数对样本的拟合程度成为了可能。因为 K-S 检验揭示的是理论分布与经验分布之间的偏离，所以 K-S 检验的统计检验量数值越小，说明偏离程度越低，拟合效果就越好。

b、信息准则(AIC)诊断

Copula 模型参数估计的一种方法是极大似然值估计方法，通过使极大似然函数最大化，我们可以得到模型参数 α 的估计值形式如下：

$$\hat{\alpha} = \arg \max L(\hat{\alpha}; X) = \arg \max \sum_{t=1}^T c(f_{1t}(x_{1t}; \hat{\varphi}_1), \dots, f_{mt}(x_{mt}; \hat{\varphi}_n); \alpha)$$

在此基础上，我们可以通过比较对数似然函数值来确定拟合程度。

AIC(Akaike's information criterion)定义为：

$$AIC = -2L(\hat{\alpha}; X) + 2q$$

其中 q 是模型中参数的个数。AIC 值越小，说明该 Copula 函数对样本数据的拟合程度越高。

在本文的实证中将采用 AIC 诊断方法选择最优的 Copula 函数。

3.4 相关性检验

该部分则主要是计算出由前 4 个步骤拟合出来的 Copula-t-Garch(1, 1) 模型

所描绘出来的秩相关及尾部相关系数, *Spearman's* ρ 、*Kendall's* τ 、上尾相关系数、下尾相关系数, 得到衡量两个变量间相关性的具体数值, 并进而分析所考察的两样本间的相关模式和相关程度, 得出实证的结论。

第四章 Copula 在股指期货套利中的应用

本章将考察现货组合、前六大权重股与沪深 300 指数之间的风险关联性。其中用 Copula 考察现货组合与沪深 300 指数之间的相关性，是为了检验分析股指期货套利中构建的指数现货对沪深 300 指数的跟踪状况，以在实际投资中决定投资操作的时机；而考察前六大权重股与沪深 300 指数之间的相关性，则是本文在股指期货尚未推出、缺乏数据的情况下，为了考察指数现货与期货的风险关联性而做的一种次优选择。这是因为权重股收益率变化对于沪深 300 指数收益率有较大影响，与中、小盘股相比，大盘股与股指期货的风险关联程度强，能够比较精确的描述股市和期市的风险特征。

4.1 数据说明

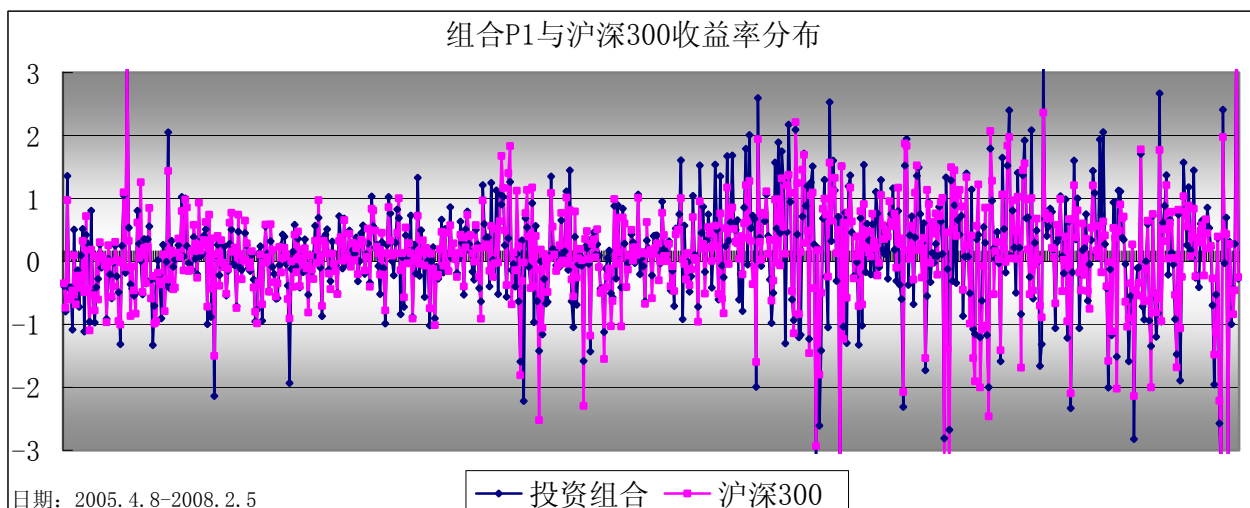
本文实证中所使用的数据为自沪深 300 指数发布以来，即 2005 年 4 月 8 日-2008 年 2 月 5 日期间，沪深 300 指数每日收盘价、沪深 300 成份股中权重前十的个股每日收盘价（1、以 2008 年 1 月 22 日的权重数据为准；2、该十只个股是为了构建现货组合选择的），其中前十大权重股的选择不考虑因上市时间较晚或停牌时间过长导致数据不足的个股，如中国神华、中国石油、中国平安，而是选择了万科 A、浦发银行、民生银行、宝钢股份、中国石化、中信证券、招商银行、中国联通、贵州茅台、深发展 A；数据来源于天相投资分析系统。

