

学校编号: 10384
学号: 14420051300974

分类号: _____ 密级: _____
UDC: _____

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

备兑权证的风险对冲策略

—有交易成本的期权复制模型比较及应用

Covered Warrant's Hedging strategies

—Comparison and Application of Option Replication Models

with Transaction Costs

薛 普

指导教师姓名: 郑振龙教授

专业名称: 金融工程

论文提交日期: 2008年3月

论文答辩时间: 2008年 月

学位授予日期: 2008年 月

答辩委员会主席 _____

评 阅 人 _____

200 年 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹提交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人：

年 月 日

摘要

发行人在发行备兑权证之后,通常需要以各种各样的对冲策略对风险进行规避。在现实世界中,因为无法连续对冲以及交易成本的存在,基于 Black-Scholes 公式的 Delta 动态对冲策略无法有效对冲风险。由于备兑权证本质上是期权,因此本文考虑采用有交易成本的期权间断复制模型作为发行人的风险对冲策略。

作为 Black-Scholes 的拓展,诸多模型讨论了交易成本存在的情况下的间断复制期权策略。本文讨论了其中较具代表性的三个期权复制模型: Hayne E. Leland 模型、Boyle-Vorst 模型以及 Whalley-Wilmott 模型,并通过应用蒙特卡洛模拟方法和 VAR 方法,对这些模型在常数波动率假设下和随机波动率假设下的对冲效果分别进行了比较,发现这几种模型的相对对冲效果不仅与随机波动率模型中的各参数(主要为波动率的波动率)有关,与期权的价内外程度以及股票价格和波动率之间的相关系数也存在规律性联系。基于此发现,本文提出根据股票价格和波动率之间的相关系数以及期权的价内外程度的不同,综合使用这些模型以达到更优效果的想法。

另外,本文着眼于我国的权证市场,对我国的两只可创设权证武钢 JTB1 和首创 JTB1 进行了随机波动率假设下的风险对冲的实证研究,结果发现对不同期权复制模型的综合使用可以提高对冲效率。

关键字 交易成本; 对冲; 随机波动率

Abstract

After the covered warrants were issued, the issuer had to use various strategies to hedge the risk exposed. However, it's difficult to use Delta dynamic hedging strategy to hedge because of the existence of transaction cost as well as disability to hedge continuously. Since the covered warrant is option essentially, this paper considers using option replication strategies to hedge the issuer's risk exposure.

As extensions of the Black-Scholes pricing formula, there are many models finding optimal strategies of discretely replicating an option with transaction costs, which are discussed more representative of the three options hedging models: Hayne E. Leland model, Boyle-Vorst model and Whalley-Wilmott model. Using Monte Carlo simulation and VAR method, this paper discussed the relative performance of these models under the constant and stochastic volatility assumptions respectively, and discovered that the relative performance of these models is not only determined by the parameters in the stochastic volatility model (mainly for the volatility of the volatility), but also has a stable relationship with the instantaneous correlation between the stock price and the volatility, as well as the situation whether the option is in or out of the money. Based on this discovery, the paper proposed that we can use these models together to improve the efficiency of hedging according to the instantaneous correlation between the stock price and the volatility and the extent to which the option is in or out of money.

In addition, this paper made an empirical research on WGJTB1 and SCJTB1 by means of discrete hedging strategies and find that using these models together could improve the hedging performance.

Key words: transaction cost , hedge , stochastic volatility

目 录

1 引言	6
1.1 选题背景.....	6
1.2 国内外研究进展.....	7
1.3 研究思路与进一步研究展望.....	8
2 期权定价模型	9
2.1 Black-Scholes模型.....	9
2.2 随机波动率模型.....	12
3 期权复制模型	16
3.1 Delta动态对冲方法介绍.....	16
3.2 有交易成本的期权复制模型.....	20
3.2.1 Hayne E. Leland模型.....	21
3.2.2 Boyle-Vorst模型.....	23
3.2.3 Whalley-Wilmott模型.....	27
4 对冲模拟	29
4.1 模拟效果的衡量指标.....	29
4.2 模拟方法.....	30
4.3 常数波动率情形下的模拟结果比较.....	36
4.4 随机波动率情形下的模拟结果比较.....	40
4.4.1 股票价格与波动率零相关.....	40
4.4.2 股票价格与波动率正相关.....	43
4.4.3 股票价格与波动率负相关.....	45
4.5 关于VAR值较大的解释.....	47
5 我国可创设权证的实证情况	49
5.1 GARCH (1, 1) 模型和Hull-White模型.....	49
5.2 对武钢JTB1 的实证研究.....	50
5.3 对首创JTB1 的实证研究.....	52
6 结论	53

Contents

1 Introduction	6
1.1 Ground work of this field.....	6
1.2 Related study review.....	7
1.3 Research thoughtway and prospect.....	8
2 Option pricing models	9
2.1 Black-Scholes model	9
2.2 Hull-White model	12
3 Option replication models	16
3.1 Delta dynamic hedging strategy.....	16
3.2 Option replication models with transaction costs	20
3.2.1 Hayne E. Leland model.....	21
3.2.2 Boyle-Vorst model	23
3.2.3 Whalley-Wilmott model.....	27
4 Simulation	29
4.1 Bench of comparing.....	29
4.2 Approach of simulation.....	30
4.3 Comparisons under constant volatility.....	36
4.4 Comparisons under stochastic volatility	40
4.4.1 the stock price and the volatility uncorrelated	40
4.4.2 the stock price and the volatility positively correlated	43
4.4.3 the stock price and the volatility negatively correlated	45
4.5 Explanations on large VAR.....	47
5 Emperical research on specific warrants	49
5.1 GARCH (1, 1) model and Hull-White model.....	49
5.2 On wjtb1.....	50
5.3 On scjtb1	52
6 Conclusion	53

1 引言

1.1 选题背景

随着 20 世纪 70 年代以来金融衍生工具的大量涌现及发展，备兑权证已经成为海外权证市场的主要交易品种。备兑权证设计灵活，交易便捷，且兼具衍生品的三大功能，是新兴市场金融创新的首选品种。在亚太新兴市场中，备兑权证成为发展最为普遍的衍生产品之一。尤其是香港市场，近年来备兑权证发展极为迅速。2004 年及 2005 年，中国香港备兑权证的成交额连续两年高居全球榜首。

在我国，随着股权分置改革的结束，绝大多数因为股改而发行的权证陆续到期，并退出权证市场，取而代之的是可交易分离债所分离出的认股权证。其性质上属于股本权证，发行人为上市公司，主要目的是进行融资。而备兑权证的发行人为标的证券的发行人以外的第三方，通常为声誉较好，拥有较强实力的券商及其它金融机构。备兑权证相对于股本权证来说有更高的灵活性，发行商会根据市场的需求，选择合适的标的证券，设计出各色各样条款的权证，供市场自由选择。因此，解决我国权证市场供不应求的较好办法便是适时推出备兑权证。

对备兑权证的发行商来说，其发行的动力来自于对利润的追逐，他们通过获取发行收入以及做市获取买卖价差的盈利。但由于备兑权证本质上属于期权，发行人在发行备兑权证之后（以认购权证为例），相当于持有了看涨期权的空头，权证到期时只要股票价格高于执行价格，发行人就要以较低的价格将股票卖给投资者，从而面临亏损风险。因此，发行商能否成功的发行一只权证，不仅要看这只权证能否满足市场需求、受到投资者的青睐，同样重要的是发行商是否做好了风险管理的工作，对可能面临的风险进行了有效的对冲及规避。

从本质上来说，要对一个看涨期权的空头进行对冲，较好的方法是复制一个看涨期权的多头，这样在期权到期时，二者的盈利和亏损才可以相抵。因此，期权复制策略可以应用于备兑权证发行人的风险对冲方面。

基于此想法，笔者在本文中通过蒙特卡洛模拟，比较了利用不同期权复制模型进行风险对冲的效果，目的是为了寻找相对有效的风险管理办法，降低发行商的对冲成本，提高备兑权证的定价效率。

1.2 国内外研究进展

现代期权定价理论的最新革命始于 1973 年，Fischer Black 和 Myron Scholes(1973)发表了《期权定价和公司财务》一文，在一系列严格的假设条件下，通过严密的数学推导和论证，提出了“Black-Scholes 模型”，成为期权定价理论研究中的开创性成果。

由于其逻辑的严密，形式的优美以及计算上的简单，Black-Scholes 模型在业界被广泛采用。但其理论本身涉及一些与实际不相符合的假定，诸如波动率是常数以及无风险利率不发生变化等等，致使其价格只能作为现实中的参考价格。

另外，Black-Scholes 模型假设不存在交易成本和税收，且证券交易是连续的，投资者必须持续的调整风险头寸以规避风险。但在实际情况中，由于交易成本的存在，连续对冲会导致巨额的交易成本，因此就涉及到了间断对冲的问题。

Boyle和Emanuel（1980）对于不考虑交易成本的短时间段进行间断复制的误差^①分布进行的检验表明，忽略泰勒展开式的某些高阶项，对冲误差的期望值为零。且对冲误差服从自由度为 1 的卡方分布。

Hayne E.Leland（1985）提出一种采用修正的波动率来解决交易成本带来的对冲误差问题，其基本思想是在连续时间的 Black-Scholes 模型的框架下，假设在给定的时间间隔调整复制组合，通过在波动率中加入包含交易成本因素的项，使波动率的增加导致的期权价格的增加刚好可以抵消交易成本。

Toft（1996）继 Leland 开创性的对 Black-Scholes 模型进行修正后，计算了对冲误差的期望值并给出了显式解。Kabanov 和 Safarian（1997）给出了存在比例交易成本的对冲误差的范围，并认为 Leland 的期权复制策略仅是一种推测。Yonggan Zhao 和 Ziemba（2003）指出，Leland 论文在推导过程中存在漏洞，并用模拟结果证明 Leland 模型存在问题，他们借鉴 Leland 的想法对 Black-Scholes 模型的波动率进行修正，但使用的是内生的使绝对平均误差最小化的修正波动率来进行定价和对冲。Davis 和 Clark（1994），Soner，Shreve 和 Cvitanic（1995）等同样指出，这种方法不能做到精确复制，因为只要期权的执行价格是正的，持有标的股票的盈利就比到期日期权的盈利高。

Leland 的间断复制方法实际上是 Local-in-Time 方法，是以事先确定复制间

^①期权复制策略中，期权复制组合的回报与期权的真实回报之间所产生的误差，下文统称为对冲误差。

隔为前提，来找寻最适中的期权复制方法。此方法由 Leland 提出之后，由 Boyle 和 Vorst（1992）以及 Whalley 和 Wilmott（1993）做出进一步延伸。由于这类模型的计算速度很快，因此在实际应用方面更为突出。

另外一种期权复制方法即为 Global-in-Time 方法，这种方法是通过使效用最大化来找到最合适的相关参数，从而确定最佳复制组合。较有代表性的相关代表有 Hodges 和 Neuberger（1989）以及 Davis, Panas 和 Zariphopoulou（1993）。此类模型需要事先确定投资者的效用函数，且经常涉及到多维问题，致使计算非常耗时，大大降低了其实用性。Whalley 和 Wilmott（1997）通过对 Davis, Panas 和 Zariphopoulou 的模型进行改进，提出了一个相对容易实行的算法。即下文将要介绍的避险带算法。

1.3 研究思路与进一步研究展望

为了能够找出效率较高的期权复制模型，笔者从上述模型中选取了三个模型进行比较和讨论，它们分别是 Hayne E.Leland 模型、Boyle-Vorst 模型以及 Whalley-Wilmott 模型。

笔者首先对这三个模型的特点进行了分析，例如前两个模型中，间断复制的频率对复制效果的影响，后一个模型中，发行商的风险厌恶系数对复制效果的影响等。

在掌握了这三个模型的基本特点之后，笔者将其作为期权发行人的对冲策略，分别比较了它们在常数波动率假设下和随机波动率假设下的对冲效果的优劣。

在这两部分的研究以及比较中，所采用的主要方法是蒙特卡洛模拟方法，对冲效果的衡量标准则采用了发行人最终损益的均值、标准差以及 VAR 值。

在得出研究结论之后，笔者对我国的可创设权证进行了实证研究，通过对两个特点不同的可创设权证进行模拟风险对冲，说明如果采用论文中所提出的随机波动率假设下的期权复制方法进行风险对冲，能够更有效的提高备兑权证发行商的对冲效率。

本文在对三个期权复制模型的模拟比较以及实证应用中，主要考虑的参数是期权的价内外程度、波动率的波动率以及股票价格和波动率之间的相关系数，而

其它的一些参数，例如随机波动率模型中的波动率均值回归系数、股票的预期收益率等并没有进行详尽的考察，因此这些参数对模型的对冲效率的影响可以作为未来的研究方向。

2 期权定价模型

2.1 Black-Scholes 模型

1973 年，美国芝加哥大学教授 Fischer Black 和 Myron Scholes 提出了著名的 Black-Scholes 期权定价模型，在学术界和实务界引起强烈的反响。

Black-Scholes 期权定价模型的七个假设条件如下：

1. 期权标的资产为一风险资产（Black-Scholes 期权定价模型中为股票），当前时刻市场价格为 S 。 S 遵循几何布朗运动，即

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

其中， dS 为股票价格瞬时变化值， dt 为极短瞬间的时间变化值， dz 为均值为零，方差为 dt 的无穷小的随机变化值（ $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ ，称为标准布朗运动， ε 代表从标准正态分布（即均值为 0、标准差为 1 的正态分布）中取的一个随机值）， μ 为股票价格在单位时间内的期望收益率（以连续复利表示）， σ 则是股票价格的波动率，即证券收益率在单位时间内的标准差。 μ 和 σ 都是已知的。

2. 在期权有效期内，标的资产没有现金收益支付。综合 1 和 2，意味着标的资产价格的变动是连续而均匀的，不存在突然的跳跃。

3. 没有交易费用和税收，不考虑保证金问题，即不存在影响收益的任何外部因素。综合 2 和 3，意味着投资者的收益仅来源于价格的变动，而没有其他影响因素。

4. 该标的资产可以被自由地买卖，即允许卖空，且所有证券都是完全可分的。

5. 在期权有效期内，无风险利率 r 为常数，投资者可以此利率无限制地进行借贷。

6. 期权为欧式看涨期权，其执行价格为 X ，当前时刻为 t ，到期时刻为 T 。

7. 不存在无风险套利机会。

由于我们假设证券价格 S 遵循几何布朗运动，因此有：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

其在一个小的时间间隔 Δt 中， S 的变化值 ΔS 为：

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad (2.1)$$

假设 f 是依赖于 S 的衍生证券的价格，则 f 一定是 S 和 t 的函数，可得：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

在一个小的时间间隔 Δt 中， f 的变化值 Δf 为：

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z \quad (2.2)$$

从上面分析可以看出，(2.1) 和 (2.2) 中的 Δz 相同，都等于 $\varepsilon \sqrt{\Delta t}$ 。因此只要选择适当的衍生证券和标的证券的组合就可以消除不确定性。为了消除 Δz ，

我们可以构建一个包括一单位衍生证券空头和 $\frac{\partial f}{\partial S}$ 单位标的证券多头的组合。令

Π 代表该投资组合的价值，则：

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (2.3)$$

在 Δt 时间后，该投资组合的价值变化 $\Delta \Pi$ 为：

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \quad (2.4)$$

将式 (2.1) 和 (2.2) 代入式 (2.4)，可得：

$$\Delta \Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (2.5)$$

由于式 (2.5) 中不含有 Δz ，该组合的价值在一个小时间间隔 Δt 后必定没有风险，因此该组合在 Δt 中的瞬时收益率一定等于 Δt 中的无风险收益率。否则的话，套

利者就可以通过套利获得无风险收益率。因此，在没有套利机会的条件下：

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

把式 (2.3) 和 (2.5) 代入上式得：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S\right)\Delta t$$

化简为：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (2.6)$$

这就是著名的布莱克——舒尔斯微分方程，它适用于其价格取决于标的证券价格 S 的所有衍生证券的定价。

应该注意的是，当 S 和 t 变化时， $\frac{\partial f}{\partial S}$ 的值也会变化，因此上述投资组合的价值并不是永远无风险的，它只是在一个很短的时间间隔 Δt 中才是无风险的。在一个较长时间中，要保持该投资组合无风险，必须根据 $\frac{\partial f}{\partial S}$ 的变化而相应调整标的证券的数量。当然，推导布莱克——舒尔斯微分方程并不要求调整标的证券的数量，因为它只关心 Δt 中的变化。