收益率定义为 $R_{i,t} = \ln(p_{i,t} / p_{i,t-1})$ $i=1,2,\dots,n$ 。

利用权重抽样复制方法，我们可以得到现货投资组合 P_1 ，在实际投资操作中利用组合 P_1 代替沪深 300 指数现货，该组合对于沪深 300 指数的跟踪效果如下：

图表 2：现货组合对于沪深 300 指数的跟踪效果

跟踪误差	0.00176693
组合与指数线性相关性	0.870675

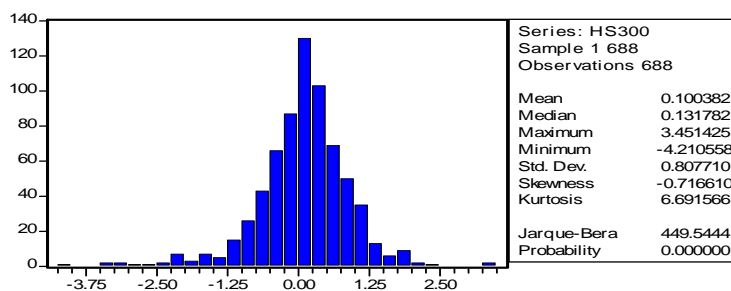


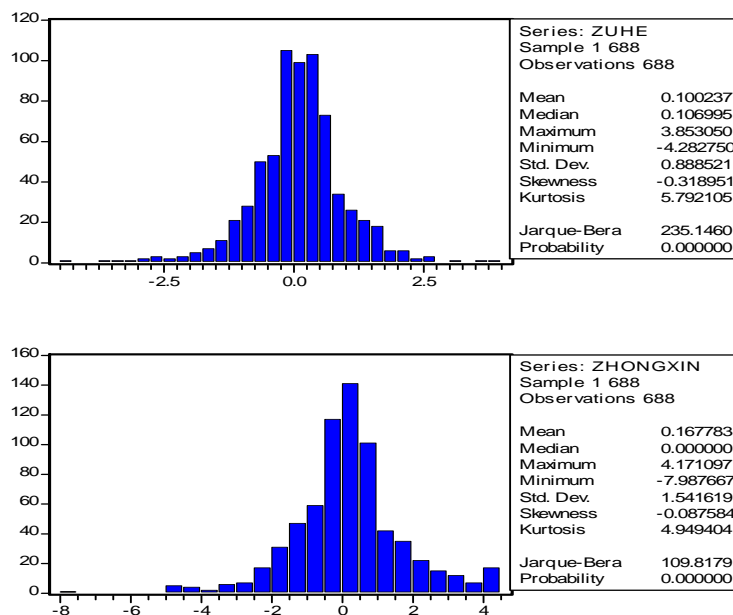
图表 3: 投资组合 P_1 的成份构成及投资配置

万 科 A	6.757	中国石化	9.205	贵州茅台	4.701
浦发银行	6.556	中信证券	14.244	深发展 A	9.994
民生银行	3.864	招商银行	3.759	合计	100
宝钢股份	19.447	中国联通	21.474	单位	%

接下来我们将使用模型 t -Garch(1, 1)对组合 P_1 、各大权重股与沪深 300 指数的收益率分别进行边际分布的拟合，沪深 300 指数、组合 P_1 和中信证券的日收益率数据的统计特征如表所示：

图表 4: 沪深 300 指数、组合 P_1 和中信证券的日收益率数据的统计特征图



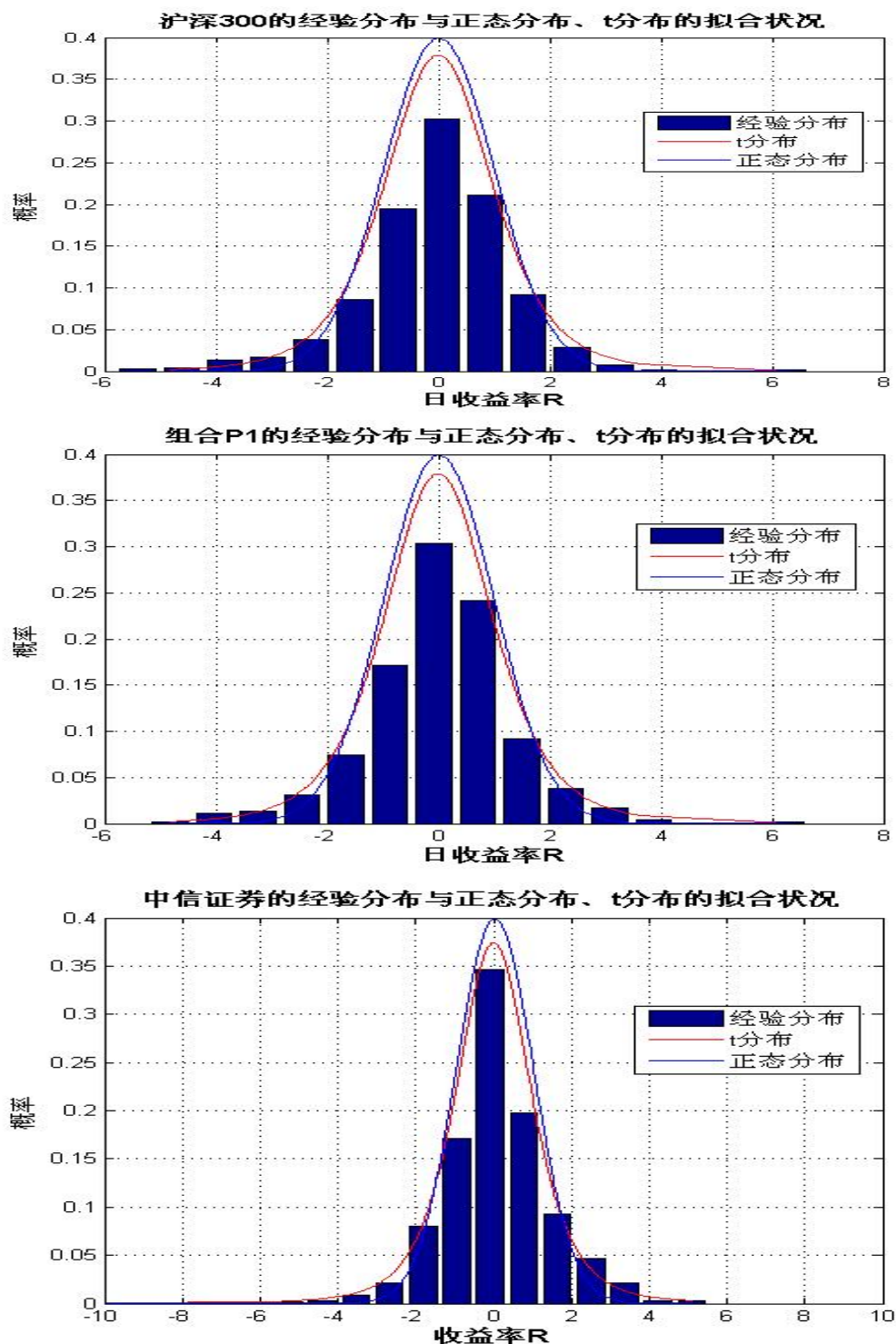


通过对数据的分析，可得如下统计性描述结论：第一，由于沪深 300、组合 p_1 、中信证券的峰度分别为 6.6916、5.7921、4.9484，均大于正态分布的峰度值 3，他们的偏度分别为 -0.7166、-0.3190、-0.0878，均小于正态分布的偏度值 0，因此数据显示研究样本的日收益率序列均呈现尖峰、肥尾、负偏的特征，我国大盘股和指数以及本文构建的投资组合，其日收益率均不服从正态分布；第二，对于日间收益而言，沪深 300 指数的一阶、二阶自相关检验概率分别为 0.625、0.877，均显著大于显著性水平 0.05，说明沪深 300 指数日间收益序列独立，这表明日间收益序列并不存在自相关，同理，组合 p_1 、中信证券收益率序列也不存在自相关。

4.2 边际分布拟合的实证检验

以下三张图像为沪深 300 指数、组合 P_1 、中信证券收益率的分布图，由于经验分布所揭示的分布特征是样本数据的实际分布情况，因此通过将利用 t 分布、正态分布与经验分布所描绘出的样本分布图形结合在一起进行分析比较，可以找出最符合实际、最准确的分布函数，用以更好地描述样本的边际分布，可以更进一步地保证以后的 Copula 函数拟合的准确性。

图表 5: 沪深 300、现货组合、中信证券的收益率分布状况



通过比较,我们发现:将 ξ_t 假设为服从自由度为 v 的 t 分布,比正态分布能更准确地描述样本的实际分布情况。在上文中,我们已经证明 R_t 与 ξ_t 同分布,因

此，本文使用 t-Garch(1, 1)模型，而非 Garch(1, 1)模型来进行样本的边际分布拟合，是有其重要的理论依据和实践意义的。利用第一步骤计算出来的边际分布函数，可以较为准确地将样本收益率数据进行概率转换，为后面的 Copula 函数拟合提供较准确的自变量数据。