布莱克和舒尔斯成功地求解了他们的微分方程，从而获得了欧式看涨期权和看跌期权的精确公式。

在风险中性的条件下，欧式看涨期权到期时（ T 时刻）的期望值为：

$$\hat{E}[\max(S_T - X, 0)]$$

其中， \hat{E} 表示风险中性条件下的期望值。根据风险中性定价原理，欧式看涨期权的价格 c 等于将此期望值按无风险利率进行贴现后的现值，即：

$$c = e^{-r(T-t)} \hat{E}[\max(S_T - X, 0)] \quad (2.7)$$

在风险中性条件下，我们可以用 r 取代 $\ln S_T$ 概率分布中的 μ ，即：

$$\ln S_T \sim \phi\left[\ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right] \quad (2.8)$$

对式 (2.7) 右边求值是一种积分过程，结果为：

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (2.9)$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$N(x)$ 为标准正态分布变量的累计概率分布函数 (即这个变量小于 x 的概率), 根据标准正态分布函数特性, 我们有 $N(-x) = 1 - N(x)$ 。

这就是无收益资产欧式看涨期权的定价公式。

我们可以从以下三个角度来理解这个公式的金融含义。

首先, $N(d_2)$ 是在风险中性世界中 S_T 大于 X 的概率, 或者说式欧式看涨期权被执行的概率, $Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$ 是 X 的风险中性期望值的现值。
 $SN(d_1) = e^{-r(T-t)}S_T N(d_1)$ 是 S_T 的风险中性期望值的现值。

其次, $\Delta = N(d_1)$ 是复制交易策略中股票的数量, $SN(d_1)$ 就是股票的市值, $Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$ 则是复制交易策略中负债的价值。

最后, 从金融工程的角度来看, 欧式看涨期权可以分拆成资产或无价值看涨期权 (Asset-or-nothing call option) 多头和现金或无价值看涨期权 (cash-or-nothing option) 空头, $SN(d_1)$ 是资产或无价值看涨期权的价值, $Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$ 是 X 份现金或无价值看涨期权空头的价值。

2.2 随机波动率模型

在 Black-Scholes 公式中, 一个很重要的假设是正股波动率为常数。在现实世界中, 这个假设显然是无法成立的。尽管我们无法直接市场中观测到资产波动率的大小, 然而任何处于市场中的投资者都可以明显感觉到这一点, 很多对资产价格时间序列数据的统计检验更进一步证实了资产价格波动率并非常数。

到目前为止, 为随机波动率建模的文献已经相当多, 其一般模型为:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz_1$$

$$d\sigma = p(S, \sigma, t)dt + q(S, \sigma, t)dz_2$$

其中 dz_1 和 dz_2 的相关系数为 ρ 。这时对函数 $p(S, \sigma, t)$ 和 $q(S, \sigma, t)$ 的选择很重要，它不仅关系到波动率的确定，也对期权定价有重要影响。

在为期权定价过程中，随机波动率也同样可以采用 Black-Scholes 方程所使用的无套利定价过程，只是这时候，在期权组合中，由于期权的价格函数由 $f(S, t)$ 变为 $f(S, \sigma, t)$ ，这时不仅需要 Δ 份的标的资产以消除 S 带来的不确定性，还需要加入 Δ_1 份的另一种期权以消除 σ 带来的不确定性，即 $\Pi = f - \Delta S - \Delta_1 f_1$ ，在此基础上再进行相应的分析，为期权定价。当然这时的模型往往非常复杂，常常无法得到解析解。因此，尽管这些复杂的模型更接近现实，但 Black-Scholes 公式仍然使用广泛，尤其在它的一些假设影响不是很大的时候。

在众多随机波动率模型中，较为有名的模型之一便是 Hull 和 White 提出的随机波动率模型。

首先，在假设股票价格和波动率之间不相关时，他们给出了期权价格的解析解。证明如下：

利用风险中性定价的方法，可以得出期权的价格等于期权未来价值以无风险利率贴现所得的值。

$$f(S_t, \sigma_t^2, t) = e^{-r(T-t)} \int f(S_T, \sigma_T^2, T) p(S_T | S_t, \sigma_t^2) dS_T, \quad (2.10)$$

其中， T 为期权到期的时间， S_t 为标的资产于 t 时刻的价格， σ_t 为标的资产于 t 时刻的瞬时波动率， p 为条件概率分布，且

$$\begin{aligned} E(S_T | S_t) &= S_t e^{r(T-t)} \\ f(S_T, \sigma_T^2, T) &= \max(0, S - X) \end{aligned}$$

由于任意三个相关变量的条件概率密度函数均满足

$$p(x | y) = \int g(x | z) h(z | y) dz$$

则若将 \bar{V} 表示为 $\bar{V} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_\tau^2 d\tau$

可知 S_T 的分布情况可以写为

$$p(S_T | \sigma_t^2) = \int g(S_T | \bar{V}) h(\bar{V} | \sigma_t^2) d\bar{V}$$

可以将 (2.10) 简化为下式:

$$f(S_t, \sigma_t^2, t) = \int \left[e^{-r(T-t)} \int f(S_T) g(S_T | \bar{V}) dS_T \right] h(\bar{V} | \sigma_t^2) d\bar{V}$$

则在股票价格和波动率相关系数为零时, 上式中括号中的部分即为波动率为 \bar{V} 的 Black-Scholes 公式的价格 (以 $C(\bar{V})$ 表示), 其中 $\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t) dt$

$$\text{则有: } f(S_t, \sigma_t^2) = \int C(\bar{V}) h(\bar{V} | \sigma_t^2) d\bar{V}$$

最后, 利用泰勒展开式, 他们得到了此方程的解析解:

$$\begin{aligned} f(S, \sigma^2) = & C(\sigma^2) + \frac{1}{2} \frac{S\sqrt{T-t}N'(d_1)(d_1d_2-1)}{4\sigma^3} \times \left[\frac{2\sigma^4(e^k - k - 1)}{k^2} - \sigma^4 \right] \\ & + \frac{1}{6} \frac{S\sqrt{T-t}N'(d_1)(d_1d_2-3)(d_1d_2-1) - (d_1^2 + d_2^2)}{8\sigma^5} \\ & \times \sigma^6 \left[\frac{e^{3k} - (9+18k)e^k + (8+24k+18k^2+6k^3)}{3k^3} \right] + \dots \end{aligned}$$

其次, 对于股票价格和波动率存在以及不存在相关性的情况, 他们分别通过数值方法进行了分析。

假设股票价格以及波动率服从以下过程:

$$\begin{aligned} dS &= \phi S dt + \sigma S dw \\ dV &= \mu V dt + \xi V dz \end{aligned}$$

其中 $\mu = a(\sigma^* - \sigma)$, 且 a, σ^*, ξ 均为常数。

在股票价格和波动率不相关时, 波动率路径中的随机扰动项对股票路径中的随机扰动项没有影响, 因此相对于常数波动率下的模拟, 只用考虑波动率路径的变化。如果将时间段 $T-t$ 分为 n 个相同的时间段, 则 V_i 在 $t + i(T-t)/n$ 时刻为:

$$V_i = V_{i-1} e^{[(\mu - \xi^2/2)\Delta t + v_i \xi \sqrt{\Delta t}]}, \text{ 其中 } \Delta t = (T-t)/n$$

在股票价格和波动率相关时, 波动率路径中的随机扰动项和股票价格中的随机扰动项存在一定的相关系数, 则股票价格的路径也要同时考虑。

设两个互相独立的随机变量为 u_i 和 v_i , 股票价格和其波动率之间的相关系数为 ρ , 则有:

$$S_i = S_{i-1} e^{[(r-V_{i-1}/2)\Delta t + u_i \sqrt{V_{i-1}\Delta t}]}$$

$$V_i = V_{i-1} e^{[(\mu-\xi^2/2)\Delta t + \rho u_i \xi \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-\rho^2} v_i \xi \sqrt{\Delta t}]}$$

在模拟过程中，他们使用对偶变量技术，有效的提高了模拟的效率。

Hull 和 White 把这个模型得到的期权价格同使用 Black-Scholes 公式得到的价格进行了比较，他们发现：随机波动率确实会引起定价的偏差，而波动率和资产价格之间的相关性在其中相当重要。

1. 当波动率是随机的，且与股票价格不相关时，也就是 dz_S 和 dz_V 不相关时，情形比较简单，欧式期权的价格是 Black-Scholes 价格在期权有效期内平均方差率分布上的积分值。此时 Black-Scholes 公式倾向于高估平价或接近平价的期权价格，低估深度价内和深度价外期权，即呈现波动率微笑状态。

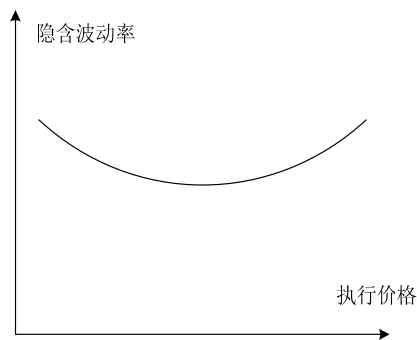


图 2.1：波动率微笑

2. 在股票价格和波动率相关的情况下，这个随机波动率模型没有解析解，只能使用数值方法得到期权价格。

当波动率和股票价格负相关时，得到的结果为波动率偏斜模式；当它们之间是正相关时，结果正好相反，Black-Scholes 模型倾向于低估价外看涨期权而高估价外看跌期权。

3. 波动率随机性质的影响，也会因到期时间的不同而不同。有效期越长，随机波动率对波动率微笑的影响越不显著，因为随机变化会在长期中平均化。但是随机波动率对定价偏差绝对值的影响则正好相反，时间越短，随机波动率引起的定价偏差绝对值越小（但是对于深度价外期权而言，这个偏差用百分比衡量时

可能是很大的)。

3 期权复制模型

对于期权的发行商来说,在卖出期权之后,便承担了一定的风险。以看涨期权为例,如果发行商不进行任何风险管理措施,而于期权到期日,股票价格远远高于执行价格,那么发行商就会遭受较大的损失。因此,为了能够较好的控制风险,发行商需要在卖出期权之后对这部分头寸进行风险管理,风险管理的主要方式便是我们要讨论到的期权对冲。简单来说,期权对冲就是买入与期权多头具有相近回报的资产。而根据资产头寸的调整频率,我们又可以将对冲方法简略分为动态对冲和静态对冲两种。动态对冲是时时监视期权的标的资产价格的变化,并随时改变所买入相关资产的头寸多少的策略;而静态对冲则只需要找到与期权多头具有相近回报的资产组合并持有即可,标的资产价格的变动可能会使静态对冲组合有一些变化,但相对动态对冲来说变化很小。此篇论文所研究的是动态对冲模型,下面将对动态对冲模型做简要介绍。

3.1 Delta 动态对冲方法介绍

期权的 Delta 用于衡量期权价格对标的资产市场价格变动的敏感度,它等于期权价格变化与标的资产价格变化的比率。用数学语言表示,期权的 Delta 值等于期权价格对标的资产价格的偏导数;显然,从几何上看,它是期权价格与标的资产价格关系曲线切线的斜率。

一、期权 Delta 值的计算

令 f 表示期权的价格, S 表示标的资产的价格, Δ 表示期权的 Delta, 则:

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S} \quad (3.1)$$

根据 Black-Scholes 期权定价公式 ($c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$) 和相应的无收益资产欧式看跌期权定价公式 ($p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$), 我们可以算出无收益资产看涨期权的 Delta 值为:

$$\Delta = N(d_1)$$

无收益资产欧式看跌期权的 Delta 值为：

$$\Delta = -N(-d_1) = N(d_1) - 1$$

其中，
$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

当期权更为复杂的时候，相应地期权的 Delta 值也更为复杂。例如支付已知红利率 q （连续复利）的欧式看涨期权的 Delta 值为

$$\Delta = e^{-q(T-t)} N(d_1)$$

二、期权 Delta 值的性质和特征分析

根据累积标准正态分布函数的性质可知， $0 < N(d_1) < 1$ ，因此无收益资产看涨期权的 Δ 总是大于 0 但小于 1；而无收益资产欧式看跌期权的 Δ 则总是大于 -1 小于 0。反过来，作为无收益资产欧式看涨期权空头，其 Delta 值就是总是大于 -1 小于 0；而无收益资产欧式看跌期权空头的 Δ 则总是大于 0 小于 1。

从 d_1 定义可知，期权的 Δ 值取决于 S 、 r 、 σ 和 $T-t$ ，根据期权价格曲线的形状，如图 3.1 所示，我们可知无收益资产看涨期权和欧式看跌期权的 Δ 值与标的资产价格的关系如图 3.2 (a) 和 (b) 所示。

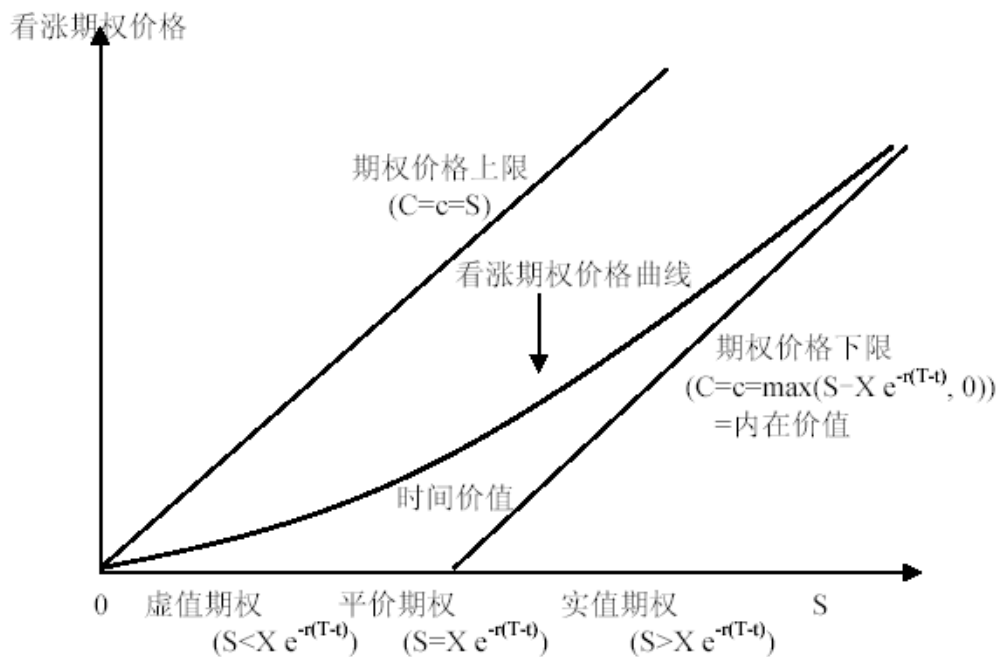


图 3.1 看涨期权的价格图

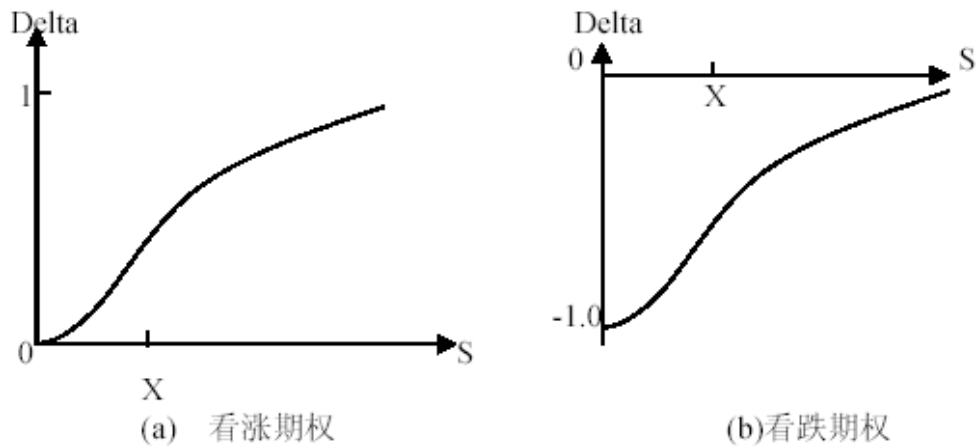


图 3.2 无收益资产看涨期权和看跌期权 Delta 值与标的资产价格的关系

从 $N(d_1)$ 函数的特征还可得出无收益资产看涨期权和欧式看跌期权在价内、平价和价外三种状况下的 Δ 值与到期期限之间的关系如图 3.3 (a) 和 (b) 所示。