组合 P_1 、第一权重股中信证券及沪深 300 指数收益率的边际分布函数如下²：

沪深 300 指数收益率：

$$(1) \begin{cases} R_t = 0.11404 + \varepsilon_t \\ \quad (4.8982) \\ \sigma_t^2 = 0.0066451 + 0.071586\varepsilon_{t-1}^2 + 0.92548\sigma_{t-1}^2 \\ \quad (1.4125) \quad (3.3569) \quad (44.7587) \\ \text{DoF}=4.6667 \text{ (Degree of Freedom)} \end{cases}$$

组合 P_1 收益率：

$$(2) \begin{cases} R_t = 0.084714 + \varepsilon_t \\ \quad (3.2584) \\ \sigma_t^2 = 0.0049289 + 0.057376\varepsilon_{t-1}^2 + 0.94262\sigma_{t-1}^2 \\ \quad (1.0783) \quad (2.9796) \quad (51.2991) \\ \text{DoF}=4.8252 \text{ (Degree of Freedom)} \end{cases}$$

中信证券收益率：

$$(3) \begin{cases} R_t = 0.1214 + \varepsilon_t \\ \quad (2.4851) \\ \sigma_t^2 = 0.087795 + 0.090154\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8887\sigma_{t-1}^2 \\ \quad (1.4923) \quad (2.5995) \quad (22.6012) \\ \text{DoF}=3.8938 \end{cases}$$

括号中所示数字为对应参数的 t 统计量。经过 t 检验发现，上述三式中，常数项 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 分别为 0.0066、0.0049、0.0878，其 t 统计量分别为 1.4125、1.0783、1.4923，均小于 95% 的显著性检验对应自由度的 t 临界值 2.015、2.015、2.132，未能通过置信区间为 95% 的显著性检验外，其他参数均通过置信度为 95%、97.5% 的显著性检验，参数显著非零。

²由于篇幅限制，在此不赘述其他权重股及指数基金的边际分布函数，详细情况可参见附件二

其次，我们对通过上述三式转换的概率值进行 K-S 检验，发现各样本变换后的概率序列均服从独立同分布的均匀分布，另外检测也发现各序列值均不存在自相关现象。

图表 6：边际分布拟合的 K-S 检验

	沪深 300 组合	中信证券	
K-S	0.0264	0.0218	0.0406
P	0.7176	0.8124	0.6213
其中，p 表示不犯第一类错误的概率			

综合以上表述，本文认为 t-Garch(1, 1) 即可较好地拟合样本的边际分布。

4.3 Copula 函数拟合联合分布的实证分析

本节将分别考察沪深 300 指数与组合 P_1 、沪深 300 指数与中信证券的 Copula 联合分布函数，通过比较不同 Copula 函数的拟合效果来选出最佳拟合函数，该最佳 Copula 函数所代表的相关模式即可以较好地描述两样本间实际的相关模式。通过该相关模式，我们就可以知道在什么时机进行股指期货套利效率最高，以及可以在不同时机选择不同的套利决策。另外，本节还将进一步度量两样本之间基于 Copula 的 *Kendall's τ* 和 *Spearman's ρ* 秩相关系数以及上下尾部相关系数。

利用上一节实证中计算出来的各样本边际分布函数来进行样本收益率的概率积分变换，如沪深 300 指数与组合 P_1 的日收益率均转换成其累计分布概率 u 、 v ，以 u 、 v 作为 Copula 函数的自变量，根据非参数方法 (Genest&Rivest, 1993) 或参数方法（如最大似然法）来计算各个可选择 Copula 函数的参数值及其最大似然值，通过对比挑选拟合最好的 Copula。

每一个阿基米德族 Copula 函数均是由一个算子 (Generator: 生成元函数) 生成的，具有一些数学上的优良特性，如不同的 Archimedean Copula 函数可以表现不同的相关结构，Gumbel Copula、Rotated Clayton Copula 可用于描述两

样本在上尾处具有较强相关关系的现象；Clayton Copula、Rotated Gumbel Copula 可用于描述在下尾处具有较强相关关系的现象；Symmetrised Joe-Clayton Copula 可描述非对称的、上下尾均有较强相关关系的现象；Frank Copula 则描述具有对称相关模式的金融市场间相关关系，如果两样本风险关联的相关结构可以由 Frank Copula 函数来描述，表明证券市场处于牛市和熊市时，大盘股和股票指数间具有对称的相关模式，且渐近独立。另外，基于 Archimedean Copula 函数的 *Kendall's* τ 和 *Spearman's* ρ 等相关系数更便于计算，因此在本部分实证中我们将 Copula 函数的选择范围限定在阿基米德族 Copula。

图表 7：本文所使用的 Copula 函数列表

Copula 函数	函数表达式	算子 $\varphi_\alpha(t)$
1、Clayton Copula	$C_{JC}(u, v; \alpha) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$
2、Rotated Clayton Copula	$C_{RC}(u, v; \alpha) = ((1-u)^{-\alpha} + ((1-v)^{-\alpha} - 1))^{-1/\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}(((1-t)^{-\alpha} - 1))$
3、Frank Copula	$C_F(u, v; \alpha) = -\frac{1}{\alpha} \log \left[1 - \frac{(1 - e^{-\alpha u})(1 - e^{-\alpha v})}{1 - e^{-\alpha}} \right]$	$-\ln \frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}$
4、Gumbel Copula	$C_G(u, v; \alpha) = \exp \left\{ -[(-\ln u)^{1/\alpha} + (-\ln v)^{1/\alpha}]^\alpha \right\}$	$(-\ln t)^\alpha$
5、Rotated Gumbel Copula	$C_{RG}(u, v; \alpha) = \exp \left\{ -[(-\ln(1-u))^{1/\alpha} + (-\ln(1-v))^{1/\alpha}]^\alpha \right\}$	$(-\ln(1-t))^\alpha$
6、Symmetrised Joe-Clayton Copula	$C_{SJC}(u, v \tau_u, \tau_l) = 0.5(C_{JC}(u, v \tau_u, \tau_l) + C_{JC}(1-u, 1-v \tau_u, \tau_l)) + u + v - 1$	

4.3.1 选取 Copula 函数

经过 Matlab 程序运行后，得到如下

图表 8：沪深 300 与组合 P_1 各 Copula 联合分布函数的似然函数值

Symmetrised Joe-Clayton	-482.3385	Frank copula	-454.4717
Rotated Gumbel copula	-474.0752	Clayton's copula	-395.342
Gumbel copula	-471.8984	Rotated Clayton copula	-383.1703

图表 9：沪深 30 数与中信证券各 Copula 联合分布函数的似然函数值

Gumbel copula	-178.543	Symmetrised Joe-Clayton	-164.989
Rotated Gumbel copula	-174.086	Clayton's copula	-146.113
Frank copula	-167.992	Rotated Clayton copula	-129.816

由于在实证检验中，本文在 Matlab 编程中用最大似然函数法计算各 Copula 函数的对应参数时，为了方便程序的实现，采取计算最小化 $-1 * \text{Likelihood}$ ，而非最大化 Likelihood（设 Likelihood 为最大似然值），所以最小的似然值对应的是最优的 Copula 函数，用该函数来拟合沪深 300 指数与组合 P_1 的联合分布函数，可以取得最佳的拟合效果。

据此，通过对以上列表结果的比较，可以得到结论：

1、对于沪深300指数与组合 P_1 的联合分布函数：用二元 Symmetrised Joe-Clayton Copula 函数进行拟合，取得的最大似然函数值为 482.3385，大于其他函数，因此可取得最佳的拟合效果。说明在股市出现较大幅度的升跌时，沪深 300 指数与组合 P_1 的上下尾相关性均相互加强，此时进行股指期货套利过程中的现货组合构建操作，可以取得较好的指数跟踪效果，使得现货投资组合更近似于指数现货，有利于套利操作中的现货组合构建的准确实现。

2、对于沪深 300 指数与中信证券的联合分布函数：用 Bivariate Gumbel Copula 函数进行拟合，取得的最大似然函数值为 178.543，大于其他函数，因此可取得最佳的拟合效果，说明沪深 300 指数与中信证券在证券市场出现利好行情时上尾相关性相互加强，这与 2007 年以来的牛市行情主要由权重股带动的实际市场状况是相一致的。由于在股市牛市行情时，将带来股票交易量的极大提升，

带来证券公司收益的提高,因此中信证券与沪深 300 指数在市场利好时上尾相关性相互加强。此时股指期货与现货的相关性较强,进行套利可以较准确地取得较好的收益和相对较好的操作安全性。

Copula 函数形式:

沪深 300 指数与组合 P_1 :

$$C_{SJC}(u, v | \tau_u, \tau_l) = 0.5(C_{JC}(u, v | \tau_u, \tau_l) + C_{JC}(1-u, 1-v | \tau_u, \tau_l)) + u + v - 1$$

其中: $\tau_u = 0.7002, \tau_l = 0.7129$

$$C_{JC}(u, v) = (u^{-4.1632} + v^{-4.1632} - 1)^{-1/4.1632}$$

沪深 300 指数与中信证券:

$$C_G(u, v; 0.2817) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^{1/1.8123} + (-\ln v)^{1/1.8123}\right]^{1.8123}\right\}$$

4.3.2 相关系数的计算

根据公式 $\tau(X, Y)^T = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt$ 可以分别计算得出基于阿基米德族函数的