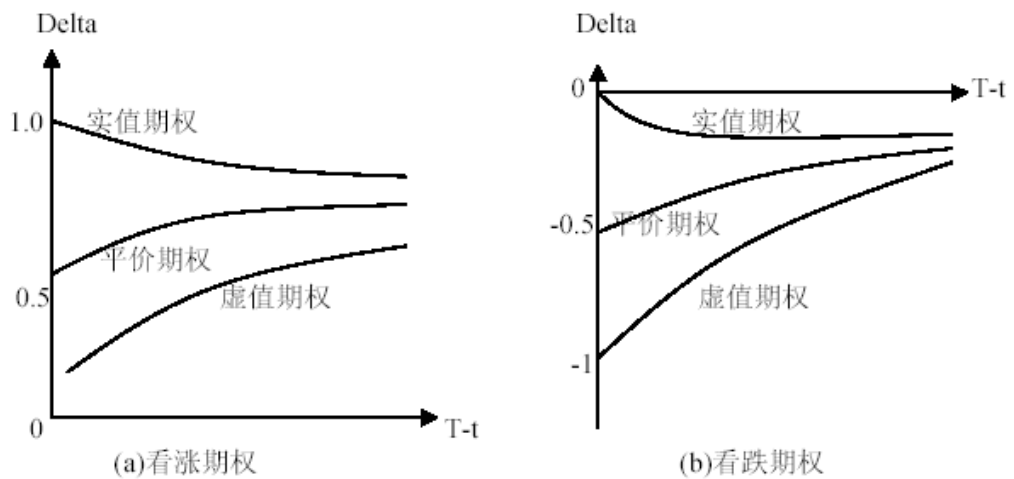


图 3.3 无收益资产看涨期权和欧式看跌期权 Delta 值与到期期限之间的关系

此外，无风险利率水平越高，无收益资产看涨期权和欧式看跌期权的 Δ 值也越高，如图.3.4 (a) 和 (b) 所示。

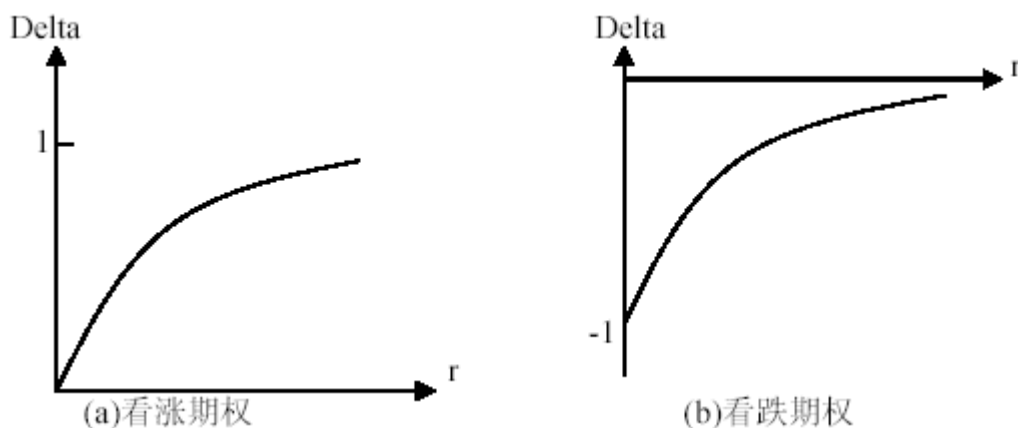


图 3.4 无收益资产看涨期权和欧式看跌期权 Delta 值与 r 之间的关系

然而，标的资产价格波动率（ σ ）对期权 Δ 值的影响较难确定，它取决于无风险利率水平、 S 与 X 的差距、期权有效期等因素。但可以肯定的是，对于较深度价外的看涨期权和较深度价内的看跌期权来说， Δ 是 σ 的递增函数，其图形与图 3.4 (a) 和 (b) 相似。

三、Delta 中性状态与套期保值

由于标的资产和相应的衍生证券可取多头或空头，因此其 Δ 值可正可负，这样，标的资产和期权所构成的组合的 Δ 值就可能等于 0。我们称 Δ 值为 0 的证券组合处于 Delta 中性状态。

当证券组合处于 Δ 中性状态时，组合的价值显然就不受标的资产价格波动的影响，从而实现了套期保值。但是值得强调的是，证券组合处于 Δ 中性状态只能维持一个很短的时间，因为 Delta 实质上是导数。因此，我们只能说，当证券组合处于 Δ 中性状态时，该组合价值在一个“短时间”内不受标的资产价格波动的影响，从而实现了“瞬时”套期保值。

如此一来，当投资者手中拥有某种证券时，可以通过相应的期权进行套期保值，使证券组合的 Δ 值等于 0，也就是不受标的资产价格变化的影响。对于期权的发行商来说，在持有期权空头时，同样可以采用这种方法来管理风险。不过，

由于 Δ 中性保值只是在瞬间实现的，随着 S 、 r 、 σ 和 $T-t$ 的变化， Δ 值也在不断变化，因此发行商需要随着标的资产价格的变化不断调整保值头寸以便使保值组合重新处于 Δ 中性状态，这种调整称为再均衡（Rebalancing），发行商此种管理风险的方法称为动态对冲方法。

3.2 有交易成本的期权复制模型

在不考虑交易费用（指买入卖出的佣金等费用，利息费用则是需要考虑的）并假设波动率为常数的情况下，基于连续时间 Delta 对冲的原理，我们可以构造这样一个组合，它由一个标的资产的多头和一部分现金流的空头构成，且二者在任意一个时间点的价值之和都刚好等于一份看涨期权的价值。随着期权到期日的临近，此组合中的两个构成部分均发生变化，但其于期权到期日所得回报均等于一份看涨期权所得的回报。通过这种期权复制组合的方法我们一样可以得到期权的真实价格。

在没有交易成本且组合中两部分的权重于连续时间状态下调整时，此组合的初始值就是看涨期权的价格。其于 Black-Scholes 公式的结果是一致的。但当存在交易成本时，情况就大为不同了。无论是对冲误差的均值还是方差，都会因为交易成本的存在而发生很大变化。

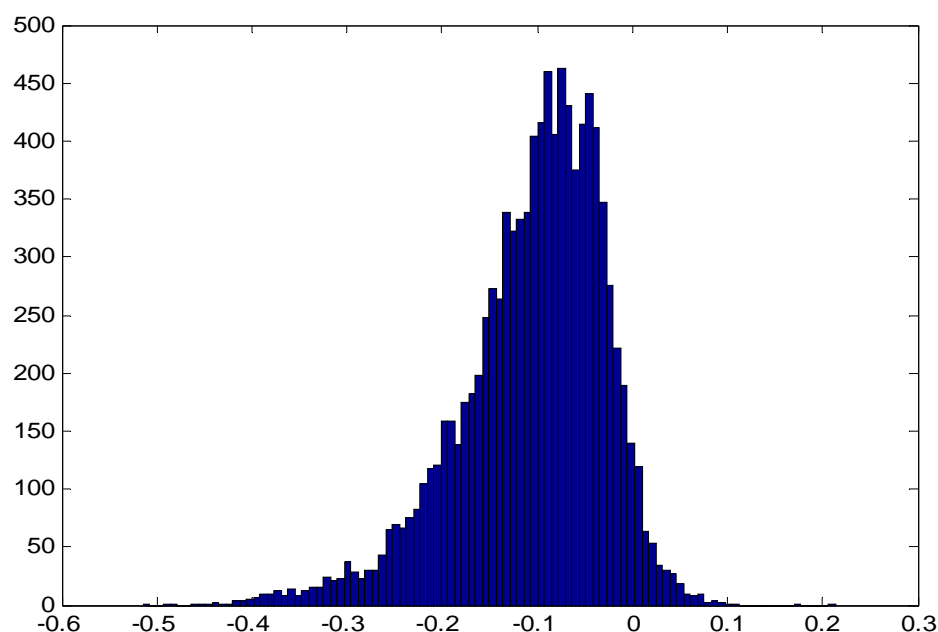


图 3.5: 考虑交易成本的 Black-Scholes 间断对冲误差的概率分布直方图

因此，当存在交易成本时，需要找到一个合适的状态，使复制组合在考虑了交易成本的情况下，回报仍然接近于看涨期权的到期回报，而方差也能控制在可以容忍的范围之中。

本文对三种较具代表性的方法做了以下阐述。

3.2.1 Hayne E. Leland 模型

Leland 首先提出了利用 Black-Scholes 方法在有交易成本且间断复制的情况下所面临的三个问题：

第一，在不考虑交易成本的情况下，如果要保持较小的对冲误差，就需要足够多的对冲次数。但随着对冲次数的增多，交易成本也会增大（没有上限）。如此一来，为了保证一定的对冲精度，所需要花费的成本就会很大，甚至有可能会超过标的资产本身的价格。

第二，在我们利用复制组合策略进行对冲时，如果想要找到期权的合理定价区间，就需要考虑所有路径中的最大交易成本，而不仅仅是所有路径的交易成本的平均。但由于交易成本是路径依赖的，它不仅取决于股票价格的初始价格和最终价格，还跟每个时点的股票价格有关，因此，最大交易成本的计算绝非易事。

第三，交易成本的特性是路径依赖并且没有最大边界存在，因此交易成本的不确定性并不会因为对冲次数的增多而减小。无论对冲间隔多小，来自于交易成本的花费有多大，我们仍然不能保证可以获得较小的对冲误差。在存在交易成本的情况下，对冲误差并不会因为期权对冲频率的增加而减小。

由于这些问题的存在，（1）原先的 Black-Scholes 复制的方法已经不能采用。（2）即使意图通过在最初的期权价格加上一个值来弥补交易成本，这种方法同样不可行。因此，Leland 采用了这样一种思路，他认为对冲策略本身应该与交易成本以及每次的对冲间隔有关。他提出通过修正 Black-Scholes 公式中的波动率来改善对冲效果。

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2(\sigma^2, k, \Delta t) &= \sigma^2 \left[1 + \frac{k}{\sigma^2 \Delta t} E \left| \frac{\Delta S}{S} \right| \right] \\ &= \sigma^2 \left[1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \sigma \sqrt{\Delta t} \right]\end{aligned}$$

$$\text{由于 } E \left| \frac{\Delta S}{S} \right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \sqrt{\Delta t}$$

在此，Leland 构造以下组合：

$$\begin{aligned}D &= \hat{C}_S \\ Q &= \hat{C} - \hat{C}_S S\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中， \hat{C} 是将修正波动率代入 Black-Scholes 公式所得的值， \hat{C}_S 是对 S 的一阶导数。

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，这个组合在有交易成本存在的情况下同样可以得到现金流 $\max[S - K, 0]$ ，从而可以对期权进行复制。

证明如下：

考虑这样一个组合：它包括 D 份股票以及 Q 价值的无风险债券。 Δt 代表对冲的时间间隔。设考虑交易成本之后的对冲误差为 ΔH 。则有：

$$\Delta H = \Delta P - \Delta \hat{C} - TC\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\Delta P &= D\Delta S + Qr\Delta t + O(\Delta t)^2 \\ \text{而} \quad &= \hat{C}_S S \left(\frac{\Delta S}{S} \right) + (\hat{C} - \hat{C}_S S)r\Delta t + O(\Delta t)^2\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\Delta \hat{C} &= \hat{C}(S + \Delta S, t + \Delta t) - \hat{C}(S, t) \\ &= \hat{C}_S S \left(\frac{\Delta S}{S} \right) + \frac{1}{2} \hat{C}_{SS} S^2 \left(\frac{\Delta S}{S} \right)^2 + \hat{C}_t \Delta t + O(\Delta t^{3/2})\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}TC &= \frac{1}{2} k |\Delta D(S + \Delta S)| \\ &= \frac{1}{2} k \left[\hat{C}_S(S + \Delta S, t + \Delta t) - \hat{C}_S(S, t) \right] (S + \Delta S) \\ &= \frac{1}{2} k \left[\hat{C}_{SS}(S, t) \Delta S (S + \Delta S) \right] + O(\Delta t^{3/2}) \\ &= \frac{1}{2} k \hat{C}_{SS} S^2 \left| \frac{\Delta S}{S} \right| + O(\Delta t^{3/2})\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中, $\frac{1}{2}k\hat{C}_{ss}S^2\left|\frac{\Delta S}{S}\right|$ 为 $O(\Delta t)$

将 (3.4) 与 (3.6) 代入 (3.3), 可得

$$\Delta H = (\hat{C} - \hat{C}_s S)r\Delta t - \frac{1}{2}\hat{C}_{ss}S^2\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 - \hat{C}_t\Delta t - \frac{1}{2}k\hat{C}_{ss}S^2\left|\frac{\Delta S}{S}\right| + O(\Delta t^{3/2})$$

由于 \hat{C} 满足 $\frac{1}{2}\hat{C}_{ss}S^2\sigma^2 + \hat{C}_t - r[\hat{C} - \hat{C}_s S] = 0$, 则可得:

$$\begin{aligned}\Delta H &= \frac{1}{2}\hat{C}_{ss}S^2\left[\hat{\sigma}^2\Delta t - \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 - k\left|\frac{\Delta S}{S}\right|\right] + O(\Delta t^{3/2}) \\ &= \frac{1}{2}\hat{C}_{ss}S^2\left[\sigma^2\Delta t + kE\left|\frac{\Delta S}{S}\right| - \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 - k\left|\frac{\Delta S}{S}\right|\right] + O(\Delta t^{3/2}) \\ &= \frac{1}{2}\hat{C}_{ss}S^2\left[\sigma^2\Delta t - \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + k\left(E\left|\frac{\Delta S}{S}\right| - \left|\frac{\Delta S}{S}\right|\right)\right] + O(\Delta t^{3/2})\end{aligned}$$

取期望值则有 $E(\Delta H) = O(\Delta t^{3/2}) \rightarrow 0$, 且 $\text{var}(\Delta H) = O(\Delta t^2)$

由于 $[0, T]$ 时间段内的总对冲误差为 $\sum_{t=0}^{T-\Delta t} \Delta H_t$, 而不同时刻间的 ΔH_t 不相关,

因此, $\text{var}\left(\sum_{t=0}^{T-\Delta t} \Delta H_t\right) = \sum_{t=0}^{T-\Delta t} \text{var}(\Delta H_t) = O(\Delta t)$

因此, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 此复制组合的回报为 $\max[S - K, 0]$ 。

根据此结论, 在交易成本较小的情况下, 他得出了期权价格的上下限:

$$\left[\hat{C} - 2kS_0N'(d1)\sqrt{T} / \sqrt{2\pi\Delta t}, \hat{C}\right]$$

3.2.2 Boyle-Vorst 模型

Boyle 和 Vorst 提出用 Cox, Ross, and Rubinstein(1979)的二叉树模型对欧式看涨期权的多头和空头分别定价, 从而得出期权的价值范围。

对多头进行定价时, 为了能够完全复制一个看涨期权多头到期时的回报, 就需要持有一个风险资产(股票)的多头和一个可获得无风险收益的债券空头。

按照传统的二叉树定价方法过程:

假设 $R = 1 + r$ (r 为无风险利率), $u > R > d$

正股的二叉树图如下所示：

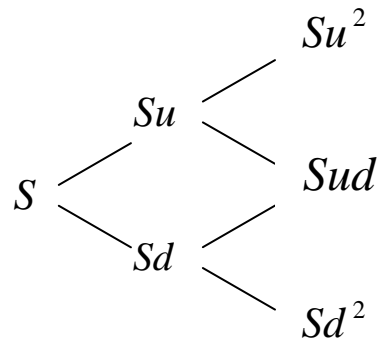


图 3.6 正股的二叉树图

得到每个结点的资产价格之后，就可以在二叉树模型中采用倒推定价法，从树型结构图的末端 T 时刻开始往回倒推，为期权定价。由于在到期 T 时刻的预期期权价值是已知的，例如看涨期权价值为 $\max(S_T - X, 0)$ ，看跌期权价值为 $\max(X - S_T, 0)$ ，因此在风险中性条件下在求解 $T - \Delta t$ 时刻的每一结点上的期权价值时，都可通过将 T 时刻的期权价值的预期值在 Δt 时间长度内以无风险利率 r 贴现求出。同理，要求解 $T - 2\Delta t$ 时的每一结点的期权价值时，也可以将 $T - \Delta t$ 时的期权价值预期值在时间 Δt 内以无风险利率 r 贴现求出。依此类推。采用这种倒推法，最终可以求出零时刻（当前时刻）的期权价值。

在有交易成本的情况下，动态复制的原理和上述方法相似，但是仅知道每个结点的复制组合的总价值仍是不够，还需要知道持有股票的数量以及债券的数量。用 Δ 表示所持股票数量，用 B 表示债券的数量。可以得到如下二叉树图：

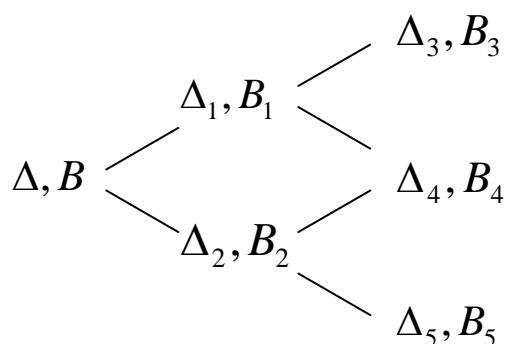


图 3.7 复制组合的二叉树图

我们必须选择合适的 (Δ, B) 使得在股票价格处于上涨状态 Su 时可以买入组合 (Δ_1, B_1) ，而在股票价格处于下跌状态 Sd 时可以买入组合 (Δ_2, B_2) 。

因此可得以下两个公式：

$$\Delta Su + BR = \Delta_1 Su + B_1 + k|\Delta - \Delta_1|Su$$

$$\Delta Sd + BR = \Delta_2 Sd + B_2 + k|\Delta - \Delta_2|Sd$$

其中， k 为交易成本比率。可以证明，上述两式有唯一解，且符合

$$\Delta_2 \leq \Delta \leq \Delta_1$$

这样一来，可以得到如下两个公式：

$$\Delta S\bar{u} + BR = \Delta_1 S\bar{u} + B_1$$

$$\Delta S\bar{d} + BR = \Delta_2 S\bar{d} + B_2$$

其中： $\bar{u} = u(1+k)$ $\bar{d} = d(1-k)$

则同样根据倒推定价法，有

$$C = \Delta S + B = \frac{\bar{p}[(1+k)\Delta_1 Su + B_1] + (1-\bar{p})[(1-k)\Delta_2 Sd + B_2]}{R},$$

其中 C 为完全复制看涨期权多头回报的组合价值的现值（在考虑交易成本的情况下）。也可以写为

$$C = \Delta S + B = \left[\bar{p}\bar{p}_u \left\{ (1+k)\Delta_3 S u^2 + B_3 \right\} \right. \\ \left. + \bar{p}(1-\bar{p}_u) \left\{ (1-k)\Delta_4 S u d + B_4 \right\} \right. \\ \left. + (1-\bar{p})\bar{p}_d \left\{ (1+k)\Delta_4 S u d + B_4 \right\} \right. \\ \left. + (1-\bar{p})(1-\bar{p}_d) \left\{ (1-k)\Delta_5 S d^2 + B_5 \right\} \right] / R^2,$$

$$\text{其中, } \bar{p}_u = \frac{R(1+k) - \bar{d}}{\bar{u} - \bar{d}} \quad \bar{p}_d = \frac{R(1-k) - \bar{d}}{\bar{u} - \bar{d}}$$

从中可以看出, $0 < \bar{p}_d < \bar{p}_u < 1$

根据作者的求证, 可以得出在考虑交易成本的情况下, 构造一个看涨期权多头的费用为:

$$C = \frac{E\left[\left((1 + \bar{X}_n k) S e^Y - K\right) I_{S e^Y \geq K}\right]}{R^n}, \quad (3.7)$$

其中, n 为期权到期的时间段数目, $Y = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\text{且 } \begin{cases} \bar{X}_n = 1 & \text{if } X_n = \log_e u \\ \bar{X}_n = -1 & \text{if } X_n = \log_e d \end{cases}$$

由 Cox, Ross, and Rubinstein (1979) 的二叉树模型中的结果可知:

$$u = e^{\sigma\sqrt{h}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{h}} \quad R = e^{rh}$$

其中, $h = \frac{T}{n}$, σ 为风险资产的波动率, r 为无风险连续复利。

经此, 根据作者证明, 可得:

$$\text{Var}(Y) = \sigma^2 \left(1 + O(k^2) + \left\{ \frac{2k}{\sigma} + O(k^3) \right\} \sqrt{n} \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ E(Y) = r - \frac{1}{2} [\text{Var}(Y)] + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O(k^2) \quad (3.8)$$

且有:

$$E(\bar{X}_n, k) = -k \left\{ k + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right\} \\ \text{Cov}(\bar{X}_n, k, Y) = 4k^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

因此, (3.7) 式可以写为:

$$C = \frac{E\left[\left(S e^Y - K\right) I_{S e^Y \geq K}\right]}{R^n}, \quad (3.9)$$

对于大的 n 来说，随机数 Y 近似服从 (3.8) 所描述的正态分布。因此，股票价格趋于服从对数正态分布。我们可以用传统的 Black-Scholes 方法计算 (3.9)，这样可得到下面的结论：

考虑交易成本的情况下，对于较大的 n 和较小的 k ，看涨期权的动态复制组合的初始值，近似于采用校正波动率计算后的 Black-Scholes 公式的值。

$$\text{修正波动率为： } \sigma^2 \left(1 + \frac{2k\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

其中， T 为剩余期限。

3.2.3 Whalley-Wilmott 模型

Whalley 和 Wilmott 的模型是建立在 Davis, Panas, and Zariphopoulou (1993) 的模型的基础上的。Davis, Panas, and Zariphopoulou (1993) 的模型属于 Global-in-time 的模型，因此不仅需要事先确定投资者的效用函数，而且计算方法复杂。在论文中，Whalley 和 Wilmott 通过对 Davis, Panas, and Zariphopoulou 的模型所提出的三维自由边界问题 (three-dimensional free boundary problem) 运用求渐近解的方法，将问题简化为二维的非齐次离散方程，并得出了相对容易计算的结果。

根据 Davis, Panas, and Zariphopoulou 的模型，股票价格服从随机漫步过程：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

其中， μ 和 σ 均为常数， X 服从几何布朗运动。

假设投资者效用函数为 $U(x) = 1 - \exp(-\gamma x)$ (其中 γ 为风险厌恶系数)，则可以得出期权价格可用下式表示：

$$V(S, t) = \frac{\delta(T, t)}{\gamma} \log \left(\frac{Q_\omega(S, 0, t)}{Q_1(S, 0, t)} \right)$$

其中， T 为存续期限， $\delta(T, t) = e^{-r(T-t)}$ ， $Q_\omega(S, 0, t)$ 和 $Q_1(S, 0, t)$ 均满足下式：

$$\min \left(\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\gamma(1+\varepsilon)SQ}{\delta}, -\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\gamma(1-\varepsilon)SQ}{\delta}, \frac{\partial Q}{\partial t} + \mu S \frac{\partial Q}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial S^2} \right) = 0$$

其中， ε 是交易成本比率。 y 表示在最佳复制组合中所需的股票数量。 Q_1 和

Q_w 都要满足一定的到期条件，例如对于一个看涨期权来说：

$$Q_1(S, y, T) = \exp(-\gamma c(S, y))$$

$$Q_w(S, y, T) = \begin{cases} \exp(-\gamma c(S, y)) & S \leq E \\ \exp(-\gamma(c(S, y) + E - S)) & S > E \end{cases}$$

$$\text{其中, } c(S, y) = \begin{cases} (1 + \varepsilon)yS & y < 0 \\ (1 - \varepsilon)yS & y \geq 0 \end{cases}$$

这是一个自由边界问题，按照 Davis 的方法，可以将 (S, y) 划分为三个区域，这三个区域是被两条曲线隔开，两条曲线中间的部分，发行人不需要进行任何操作，仅保留自己的头寸即可，而在越过上面的曲线时，发行人需要买入股票，越过下面的曲线时，发行需要卖出股票。不考虑交易成本时的 (S, y) 曲线 y^* 位于两者之间。

$$\text{在买入区域, 有 } \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\gamma(1 + \varepsilon)SQ}{\delta} = 0$$

$$\text{在卖出区域, 有 } \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\gamma(1 - \varepsilon)SQ}{\delta} = 0$$

$$\text{而在不交易区域, 有 } \frac{\partial Q}{\partial t} + \mu S \frac{\partial Q}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial S^2} = 0$$

在交易成本较小的情况下，Whalley 和 Wilmott 运用渐近分析方法，对上方程进行简化求解，分别得出两种情况下的三条曲线方程。

对于 Q_1 ，三条曲线方程分别为：

$$\begin{aligned} y = y^*(S, t) &= \frac{\delta(\mu - r)}{\gamma S \sigma^2} \\ y &= \frac{\delta(\mu - r)}{\gamma S \sigma^2} \pm \varepsilon^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3S \delta y_s^{*2}}{2\gamma} \right)^{1/3} \\ &= \frac{\delta(\mu - r)}{\gamma S \sigma^2} \pm \varepsilon^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3\delta^3 (\mu - r)^2}{2\gamma^3 \sigma^4 S^3} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

对于 Q_w ，三条曲线方程分别为：

$$\begin{aligned}
y &= y^*(S, t) = W_S + \frac{\delta(\mu - r)}{\gamma S \sigma^2} \\
y &= W_S + \frac{\delta(\mu - r)}{\gamma S \sigma^2} \pm \varepsilon^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3S \delta y_S^{*2}}{2\gamma} \right)^{1/3} \\
&= W_S + \frac{\delta(\mu - r)}{\gamma S \sigma^2} \pm \varepsilon^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3S \delta}{2\gamma} \left| W_{SS} - \frac{\delta(\mu - r)}{\gamma S^2 \sigma^2} \right|^2 \right)^{1/3}
\end{aligned}$$

其中， W 是利用 Black-Scholes 公式计算出的看涨期权的价值。

据此结果，如果假设股票的预期收益率为无风险利率，则可以得到一个围绕 Black-Scholes 公式的 Delta (Δ) 值的避险带：

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial W}{\partial S} - B_t, \frac{\partial W}{\partial S} + B_t \right] \\
B_t &= \left(\frac{3\varepsilon S_t e^{-r(T-t)} \Gamma_t^2}{2\gamma} \right)^{1/3}
\end{aligned}$$

相应的避险策略是：

$$y_t = \begin{cases} \Delta_t - B_t & \text{if } y_{t-1} < \Delta_t - B_t \\ \Delta_t + B_t & \text{if } y_{t-1} > \Delta_t + B_t \\ y_{t-1} & \text{if } \Delta_t - B_t \leq y_{t-1} \leq \Delta_t + B_t \end{cases}$$

其中， y_t 为相应的避险头寸； γ 为投资者的风险厌恶系数； ε 为交易成本比率；

Γ 为 Black-Scholes 公式中的 Gamma 值。

4 对冲模拟

4.1 模拟效果的衡量指标

在衡量三种模型的对冲效果时，笔者主要使用了发行人损益的均值、标准差以及 VAR 值三个指标，利用蒙特卡洛方法对三种模型进行不同假设情形下的模拟。在此，我们介绍一下 VAR 方法。

VAR (Value at Risk) 方法尝试仅用一个数字来衡量整个金融资产组合的风险，它是公司管理者以及金融机构广泛使用的方法之一。它的主要思想是通过一个数值来测度特定时期持有投资组合在一定置信度下的最大损失。

如果用 V 来表示一个资产组合的 VAR 值，则它是两个变量的函数：时间长度 (T) 以及置信水平 (X)。也就是说，我们 X (为百分数) 程度确定此投资组合在未来的 T 时间内，最大损失不会超过 V 。用下式来表示：

$$\text{prob}(\text{loss max} > \text{VaR}) = 1 - X$$

其中， prob ：组合价值损失超过 VAR 值的概率

loss max ：资产组合在一定持有期内的价值损失

在本文中，我们用 VAR 值来衡量发行人的对冲风险：发行人于期初收取期权费，且按照期权复制模型的方法对冲风险，经过 T 时间后，期权到期且期权多头可能行权，如果我们 X (为百分数) 程度确定发行人的最大亏损值不会超过 V ，那么我们可以把 V 值称为发行人对冲组合的 VAR 值。

具体计算方面，首先模拟标的资产在未来 T 时间内的 N 条路径，则根据每条不同的路径都可以算出发行人于到期日的盈亏。其次将这些盈亏数值按照从小到大进行排列，如果我们采用置信度 X ，那么，在这些数值中，第 $(1-X) \times N$ 个数值便是置信度为 X ，未来期限为 T 的 VAR 值。

4.2 模拟方法

近些年来，为寻求较精确的数值解以及获得较快的运算速度，越来越多的数值方法被使用。其中，蒙特卡洛模拟方法是非常重要的一种，在资产定价、套期保值的效果衡量、风险分析、压力测试等诸多方面，利用蒙特卡洛模拟方法都可以方便的计算。蒙特卡洛模拟方法非常灵活且易于实现，它可以解决路径依赖情况下的诸多非常复杂的问题。不仅如此，蒙特卡洛模拟方法还可以显示估计结果的置信区间，可以有效说明模拟结果的可信程度，可以使我们根据不同的置信区间得出自己所需的结果。

当然，蒙特卡洛模拟方法也有自身的缺点，其中最为突出的便是可能过多的时间损耗。在保障运算结果的精度的情况下，很多复杂的问题在解决时需要进行大量的模拟运算，这就需要计算机长时间运行以便能够得出较为满意的结果。不过，越来越多的减小方差技术被提出，如对偶变量技术 (Antithetic Variable

Technique)、控制方差技术 (Control Variate Technique) 等等。再者, 计算机的迅速发展也使得运算速度加快, 这些都让蒙特卡洛方法更具有吸引力。

本文在对有交易成本的对冲模型进行比较时, 使用了蒙特卡洛模拟的方法以及对偶变量技术。具体步骤分别根据常数波动率假设和随机波动率假设而有所不同。

4.2.1 常数波动率假设下的模拟方法

在蒙特卡洛模拟中所需要用到的共同参数有:

正股初始价格 $S=10$

无风险利率 $\mu=0.1$

正股价格的波动率 $\nu=0.4$

剩余期限 $T=0.25$

剩余期限内的股息率 $q=0$

模拟次数 $N=10000$

交易成本比率 $k=0.003$ (单向交易成本)

一、Leland 模型和 BV 模型

当对冲频率较高, 交易成本较小的情况下, BV 模型的期权复制策略可以简化为通过校正波动率进行间断对冲, 因此, Leland 模型和 BV 模型的应用方法基本相同, 二者唯一不同之处即在于校正波动率的不同, 其中 BV 模型的校正波动率相对 Leland 模型来说稍高。

除了上述的多个共用模拟参数之外, Leland 模型和 BV 模型的对冲误差很大程度上还受到对冲频率的影响, 因此我们事先要确定二者的对冲次数。

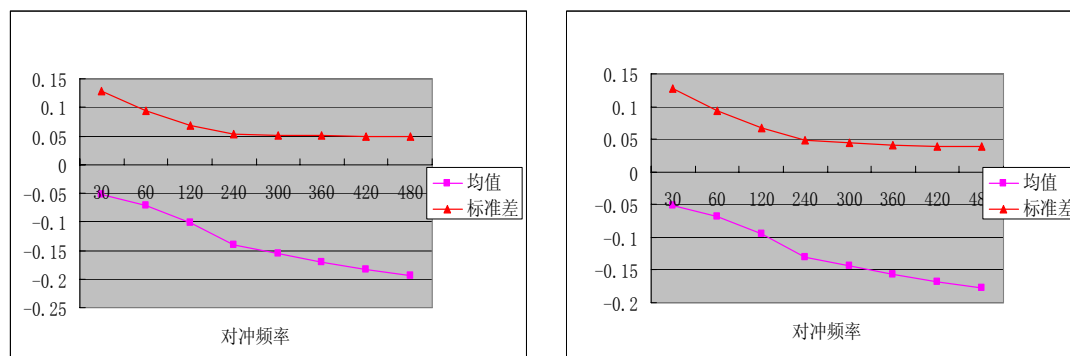


图 3.8: 对冲频率对 Leland 模型和 BV 模型对冲误差的均值和方差的影响

由上图所示，对于 Leland 模型和 BV 模型来说，对冲误差是对冲频率的函数，对冲间断时间短，则对冲频率较高，复制组合所得的回报的精确度较高，然而距离理论回报的偏差较大；相反，对冲次数较少的情况下，复制组合所得回报的偏差较小，但与真实回报的偏差的标准差却较大。