Kendall's τ 的具体函数表达式 (详见附件)。

通过对秩相关系数和上下尾部相关系数的计算和整理比较,能更加印证上一小节的结论。

图表 10: 实证结果-秩相关系数、上下尾相关系数如下:

	<i>Spearman's</i> ρ	<i>Kendall's</i> τ	下尾相关	上尾相关	适用函数
沪深 300 与组合	0.8549	0.6755	0.7002	0.7129	Symmetrised Joe-Clayton
沪深 300 与中信	0.6159	0.4482	0	0.5012	Gumbel copula

一方面,上表数据显示, *Spearman's* ρ 与 *Kendall's* τ 的数值均大于 0.4, 表明沪深 300 与组合 P_1 、沪深 300 与中信证券之间存在较强的正向风险关联性; 而纵向的数据比较发现, 沪深 300 与组合间的 *Spearman's* ρ 与 *Kendall's* τ 系数

均大于沪深 300 与中信之间的数值。这是由于组合 P_1 是由人为构建的用于跟踪沪深 300 的投资组合，且构建目标是最小化跟踪误差，因此与其他个股相比，组合 P_1 与沪深 300 之间有更强的正向相关性；实证结果与该推理是相一致的。

另一方面，沪深 300 与组合 P_1 的联合分布函数适用 Symmetrised Joe-Clayton Copula 来拟合，由 Symmetrised Joe-Clayton Copula 函数的特性，其描述的上下尾部相关性均较强。上表数据也表明，沪深 300 与组合 P_1 的 Kendall 秩相关系数为 0.6755，但是其上、下尾相关系数却分别增加至 0.7129 和 0.7002，表明沪深 300 与组合 P_1 在市场暴涨暴跌的行情下会趋向于渐近相关，即此时进行股指期货的套利时，可以较准确地利用现货组合跟踪沪深 300 指数。

沪深 300 与中信的联合分布函数则适用 Gumbel Copula 来拟合，由 Gumbel Copula 函数的特性，其描述的上尾相关性较强。表中数据也表明，沪深 300 与中信的 Kendall's τ 秩相关系数为 0.4482，其上尾相关系数则增加为 0.5012，无下尾相关性，表明沪深 300 与中信证券的走势在熊市情况下趋向于渐近独立，相关性变弱，而在牛市行情中，则趋向于渐近相关，这与 06、07 年的牛市行情主要由权重股带动的市场状况是相一致的。

综合上述实证结果及附件，本文认为在极端行情下进行股指期货的套利时，套利的两个环节，即指数现货与期货、投资组合与指数现货的相关性较强，可以保证较好的操作准确性。

第五章 总 结

在金融市场迅速发展、金融创新不断深入的今天,国际、国内金融市场之间、各种金融产品之间的联系日趋紧密,市场之间的相关关系也更加复杂化,而金融市场的波动也日益加剧,金融风险明显增大。相关性分析在现代金融分析中占据重要地位,它是分析很多金融问题包括投资组合、风险分析和防范、资产定价等的基础,但过去对金融市场相关性的研究主要集中在线性的、对称的相关性分析上,很少对非线性、非对称的相关程度和相关模式进行研究。作为相关性分析和多元统计工具, Copula 理论将多变量金融建模问题推向了一个新阶段。Copula 理论为我们构建一种全新的多变量金融模型提供了理论依据,但它的发展和应用都离不开边际分布模型、计算机技术、参数估计和检验方法的不断发展和完善,可以说,将 Copula 理论与边际分布模型、计算机技术、参数估计和检验方法完美地结合在一起是 Copula 理论及其应用问题的关键。

本文在总结概括 Copula 理论的基础上,从股指期货套利的角度,探讨了基于 Copula 的二元变量联合分布和相关性度量的研究,具有一定的创新性。

但是,本文还存在一些有待进一步解决的问题以及下一步的研究展望,主要表现在:

首先,本文的研究范围主要集中在二元的领域,虽然二元是多元的基础,并且具有直观易于理解的优点,但如何将二元向多元推广依然是一个需要解决的难题。这是因为当维数增加时,模型的复杂程度及参数估计难度都将呈指数倍增长,并且现有的一些估计方法可能将不再适用,需要研究新的估计方法。Copula 理论在多元领域的应用优势在本文没有得到体现。

其次,本文所构建的数学模型较为复杂,程序实现较为困难,直接导致了本文实证方面的完整性不足,这也限制了 Copula 理论的推广应用。模型仅仅是复杂的现实世界的近似,应避免不顾条件的盲目使用模型的危险。