在 Leland 模型和 BV 模型中，复制组合的回报与真实回报之差的均值和方差均呈单向变化。与此不同，如果用 VAR 来衡量对冲间隔的影响，则可以看出其是一个先减后增的过程。这是因为随着对冲次数的增加，交易成本所占用的比例越来越大，从而导致风险加大，致使发行人的对冲组合亏损额也加大。

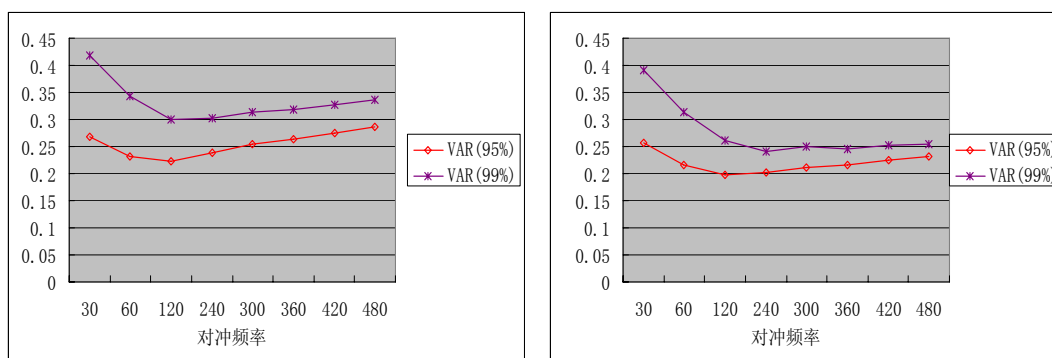


图 3.9：对冲次数对 Leland 模型和 BV 模型 VAR 值的影响

从上图可以看出，为了取得较小的 VAR 值，所选取的对冲频率是基本可以确定的。在本文的模拟中，采取的对冲次数为 120 次。

在具体模拟过程中，首先需要对股票价格进行模拟，在此，我们使用股票价格服从对数正态分布的假设，则有：

$$S_t = S_{t-1} \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \varepsilon \sqrt{dt} \right]$$

根据模拟出的股票价格，在每个对冲时间点，都可以根据事先确定的较正波动率，算出发行人在此时间点应该保留有多少股票头寸。只要这一头寸数量大于前一对冲时间点已经持有的股票数量，发行人就需要以无风险利率借入资金，购买相关数量股票以补足头寸，相反则需要卖出多余数量的股票，所得现金可买入无风险利率债券，以获得无风险利率。

当期权到期时，如果股票价格高于执行价格，发行人最终持有的是股票多头和现金空头构成的组合，此组合的价值减去发行人由于投资者行权而需要支付的股票价格和执行价格之间的差额，便为发行人的净损益。否则，发行人到期时仅持有一部分现金头寸，此即为发行人的净损益。

在利用期权复制模型进行对冲模拟的过程中，笔者假设发行人于期初收取的权利金为Black-Scholes模型所计算出的价格^②。由于Black-Scholes模型是在没有考虑交易成本的情况下为期权定价，因此，模拟过程中出现的发行人损益一般为负数。另外，笔者为了考虑期权的价内外程度对这三种模型造成的影响，固定了股票的初始价格 10 元，但使期权的执行价格从 6 元至 14 元依次变化。

二、Whalley-Wilmott 模型

Whalley-Wilmott 模型和前两种模型有很大区别，它是利用避险带的对冲策略，意即股票头寸数量应该保持在一个区间内，只要发行人上一时期所持有的股票数量此刻超越了区间的上边界，就应卖出多余的股票，使股票数量等于区间的上边界值；反之，股票数量此刻超越了区间的下边界，就应买入一定数量的股票，使股票数量等于区间的下边界值。

Whalley-Wilmott 模型中所需要确定的参数除了前面提到的共用参数外，还有发行人的风险厌恶系数。为了能够最小化 Whalley-Wilmott 模型的 VAR 值，笔者对 Whalley-Wilmott 模型的对冲效果与投资者风险厌恶系数之间的关系进行了分析。

在 Whalley-Wilmott 模型中，风险厌恶系数越低，说明发行人的风险承受能力越高，因此对冲频率不需要过高，相应的，避险带相对来说也较宽松，而风险厌恶系数越高，说明发行人的风险承受能力不足，需要提高对冲频率以降低对冲风险。

^② 这样可以保证发行人损益的可比性，下文的模拟也均假设如此。

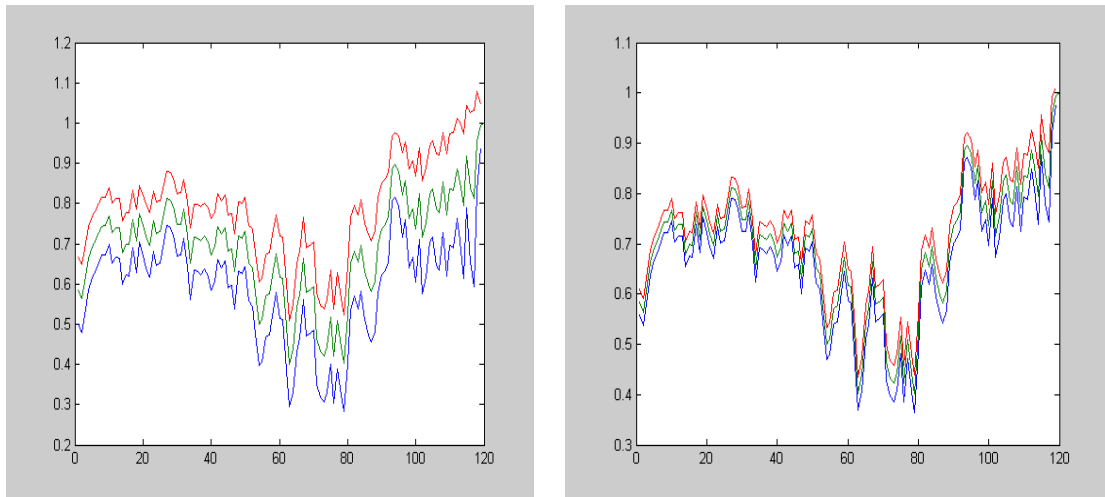


图 3.10: 风险厌恶系数分别为 3 和 300 时的避险带

下图为风险厌恶系数和发行人的 VAR 值关系:

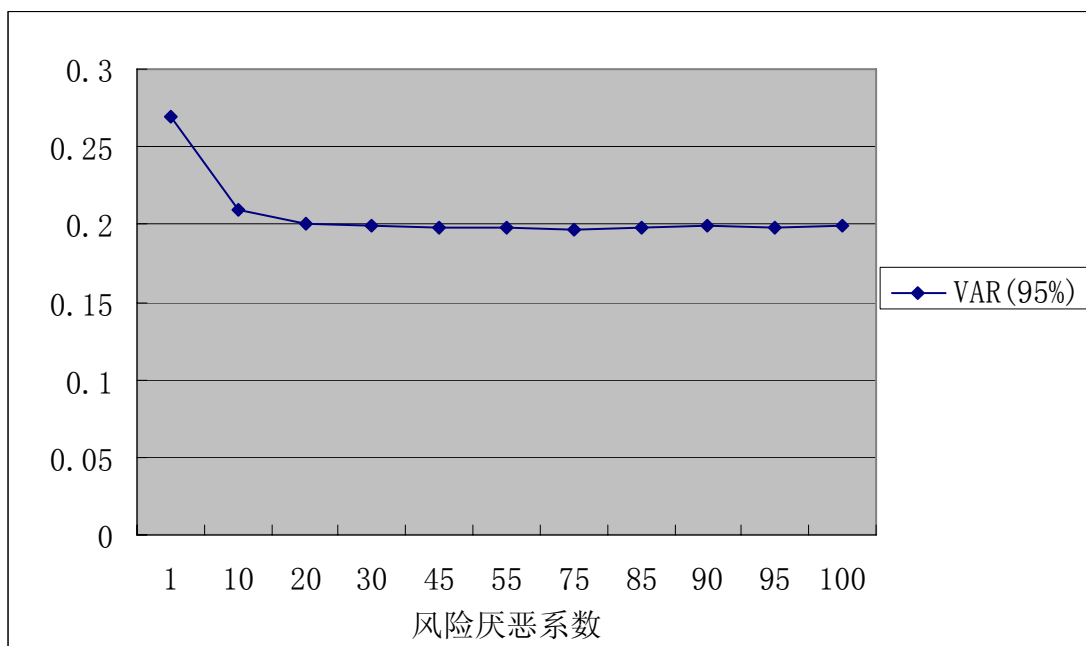


图 3.11: 风险厌恶系数对 VAR 值的影响

可见, 发行人的风险厌恶系数在高于一定值时, VAR 值的变化很不明显, 在本文的模拟中, 采用的风险厌恶系数为 50。

总之, 常数波动率的假设条件下, 蒙特卡洛模拟的步骤主要如下^③:

^③ 在此利用了对偶变量技术。

-
- 1、初始化随机扰动向量 \vec{u} ，利用此向量以及标的资产的概率分布函数，模拟一条标的资产的价格路径。
 - 2、在此路径下，可以得到与路径相关的发行人损益值。
 - 3、重复模拟 $N/2$ 条路径，并重复前两个步骤，得到 $N/2$ 个损益值。
 - 4、取初始化随机扰动向量的相反数，得到新的随机扰动向量 $-\vec{u}$ ，以相同方法模拟 $N/2$ 条路径，得到 $N/2$ 个损益值。
 - 5、将 N 个损益值从小到大进行排序，取第 $(1-X) \times N$ 个值得到置信度为 X 的 VAR 近似值。

4.2.2 随机波动率假设下的模拟方法

在蒙特卡洛模拟中所需要用到的共同参数为：

正股初始价格 $S = 10$

无风险利率 $\mu = 0.1$

正股的初始波动率 $\sigma_0 = 0.4$

正股的长期平均波动率 $\sigma^* = 0.4$

方差的均值回归系数 $a = 10$

剩余期限 $T = 0.25$

剩余期限内的股息率 $q = 0$

模拟次数 $N = 10000$

交易成本比率 $k = 0.003$ （单向交易成本）

在随机波动率的情形下，与常数波动率情形下主要有几点不同：

一、股票价格路径不同

股票价格的形成（公式）需要两个随机数以及股票价格与波动率之间的相关系数来决定，

$$S_t = S_{t-1} \exp \left[\left(\mu - \frac{V_{t-1}}{2} \right) dt + u_t \sqrt{V_{t-1}} dt \right]$$

$$V_t = V_{t-1} \exp \left[\left(\delta - \frac{\xi^2}{2} \right) dt + \rho u_t \xi \sqrt{dt} + \sqrt{1 - \rho^2} v_t \xi \sqrt{dt} \right]$$

其中， u_t 和 v_t 为互不相关的随机扰动项， ρ 为股票价格和波动率之间的相关系数， $\delta = a(\sigma^* - \sigma)$ 。

二、对冲波动率的变化

对于 Leland 模型和 BV 模型，采用的校正波动率以正股的长期平均波动率为基础进行计算。对于 Whalley-Wilmott 模型，对冲区间的生成也基于正股价格的长期平均波动率。

三、对偶变量技术的应用有所不同。

由于出现两个随机扰动向量 \bar{u} 和 \bar{v} ，对偶变量技术可以做相应延伸，本文所采用的方法是用 $(\bar{u}, \bar{v}), (-\bar{u}, \bar{v}), (\bar{u}, -\bar{v}), (-\bar{u}, -\bar{v})$ 分别模拟 $N/4$ 条路径，从而得到 N 个损益值，再按常数波动率假设下的相同方法求得 VAR 值。

四、波动率的波动率。

随机波动率模型中所需要确定的一个重要参数是波动率的波动率 ξ ，这个参数越大，意味着波动率随机的效果越为明显。在本文中，分别采用了 $\xi=1$ 、 $\xi=2$ 和 $\xi=3$ 进行模拟。

五、相关系数的设定

为了观察股票价格和波动率之间的相关系数对模型效果的影响，本文采用 $\rho=-1, -0.5, 0, 0.5, 1$ 分别进行模拟。

4.3 常数波动率情形下的模拟结果比较

由于受到 Gamma 的影响，对发行人来说，价内外程度不同的期权有着不同的对冲难度。例如对于平价期权来说，Gamma 值较大，意味着 Delta 的变化较大，发行人在进行风险管理时就面临着头寸调整幅度较大的困难。而对价内程度或价外程度较高的期权来说，Gamma 值较小，Delta 的变动也较为缓和，对发行人来说对冲较为容易。

在这三种模型中，Leland 和 Boyle-Vorst 模型首先固定了对冲的间隔以及次数，因此 Leland 和 Boyle-Vorst 的模型没有考虑到 Gamma 的影响，而 Whalley-Wilmott 模型中的对冲次数是变化的，且其避险带的宽度会随着 Gamma 的增大而随之增大，从而考虑了 Gamma 对对冲行为的影响。

以平价期权为例，由于平价期权的 Gamma 值最大，在相同的对冲间隔条件下，对于以较正波动率对冲风险的 Leland 和 Boyle-Vorst 模型来说，对冲头寸的变化相对来说会很大，因此，对冲难度也较大，从而导致对冲误差的均值和方差均距零较远。而 Whalley-Wilmott 模型的避险带宽度在 Gamma 值较大时区间范围也会较大，会使对冲频率有所下降，以减少不必要的频繁对冲，从而节省了交易成本，减小了对冲难度。因此，总体来说，Leland 和 Boyle-Vorst 的模型中所得出的复制组合的对冲误差会随着价内外程度的不同而有较大的变化，相对来说 Whalley-Wilmott 所得出的对冲误差的变化程度较小。

为了能够表现价内外程度对复制组合的对冲误差的影响，我们在期权的执行价格不同的情况下，对三种不同的模型进行了蒙特卡洛模拟。为了对几种不同的模型进行有效的比较，我们在蒙特卡洛模拟过程中，使用了基本相同的参数，且所考虑的期权均为看涨期权：

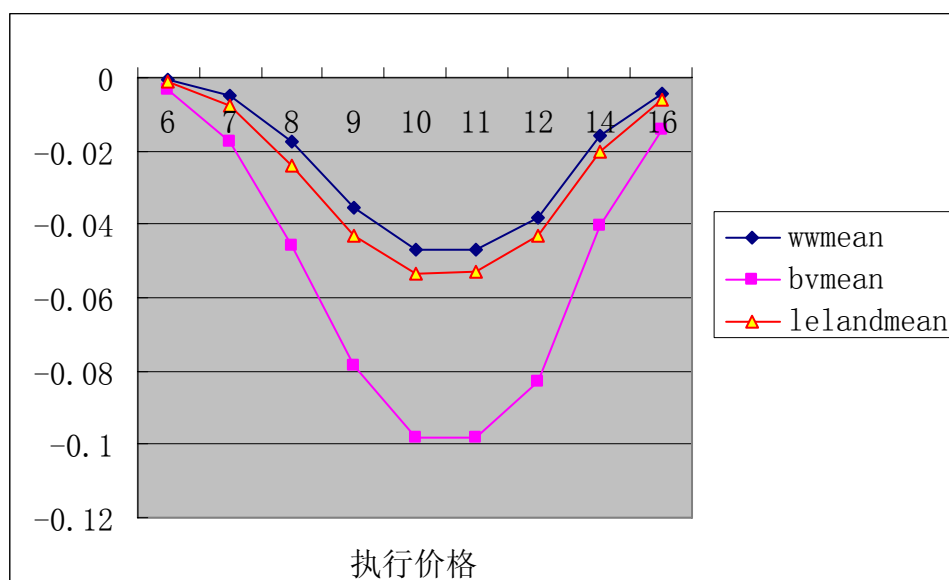


图 4.1: 对冲误差均值比较

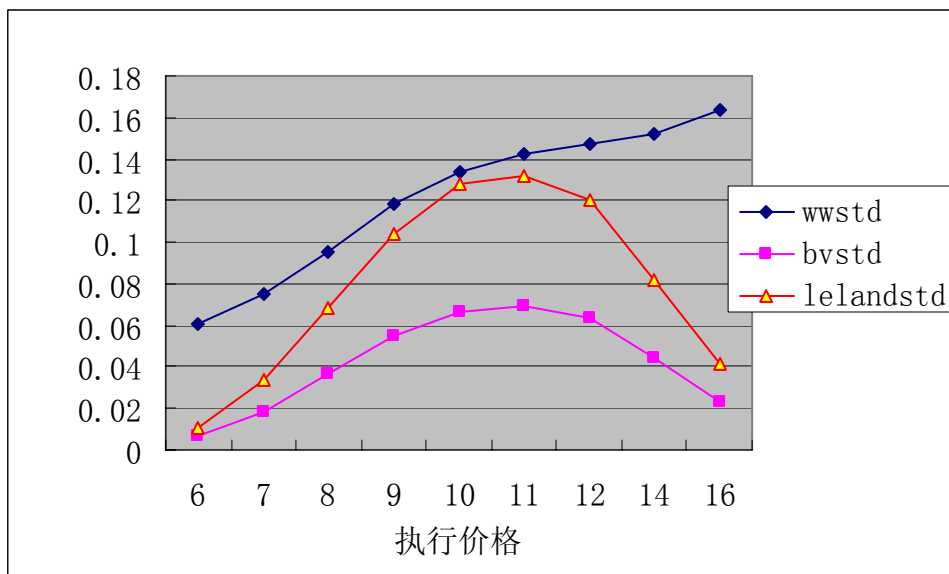


图 4.2: 对冲误差标准差比较

由上两图^④可以看出，对于以修正波动率为主要方法的Leland和Boyle-Vorst模型所得的对冲误差的均值较大，但方差较小。而Whalley-Wilmott模型则恰好相反，具有较小的均值和较大的方差。

另外，Leland 和 Boyle-Vorst 模型随着价内程度的不同导致趋势明显有所变化，价内程度或价外程度越高，均值和方差越加速向零靠近，这主要是因为Gamma 较小，致使固定间隔的期权对冲难度下降，从而提高了对冲的效率。相对来说，Whalley-Wilmott 模型的变化趋势有所减弱。

三种对冲方法中，标准差和均值并没有哪一个模型可以达到最优，因此，我们采用 VAR 方法来挑选较好的方法。

^④ 图中，用ww表示Whalley-Wilmott模型，bv表示Boyle-Vorst模型，Leland表示Leland模型，下同。

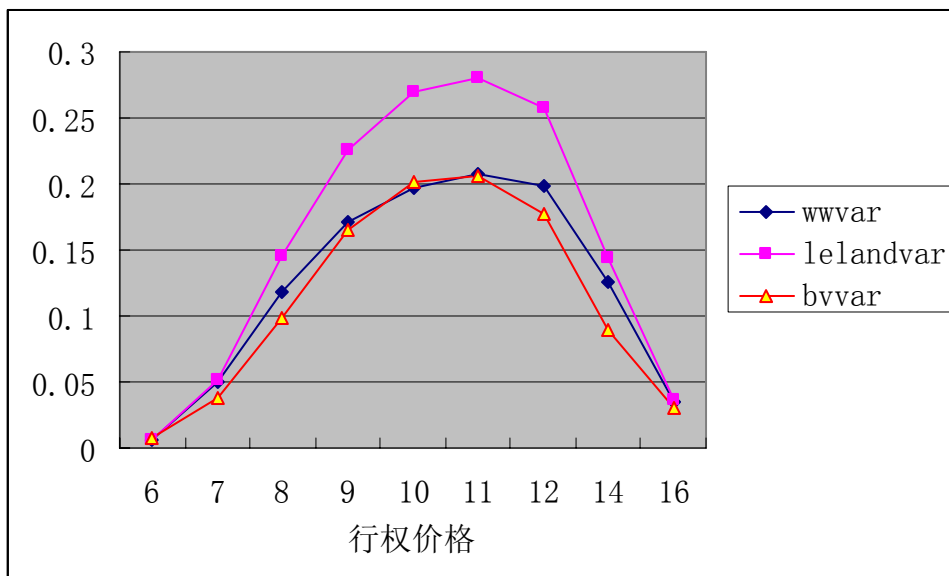


图 4.3: 置信度 95%的 VAR 值比较

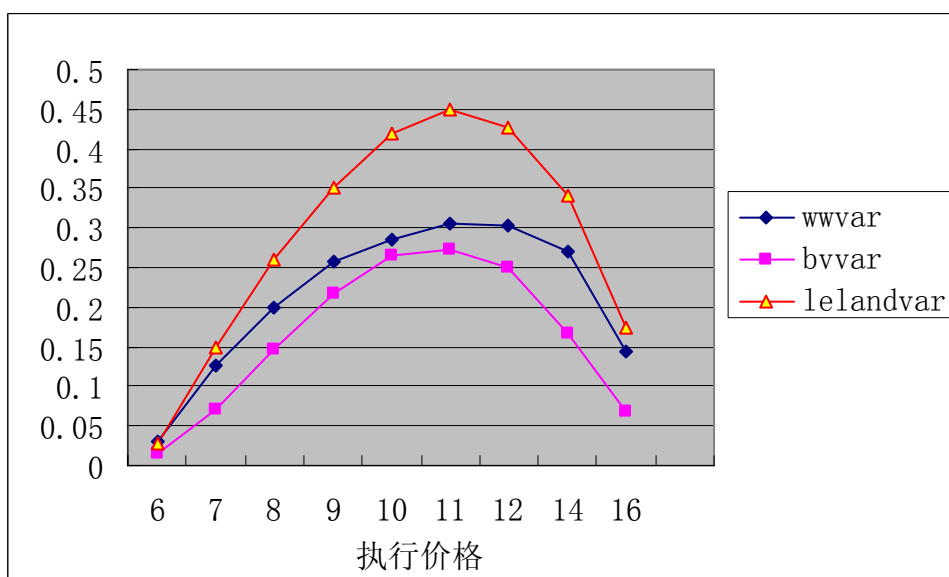


图 4.4: 置信度 99%的 VAR 值比较

从上图可以看出，在置信度为 95%的情况下，平价附近的期权对冲效果以 Boyle-Vorst 模型和 Whalley-Wilmott 模型表现较佳，而当价内程度趋深时，Leland 和 Boyle-Vorst 模型的效率明显提升，且 Boyle-Vorst 模型表现超越 Whalley-Wilmott 模型；在 99%的置信度情况下，Boyle-Vorst 模型表现最佳，尤其是在价内程度价高时，其表现远远好于其它两种模型。这与 Boyle-Vorst 模型较低的标准差有关。因为 VAR 的置信水平越高，对风险控制的要求就越高，标

准差较低的 Boyle-Vorst 模型在置信度较高的情况下便可以表现的更为突出。

总之，在常数波动率的情况下，Leland 和 Boyle-Vorst 模型的对冲效率和期权的价内外程度有很大关系，总体来说，当价内或价外程度越高时，对冲的效果越优。而 Whalley-Wilmott 模型与期权的价内外程度之间的关系较 Leland 和 Boyle-Vorst 模型来说表现较弱。在以 VAR 测量期权的对冲效果时，对于置信度要求较高的期权对冲，采用 Boyle-Vorst 模型最为合适，而对于置信度要求不太苛刻的期权对冲，在平价附近采用 Whalley-Wilmott 模型或 Boyle-Vorst 模型，在价内程度高时采用 Boyle-Vorst 模型较为合适。

4.4 随机波动率情形下的模拟结果比较

这几种模型均是在以常数波动率为假设的条件下推导出来的，因此从原则上来说均不适用于随机波动率的情况。但是以随机波动率为假设的有交易成本的期权对冲模型均较为复杂，不仅需要添加更多的假设，且计算时间也较长。因此，我们试图在随机波动率的假设下比较这几种模型的表现，找出较为实用的对冲方法。

在 Hull 和 White 的随机波动率模型中，区分了股票价格和股价波动率是否相关的情况，在此，我们同样按照他们的区分方法，对股票价格和股价波动率零相关、正相关以及负相关的三种不同情况进行了比较。

4.4.1 股票价格与波动率零相关

我们假设股票价格和其波动率之间并不相关。在随机波动率模型中，Hull 和 White 提出 ξ 的概念，意为波动率的波动率。 ξ 越大，表示随机波动率的现象越为明显。为了能够观察随机波动率对期权对冲方法的影响大小，我们分别令 ξ (图中用 ν 表示) = 1, 2, 3，对这些模型进行比较^⑤。

一、均值和方差比较

^⑤ 在我国实际情况中，笔者对可创设权证的正股在权证上市期间的波动率进行了粗略测算，发现 ξ 的值一般都在 1 到 4 之间。

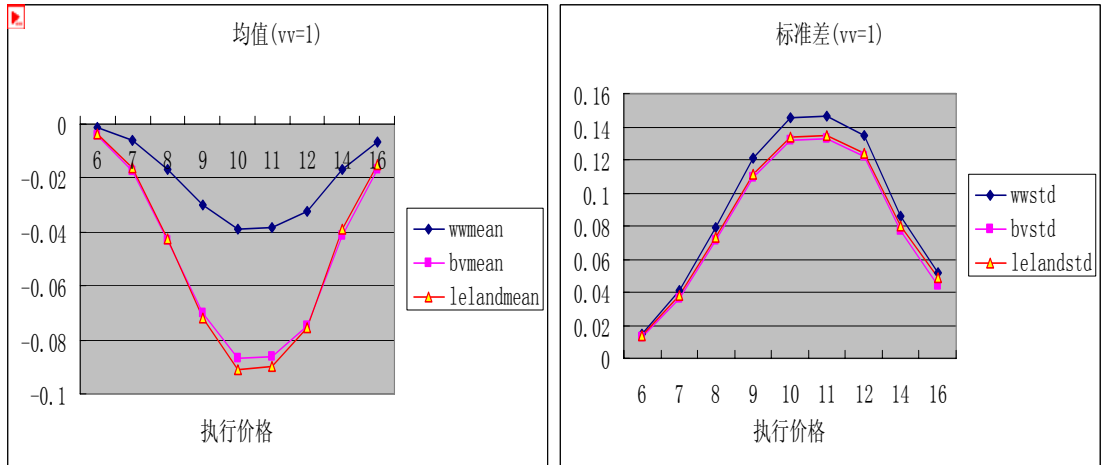


图 4.5: 方差波动率 1 时对冲误差的均值和方差比较

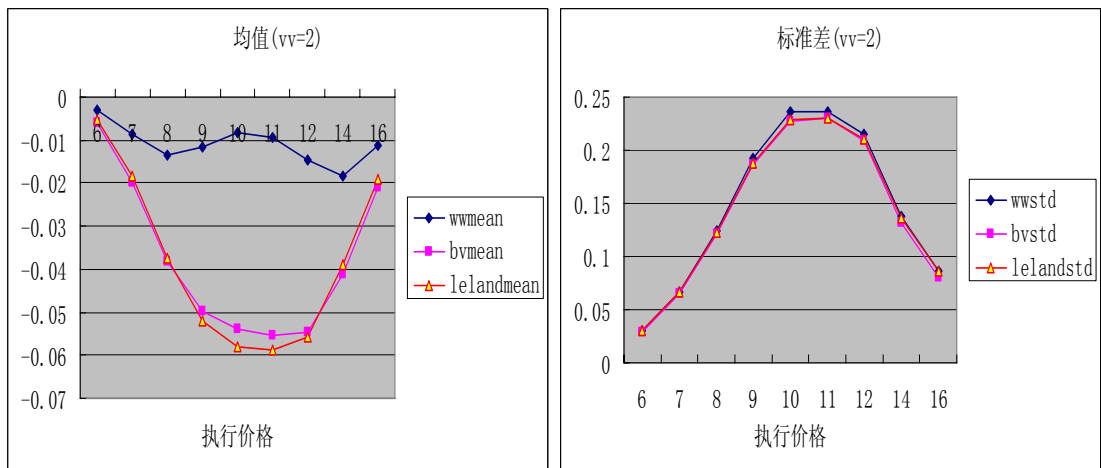


图 4.6: 方差波动率 2 时对冲误差的均值和方差比较

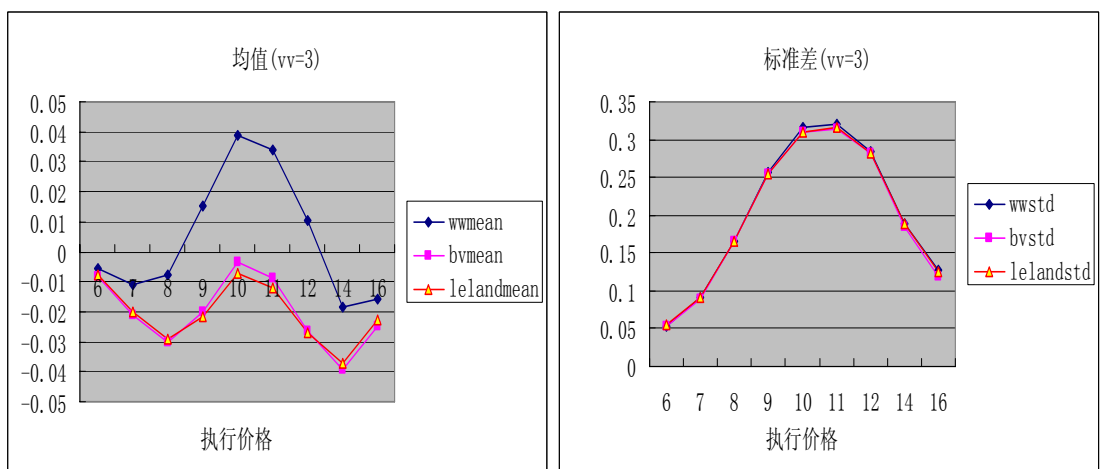


图 4.7: 方差波动率 3 时对冲误差的均值和方差比较

从上述均值和方差比较情况看来，随着波动率的波动率的增大，Whalley-Wilmott 模型的均值并没有出现明显的变化，且表现始终较其它两个模型为佳。标准差方面，Leland 和 Boyle-Vorst 模型相对 Whalley-Wilmott 模型大幅减弱，在 $\xi=2$ 时，三者的标准差水平已基本相同。因此，从均值和标准差方面的衡量上可知，当波动率的变化越明显时，Whalley-Wilmott 模型越为占优。