最后,由于中国还未推出股指期货,因此本文虽然研究了股票市场大盘股收益率的变化对股指期货市场可能的影响,但是这种相关性研究的最终是为了在股指期货交易中进行套利交易服务的。因此在今后的研究工作中,我们应该做的工作是把本文的相关性方法应用于实际交易数据或者模拟数据中,使股指期货的套利更加准确量化和有效。

参考文献

- [1] Bouye, E., V. Durrleman (2000). "Copulas for Finance: A Reading Guide and Some Applications." Groupe de Recherche Operationnelle, Credit Lyonnais.
- [2] Boyer, B.H., M.S. Gibson and M. Loretan (2000). Pitfalls in tests for changes in correlations, International Finance Discussion Paper No. 597, Board of Governors of the Federal Reserve System.
- [3] De Matteis, R. (2001). Fitting copulas to data, Diploma thesis, Univ. Zurich.
- [4] Embrechts, P., F. Lindskog, (2001). Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, Technical report, Department of Mathematics, ETHZ.
- [5] Engle R.F. (1982). Autoregressive heteroskedasticity with estimation of the variance of U.K. inflation [J]. *Econometrica*, 50: 987-1008.
- [6] Fantazzini, D. (2003). Copula's Conditional Dependence Measures for Portfolio Management and Value at Risk, Working paper, University of Konstanz.
- [7] Forbes, K. J. and R. Rigobon (2002). "No Contagion, Only Interdependence: Measuring Stock Market Comovements." *The Journal of Finance* 57(5): 2223-2261.
- [8] Frees, E. W. and E. A. Valdez (1998). "Understanding relationships using copulas." *North American Actuarial Journal* 2(1): 1-25.
- [9] Genest, C., K. Ghoudi (2003). "A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions." *Biometrika* 82(3): 543-552.
- [10] Genest, C. and J. MacKay (1986). "The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals." *The American Statistician* 40(4): 280-283.
- [11] Genest, C. and L. P. Rivest (1993). "Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas." *Journal of the American Statistical Association* 88(423): 1034-1043.
- [12] Guégan, D. and J. Zhang (2006). Change analysis of dynamic copula for measuring dependence in multivariate financial data, Working Paper 2006-07, CES-AC, France.
- [13] Hu, L. (2006). "Dependence patterns across financial markets: a mixed copula approach." *Applied Financial Economics* 16(10): 717-729.
- [14] Melchiori, M. R. (2003). "Which Archimedean copula is the right one." *Yield Curve* 37: 1-20.
- [15] Nelson, R. B. (1999). "An Introduction to Copulas." Springer.
- [16] Patton, A. J. (2001). "Modelling Time-Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula."

- UCSD WP 9: 2001.
- [17] Patton, A. J. (2004). "On the Out-of-Sample Importance of Skewness and Asymmetric Dependence for Asset Allocation." *Journal of Financial Econometrics* 2(1): 130-168.
- [18] Romano, C. (2002). "Calibrating and simulating copula functions: an application to the Italian stock market." *Risk Management Function, Capitalia, Viale U. Tupini 180*.
- [19] 柏满迎, 孙禄杰 (2007). "三种 Copula-VaR 计算方法与传统 VaR 方法的比较." *数量经济技术经济研究* 24(002): 154-160.
- [20] 房振明 (2006). "股票与股指期货风险关联性及其跨市场稳定机制设计研究.", 上海证券交易所研究课题报告.
- [21] 孔繁利, 段素芬 (2006). "Copula 度量投资组合 VaR 的应用研究." *内蒙古民族大学学报: 自然科学版* 21(006): 603-606.
- [22] 李悦, 程希骏 (2006). "上证指数和恒生指数的 copula 尾部相关性分析." *系统工程* 24(005): 88-92.
- [23] 史道济, 姚庆祝 (2004). "改进 Copula 对数据拟合的方法." *系统工程理论与实践* 24(004): 49-55.
- [24] 韦艳华, 张世英 (2004). "金融市场的相关性分析——Copula-GARCH 模型及其应用." *系统工程* 22(004): 7-12.
- [25] 韦艳华, 张世英 (2006). "金融市场动态相关结构的研究." *系统工程学报* 21(003): 313-317.
- [26] 韦艳华, 张世英 (2007). "多元 Copula-GARCH 模型及其在金融风险分析上的应用." *数理统计与管理*: 03.
- [27] 韦艳华, 张世英 (2003). "Copula 技术及其在金融时间序列分析上的应用." *系统工程* 21: 41-45.
- [28] 韦艳华, 张世英 (2004). "金融市场相关程度与相关模式的研究." *系统工程学报* 19(004): 355-362.
- [29] 吴喜之, 王兆军 (1999). *非参数统计方法* & 北京, 高等教育出版社
- [30] 叶五一, 缪柏其, et al. (2006). "基于 Copula 方法的条件 VaR 估计." *中国科学技术大学学报* 36(009): 917-922.
- [31] 曾健, 陈俊芳 (2005). "Copula 函数在风险管理中的应用研究——以上证 A 股与 B 股的相关结构分析为例." *当代财经* (002): 34-38.
- [32] 张尧庭 (2002). "我们应该选用什么样的相关性指标?" *统计研究* (009): 41-44.
- [33] 张尧庭 (2002). "连接函数 (copula) 技术与金融风险分析." *统计研究* (004): 48-51.