二、 VAR 值比较

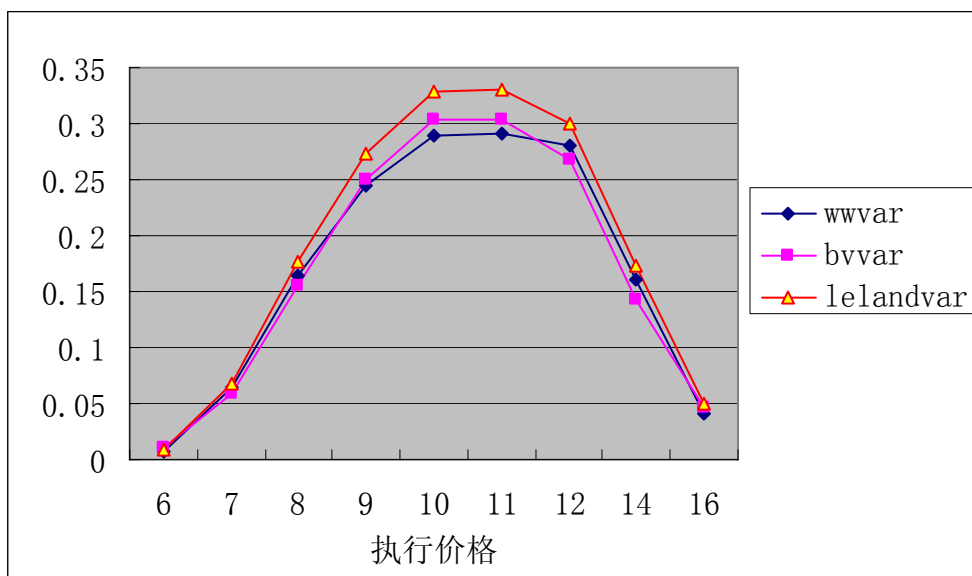


图 4.8: 方差波动率为 1 时对冲误差的 VAR 值比较

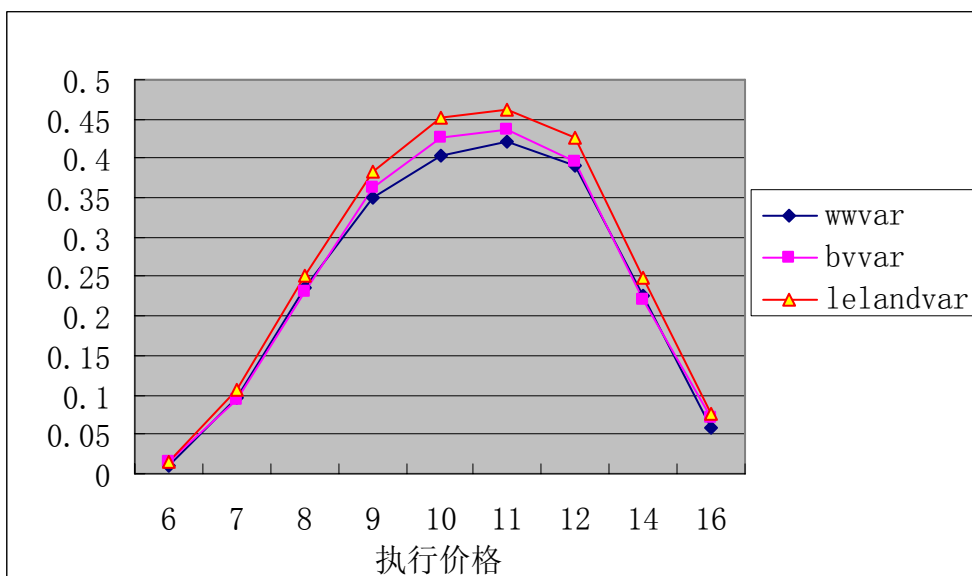


图 4.9: 方差波动率为 2 时对冲误差的 VAR 值比较

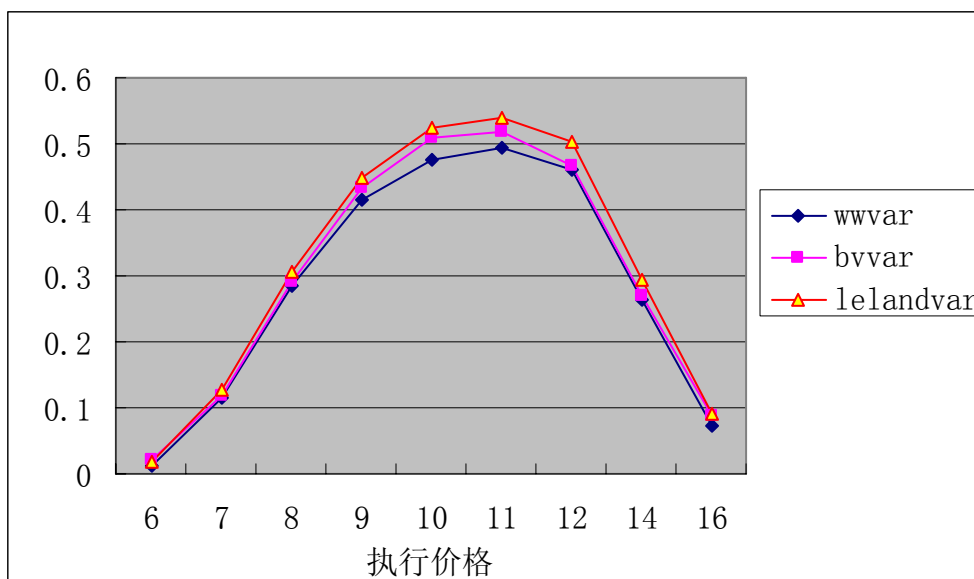


图 4.10: 方差波动率为 3 时对冲误差的 VAR 值比较

从 VAR 的情况来看，在波动率的变化较弱的情况下，情形与在常数波动率下的情形极为相似。而波动率的变化较大的情形下，Whalley-Wilmott 模型的总体表现较好，尤其是位于平价附近的期权，Whalley-Wilmott 模型的效果明显优于其它两个模型。因此，在波动率的波动率较大时，对于平价期权应用 Whalley-Wilmott 模型，而对价内外程度较高的期权应用 Boyle-Vorst 模型，可以达到更好的效果。

4.4.2 股票价格与波动率正相关

通过对股票价格和波动率零相关时 $\xi=1, 2, 3$ 的比较，可以得知 ξ 较大对三者的效率差别的影响也会比较大，为了能够较为清晰的看出三各模型的变化规律，在股票价格与波动率正相关以及负相关的情况下，我们均只采用 $\xi=3$ 进行分析。

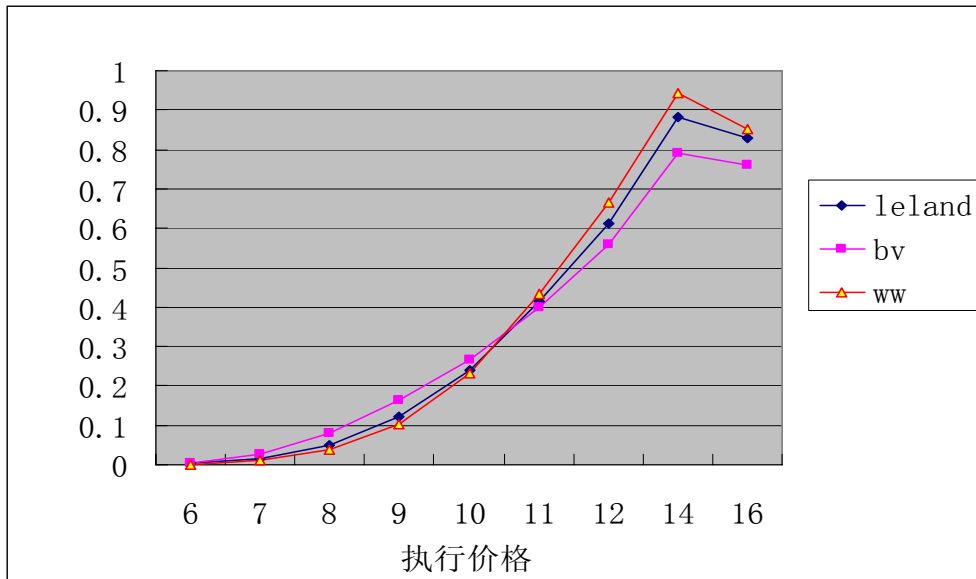


图 4.11: 相关系数为 1 时的 VAR 值比较

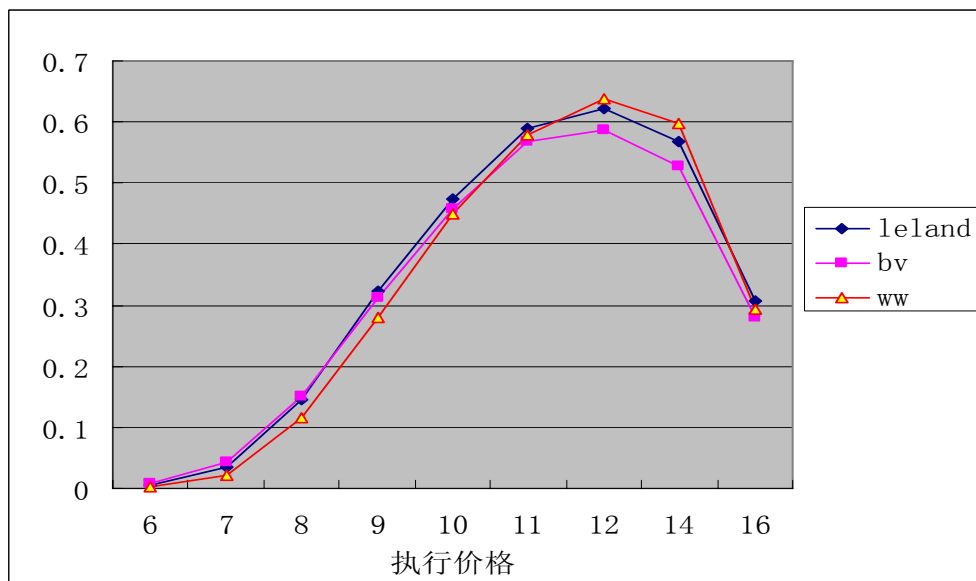


图 4.12: 相关系数为 0.5 时的 VAR 值比较

以上是股票价格和波动率之间的相关系数分别为 1 和 0.5 时三个模型的 VAR(95%)值比较。从图中可以明显看出，在相关系数为正的情况下，价内期权的对冲以 Whalley-Wilmott 模型表现最佳，而价外期权的对冲以 Boyle-Vorst 模型表现最佳。

4.4.3 股票价格与波动率负相关

与股票价格和波动率正相关的情况类似，我们同样可以得出二者负相关时的VAR（95%）图：

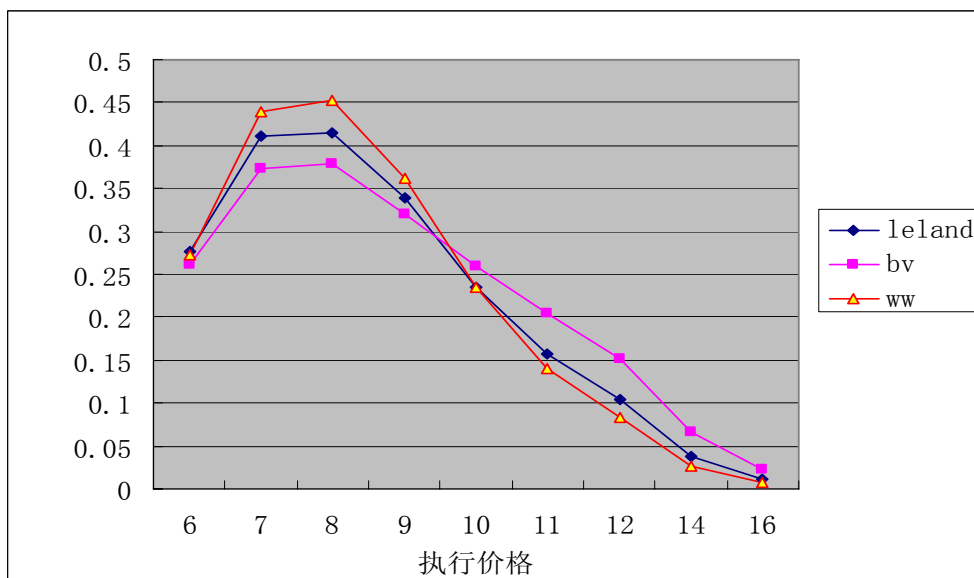


图 4.13: 相关系数为-1 时的 VAR 值比较

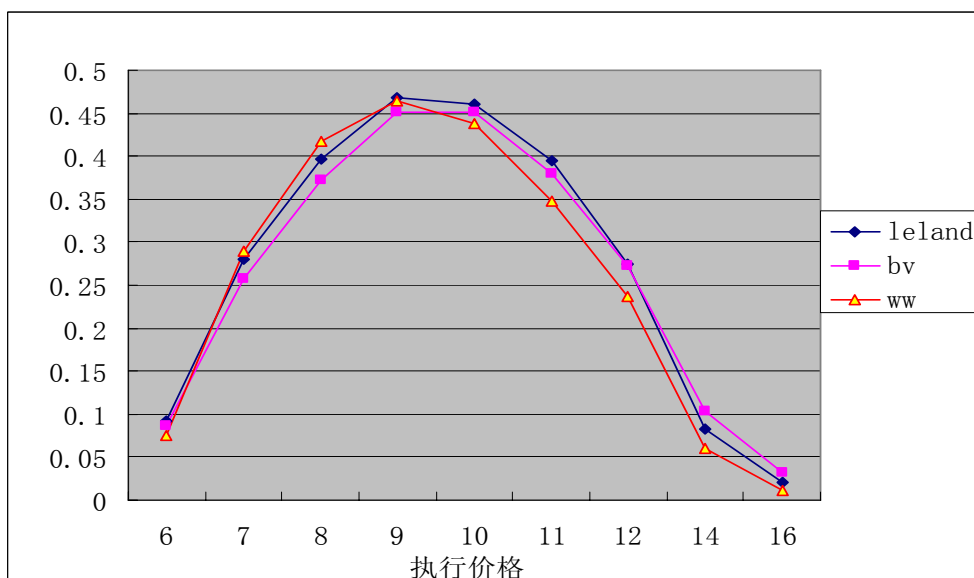


图 4.14: 相关系数为-0.5 时的 VAR 值比较

以上是股票价格和波动率之间的相关系数分别为-1 和-0.5 时三个模型的

VAR(95%)值比较。从图中可以明显看出，在相关系数为负的情况下，与相关系数为正的情况刚好相反：价外期权的对冲以 Whalley-Wilmott 模型表现最佳，而价内期权的对冲以 Boyle-Vorst 模型表现最佳。

总之，在随机波动率的假设条件下，综合这三种有交易成本的对冲模型：Whalley-Wilmott 模型、Boyle-Vorst 模型和 Leland 模型，可以根据期权价内外程度的不同以及股票价格和波动率的相关系数的不同而采用不同的对冲策略。在股票价格和波动率零相关时，平价附近采用 Whalley-Wilmott 模型，价内外程度较深时采用 Boyle-Vorst 模型；在股票价格和波动率正相关时，期权处于价内时采用 Whalley-Wilmott 模型，处于价外时采用 Boyle-Vorst 模型；在股票价格和波动率负相关时，期权处于价外时采用 Whalley-Wilmott 模型，处于价内时采用 Boyle-Vorst 模型。

下表为分别使用这三种模型所得的 VAR(95%)的值(行标为期权的执行价格，列标为股票价格与股票波动率的相关系数)。

表 4.1: 利用 Leland 模型对冲所得发行人的 VAR 值

Leland	-1	-0.5	0	0.5	1
6	0.2774	0.0913	0.0199	0.0045	0.0023
7	0.4116	0.2793	0.1278	0.0345	0.0148
8	0.4149	0.3962	0.2962	0.1449	0.051
9	0.3386	0.4687	0.452	0.3227	0.1222
10	0.234	0.4614	0.545	0.4732	0.2377
11	0.1569	0.3941	0.5533	0.5893	0.4163
12	0.1035	0.2751	0.4893	0.6223	0.6107
14	0.0373	0.0835	0.2729	0.5678	0.882
16	0.0109	0.0207	0.08	0.3068	0.8301

表 4.2: 利用 Boyle-Vorst 模型对冲所得发行人的 VAR 值

Boyle-Vorst	-1	-0.5	0	0.5	1
6	0.2609	0.0861	0.022	0.0077	0.0055
7	0.3732	0.2572	0.1223	0.0443	0.028
8	0.3786	0.3725	0.2804	0.1499	0.081
9	0.3198	0.452	0.4373	0.3123	0.1626
10	0.2588	0.4502	0.5283	0.459	0.2665
11	0.2042	0.3798	0.5353	0.5686	0.3988
12	0.1507	0.2718	0.4687	0.588	0.5577

14	0.0662	0.1025	0.2605	0.5269	0.7892
16	0.023	0.0317	0.0844	0.2794	0.761

表 4.3: 利用 Whalley-Wilmott 模型对冲所得发行人的 VAR 值

Whalley-Wilmott	-1	-0.5	0	0.5	1
6	0.2729	0.0759	0.0128	0.0021	0.0017
7	0.4403	0.2893	0.1177	0.0222	0.0102
8	0.4533	0.417	0.2918	0.1171	0.0395
9	0.362	0.4642	0.4289	0.2789	0.1041
10	0.2348	0.4386	0.5	0.4498	0.232
11	0.1406	0.3474	0.5255	0.5781	0.4347
12	0.0841	0.2368	0.4758	0.6387	0.6656
14	0.0261	0.0598	0.2655	0.5976	0.9434
16	0.0069	0.0114	0.0626	0.2934	0.851

4.5 关于 VAR 值较大的解释

本文以置信度 95% 的 VAR 值来衡量发行人的对冲风险，但通过模拟与计算所得出的 VAR 值均较大，尤其是在笔者所假设的一些极端情况下，VAR 值更是被严重放大。这主要出于以下几点原因：

首先，一部分原因来自于间断对冲的误差。实际上，即使是在不考虑交易成本的情况下，如果不采用连续对冲策略，发行人也会面临一定的对冲风险。为了说明这点，我们以平价期权为例，仍然使用常数波动率情形下的模拟数据（对冲频率大约为一个交易日两次），只是将其中的交易成本改为零。经过计算发现置信度为 95% 情况下的 VAR 值为 0.1068，相对此期权的 Black-Scholes 理论价值 0.9163，按百分比计算占到了 11.66%。