附件

附件 1: 沪深 300 指数与前 5 大权重股的相关性度量指标、边际分布状况

	u	ω	α	β	Dof
浦发银行	0.074834	0.009303	0.086897	0.9131	4.7569
招商银行	0.060334	0.076752	0.19371	0.80629	3.3325
万科 A	0.07411	0.073192	0.12152	0.87848	3.1792
民生银行	0.1011	0.47956	0.004604	0.76437	2.8661
中国联通	-0.00365	2.00E-07	0.15584	0.84416	4.28

	Spearman's ρ	Kendall's τ	λ_u	λ_l	适用函数
浦发银行	0.563	0.3997	0.3492	0.3977	Symmetrised Joe-Clayton copula
招商银行	0.6412	0.4629	0.4842	0	Gumbel Copula
万科 A	0.612	0.4374	0	0	Frank Copula
民生银行	0.6353	0.4556	0.4546	0.4183	Symmetrised Joe-Clayton copula
中国联通	0.6409	0.4665	0	0.5198	Rotated Gumbel copula

附件 2: 阿基米德 Copula 函数的 Kendall's Tau、尾部相关系数计算公式

Copula 函数	Kendall's τ
Clayton	$\tau = \frac{\alpha}{\alpha + 2}$
Gumbel	$\tau = 1 - \frac{1}{\alpha}$
Frank	$\tau = 1 - \frac{4}{\alpha} [D_1(-\alpha) - 1]$, 其中 $D_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{t}{e^t - 1} dt$, $D_1(-\alpha) = D_1(\alpha) + \frac{2}{\alpha}$

上尾相关系数

下尾相关系数

Clayton	0	$\begin{cases} 2^{(-1/\alpha)}, & \alpha < 0 \\ 0, & \alpha > 0 \end{cases}$
Gumbel	$2 - 2^{(1/\alpha)}$	0
Frank	0	0

致 谢

眼看着又到毕业时节，人总又开始不可避免地回想和伤感起来。这人生过得充实而完整，可我们又看似在分阶段地生活，一个阶段开始、结束，又重新展开另一个阶段。实际上我们从没有真正地结束过某段生活，回首来路，那些人事物仍然历历在目，他们依旧生动、朝我微笑，在以后的生活中依然会陪伴着我。

研究生阶段是我生活闪光的一段，我取得了许多人生的财富，这里有许多我的老师、我的同学和朋友，是他们共同造就了我生活中精彩的一页。

感谢我的导师郑振龙教授。第一次听到郑老师的讲座，我就为他的魅力所折服，能够成为郑老师的弟子，受到他的言传身教，我感到非常幸运。郑老师渊博的学识、严谨的治学态度、敏锐的思辨能力和崇高的人格魅力，在无声无息中影响着我，使我获益良多。郑老师在专业知识的传授、生活中的谆谆教诲，形成了我的人生财富。其中郑老师在学术讨论中对学生学术观点的尊重和重视更是使我印象深刻。

感谢金融系朱孟楠老师、魏巍贤老师、杜朝运老师、张顺明老师、林海老师、陈蓉老师以及其他老师，他们在学业上的指导使我较好地掌握了金融知识。

感谢杜朝运老师、张忠正老师、蔡淑昭老师，他们在我的生活和学习中给予了许多帮助，使我在学校也感受到家的温暖。

还要感谢刘晓曙、王保合、康朝峰、张蕾、秦洪元、胡启辉、邹春昊、刘晓颖、宣伟瑜以及其他师兄师姐，他们在我论文的写作过程中给予了极大的帮助，从开始的选题到写作时的技术和知识指点，论文能够顺利完成，多亏他们的指点。

如果以后回忆我的研究生生活，也肯定少不了他们的身影的。李祖景、王瑞峰、薛普、陈博亮、张北锋以及其他同学，他们让我的研究生生活更加精彩、更加难忘。有很多的事要做，有很多的人要感谢！

我最需要感谢的是我的家人。是他们默默的支持和背后的辛劳，来成就我的学业。我勤劳的母亲无微不至的关怀和时时电话里的琐碎叮嘱、不管我做出什么决定都永远支持我的哥哥，是你们造就了我！时至今日，我也还时时怀念我的父亲，想念他给我讲家族故事的模样，想念他出海的背影，是他塑造了我的性格。

郑文旭

2008-3-20