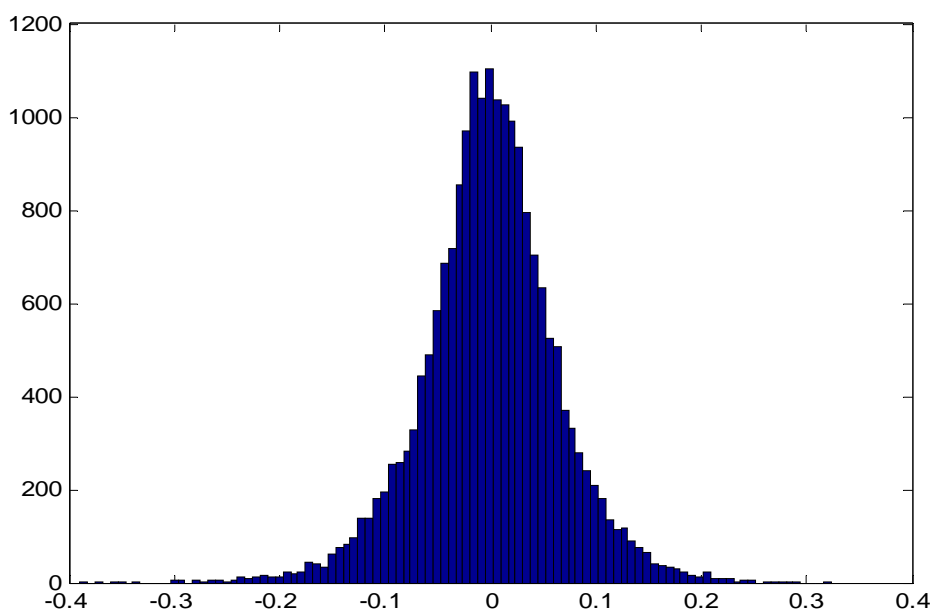


图 4.15 无交易成本的 Black-Scholes 模型间断对冲误差

其次，Leland 模型和 Boyle-Vorst 模型的期权复制策略要求每一时刻复制组合中的正股头寸均应该满足以较正波动率为基准所计算出的值，这就意味着期权的期初价值应该以较正波动率进行计算，才能使模型中的期权复制组合较好的复制期权。以 Boyle-Vorst 模型为例，按照常数波动率假设下的模拟参数，平价期权的 Black-Scholes 理论价值为 0.9163，而按较正波动率算出的合理价值为 1.0351，按百分比计算，相当于高出 Black-Scholes 理论价值近 13%。而本文的模拟中，为了能够统一发行商在不同模型中的期初收入，以方便最后损益值的比较，文中一律假设发行商收取的期权费用为 Black-Scholes 理论价值。这显然会导致发行商的期末亏损较大。

另外，在随机波动率的假设情况下，仅以长期平均波动率进行对冲会致使误差进一步加大，尤其是笔者为了检验随机波动率假设下三个模型的相对表现，所设置的波动率的波动率较高，导致得出的 VAR 值较大。

最后，为了较贴近我国的实际情况，在设置交易成本比率时，用了单向交易成本费率 0.3%，此费率相对较高，会在一定程度上加大发行人的对冲风险。

总之，如果同时考虑到对冲不连续、存在交易成本以及随机波动率的情况，发行人将面临不小的对冲风险，至少在置信度为 95%的情况下，VAR 值会较大。

因此，文中用于衡量三个模型的优劣而采用的 VAR 值，更具相对意义，而非绝对意义。

5 我国可创设权证的实证情况

由上述分析可知，在股票价格和波动率零相关时，平价附近采用 Whalley-Wilmott 模型，价内外程度较深时采用 Boyle-Vorst 模型；在股票价格和波动率正相关时，期权处于价内时采用 Whalley-Wilmott 模型，处于价外时采用 Boyle-Vorst 模型；在股票价格和波动率负相关时，期权处于价外时采用 Whalley-Wilmott 模型，处于价内时采用 Boyle-Vorst 模型。在此，笔者应用此结论对我国的两只可创设权证武钢 JTB1 和首创 JTB1 进行了实证分析^⑥。

5.1 GARCH (1, 1) 模型和 Hull-White 模型

一、两模型的近似关系

根据 GARCH (1, 1) 模型 (Bollerslev (1986)):

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

其中， $u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$ ， σ_n 为股价当天的波动率， V_L 为长期平均波动率。 γ 、 α 和 β 分别为赋予 V_L 、 u_{n-1}^2 和 σ_{n-1}^2 的权重，且有

$$\gamma + \alpha + \beta = 1$$

令 $\omega = \gamma V_L$ ，则又可以将 GARCH (1, 1) 模型写成

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \text{ ⑦}$$

Hull-White 提出的随机波动率模型为:

$$dV = a(V_L - V)dt + \xi V dz$$

^⑥ 选择这两只权证的主要原因是二者的初始价内外程度不同，透过对冲模型之间的比较可以衡量此因素对冲误差所造成的影响。另外，在实证中，笔者在估算股票价格和波动率之间的相关系数时发现，对这两只认购证来说，二者不存在明显的相关性，因此下面并没有考虑相关系数的影响。

^⑦ 对于一个稳定的 GARCH (1, 1) 模型来说，需要 $\alpha + \beta < 1$ 以使 V_L 为正。

其中的 a 、 V_L 和 ξ 均为大于零的常数。

根据 Nelson (1990) 的论文, Hull-White 的上述模型的在离散时间的假设下, 近似于 GARCH (1, 1) 模型。实际上, 二者系数之间的关系为:

$$a = 1 - \alpha - \beta \quad \text{且} \quad \xi = \alpha\sqrt{2}$$

二、模型系数的计算

GARCH (1, 1) 模型中的三个系数可以通过最大似然法进行求解:

设 $v_i = \sigma_i^2$ 为每天的方差, 我们假设 u_i 以方差为条件的概率分布服从正态分布, 则只需要最大化下式, 即可得到最优参数。

$$\prod_{i=1}^m \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi v_i}} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2v_i}\right) \right]$$

将其取对数后, 发现最大化上式, 实际上相当于最大化:

$$\sum_{i=1}^m \left[-\ln(v_i) - \frac{u_i^2}{v_i} \right]$$

在 EXCEL 中使用规划求解的方法, 即可求出相应参数。得到 GARCH (1, 1) 模型的参数之后, 可以通过上面所提到的转换公式得到 Hull-White 模型中的相应参数。

5.2 对武钢 JTB1 的实证研究

一、参数的选取

武钢 JTB1 于 2005 年的 11 月 23 日上市, 最后交易日为 2006 年 11 月 15 日。根据武钢股份在武钢权证上市期间的收益率数据, 通过规划求解, 可以求出相应的 GARCH (1, 1) 模型中的参数。结果如下:

$$\sigma_n^2 = 0.00002931 + 0.1462u_{n-1}^2 + 0.8162\sigma_{n-1}^2$$

即为, $\omega = 0.00002931, \alpha = 0.1462, \beta = 0.8162$

可以求出:

$$V_L = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} = 0.0007786, \quad \text{年化后的长期平均波动率 } \sigma \text{ 为 } 44.30\%。$$

$$a = 1 - \alpha - \beta = 0.03765$$

$$\xi = \sqrt{2\alpha} = 0.2067$$

年化以后，可以得出二者的值分别为 9.49 和 3.28。

从权证上市的前一个交易日开始对冲。可得出对冲过程中的参数为：

正股的初始价格 $S_{initial} = 2.65$ 元

初始执行价格 $K_{initial} = 2.90$ 元^⑧

股票预期收益率选取当时的一年期定期存款利率 $\mu = 2.25\%$

方差的均值回归系数 $a = 9.49$

波动率的波动率 $\xi = 3.28$

长期平均波动率为 $\sigma = 44.30\%$

交易成本比率为 $k = 0.3\%$ （单向）

发行人的风险厌恶系数为 $\gamma = 50$

二、实证结果

通过上述三种不同方法以及 Black-Scholes 动态间断对冲方法的测算，发行人的最终收益如下表所示：

表 5.1 武钢 JTB1 风险对冲收益测算

	发行人最初收取期权费为 3760 元 ^⑨			
所用模型	Black-Scholes	Boyle-Vorst	Leland	Whalley-Wilmott
发行人最终收益 (元)	178	259	214	217

^⑧ 我国的权证在正股除权时会自动调整权证的执行价格及行权比例，除息时会自动调整权证的执行价格，但不调整行权比例，不过这对于权证的价值影响很小。本文所讨论的武钢 JTB1 和首创 JTB1 在权证上市过程中都有除息的情况，笔者在计算对冲成本及误差时所用的是真实股价以及与其相对应的权证的实时执行价格。

^⑨ 此处的期权费是假设发行商按照 Black-Scholes 公式计算出来的理论期权价格的整数倍收取。

可以看出，对于价外认购证武钢 JTB1，Boyle-Vorst 模型的对冲效果要好于 Whalley-Wilmott 模型的对冲效果。

5.3 对首创 JTB1 的实证研究

一、参数的选取

首创 JTB1 于 2006 年 4 月 24 日上市，最后交易日为 2007 年 4 月 16 日。根据首创股份在首创 JTB1 上市期间的收益率数据，通过规划求解，可以求出相应的 GARCH (1, 1) 模型中的参数。结果如下：

$$\sigma_n^2 = 0.00004544 + 0.06356u_{n-1}^2 + 0.8784\sigma_{n-1}^2$$

即为， $\omega = 0.00004544, \alpha = 0.06356, \beta = 0.8784$ 。

可以求出：

$$V_L = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} = 0.0007830, \text{ 年化后的长期平均波动率 } \sigma \text{ 为 } 44.42\%。$$

$$a = 1 - \alpha - \beta = 0.05804$$

$$\xi = \sqrt{2\alpha} = 0.08989$$

年化以后，可以得出二者的值分别为 14.63 和 1.43。

从权证上市的前一个交易日开始对冲，相应的对冲参数为：

正股的初始价格 $S_{initial} = 4.55$ 元

初始执行价格 $K_{initial} = 4.55$ 元

股票预期收益率选取当时的一年期定期存款利率 $\mu = 2.25\%$

方差的均值回归系数 $a = 14.63$

波动率的波动率 $\xi = 1.43$

长期平均波动率为 $\sigma = 44.42\%$

交易成本比率为 $k = 0.3\%$ （单向）

发行人的风险厌恶系数为 $\gamma = 50$

二、实证结果

通过测算，发行人的最终收益如下表所示：

表 5.2 首创 JTB1 风险对冲收益测算

	发行人最初收取期权费为 6737 元			
所用模型	Black-Scholes	Boyle-Vorst	Leland	Whalley-Wilmott
发行人最终收益（元）	-1477	-1414	-1490	-874

通过不同模型的对冲效果的比较，可以看出，对于平价认购证首创 JTB1 来说，利用 Whalley-Wilmott 对冲可以获得较好的结果。

6 结论

对于考虑到交易成本的期权复制模型来说，无论是固定对冲间隔的方法，还是要事先对发行人的风险厌恶程度做出假设的方法，于期权到期时的对冲误差均不可避免。这样一来，当这些模型应用于风险对冲策略时，便出现了如何评判优劣的问题，如果仅用对冲误差的均值和标准差来衡量这些模型的优劣，难以做出判断，因此本文主要是采用 VAR 方法在各种不同的模型之间进行比较。

第一，如果是以常数波动率为假设条件，各模型的效果基本上可以按照优劣进行排序，而不受期权的价内外程度以及其它因素的影响。具体来说，在置信度要求较高的情况下，Leland 模型的表现最差，Whalley-Wilmott 模型其次，Boyle-Vorst 模型的对冲效果最优。

第二，如果是以随机波动率为假设条件，各模型之间的效果的优劣顺序便不再唯一，不仅根据期权的价内外程度的不同有所不同，而且在股票价格与波动率的相关系数为零、为正和为负时，三者的相对对冲效果也分别不同，因此便产生了对不同模型进行分情况使用的可行性。

本文通过对不同期权对冲模型进行模拟，发现对于不同的情况使用不同的期权对冲模型可以获得更好的对冲效果：在股票价格和波动率零相关时，平价附近宜采用 Whalley-Wilmott 模型，价内外程度较深时宜采用 Boyle-Vorst 模型；在股

票价格和波动率正相关时，期权处于价内时宜采用 Whalley-Wilmott 模型，处于价外时宜采用 Boyle-Vorst 模型；在股票价格和波动率负相关时，期权处于价外时宜采用 Whalley-Wilmott 模型，处于价内时宜采用 Boyle-Vorst 模型。

另外，随着波动率的波动率的增大，三个模型的对冲效果都会变差，但是相对来说，Whalley-Wilmott 模型的效果下降最不明显，尤其是对于平价附近的期权，利用 Whalley-Wilmott 模型进行对冲所得的 VAR 值明显优于其它两个模型。

第三，笔者发现，以上得到的结果和 Hull-White 的随机波动率模型保持较为一致的联系。股票价格和波动率零相关时，Hull-White 模型倾向于低估平价期权而高估价内外程度较深的期权，也就是说，平价期权的引伸波幅较常数波动率低而价内和价外期权相反；股票价格和波动率正相关时，价内期权的引伸波幅较常数波动率低而价外期权的引伸波幅相反；股票价格和波动率负相关时，价内期权的引伸波幅较常数波动率高而价外期权则相反。如果我们将引伸波幅看作真正的波动率，则当真实波动率较低时采用 Whalley-Wilmott 模型会具有相对其它模型来说较好的效果，而当真实波动率较高时采用 Boyle-Vorst 模型会有较好的效果。

第四，即使是在常数波动率的假设下，单纯利用期权复制模型进行风险对冲所得到的 VAR 值也较大，而在随机波动率假设以及股票价格和波动率之间存在相关性的假设下，VAR 值更是会大幅增加，这说明在现行交易成本的情况下，发行人如果仅利用正股进行动态对冲，实际上仍要承担不小的风险。为了减少对冲风险，发行人需更多样化的对冲风险的方式，例如通过买卖场外期权进行对冲等等，这就要求我国尽快壮大衍生品市场，提供更多可用来对冲风险的金融工具。

缺点与不足：

第一，本文着重于比较三个模型之间的相对优劣，为了能够更清晰的说明三者之间的效果差别，在选择参数时较为极端（尤其是在随机波动率假设情况下），导致对冲后的 VAR 值较大。

第二，随机波动率情形下，为了保持模拟方法和实证方法的一致性，笔者采用的对冲波动率是以随机波动率模型中的长期波动率为基准进行计算，但此波动率在股票价格和波动率相关的情形下可能不适宜作为期权复制模型中的基准波动率。

第三，由于对冲误差的存在，单只股票路径的对冲效果并不能决定性的说明

对冲策略的优劣。因此本文最后对两只权证的实证结果是对本文所得结论的应用而并非证实。

参考文献

- [1] Ahn, H., M. Dayal, et al. (1998). "Option Replication with Transaction Costs: General Diffusion Limits." *The Annals of Applied Probability* 8(3): 676-707.
- [2] Augusto Perilla, Diana Oancea (2003). "Pricing and Hedging Exotic Options with Monte Carlo Simulations." Working Paper , University Of Lausanne.
- [3] Bakshi, G., C. Cao, et al. (1997). "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models." *The Journal of Finance* 52(5): 2003-2049.
- [4] Bates, D. S. (2003). "Empirical option pricing: a retrospection." *Journal of Econometrics* 116(1-2): 387-404.
- [5] Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *The Journal of Political Economy* 81(3): 637-654.
- [6] Bollerslev, T. (1987). "A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return." *The Review of Economics and Statistics* 69(3): 542-547.
- [7] Boyle, P. P., D. Emanuel, et al. (1979). *Discretely Adjusted Option Hedges*, Salomon Brothers Center for the Study of Financial Institutions, New York University, Graduate School of Business Administration.
- [8] Chaudhury, M. M. and J. Z. Wei (1996). *A Comparative Study of the GARCH (1, 1) and Black-Scholes Option Prices*. University of Toronto.
- [9] Corrado, C. J. and T. Su (1997). "Implied volatility skews and stock return skewness and kurtosis implied by stock option prices." *The European Journal of Finance* 3(1): 73-85.
- [10] Edirsinghe, C., V. Naik, et al. (1993). "Optimal Replication of Options with Transactions Costs and Trading Restrictions." *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28(1): 117-138.
- [11] Figlewski, S. (1989). "Options Arbitrage in Imperfect Markets." *The Journal of Finance* 44(5): 1289-1311.

-
- [12] Figlewski, S. and G. P. Webb (1993). "Options, Short Sales, and Market Completeness." *The Journal of Finance* 48(2): 761-777.
- [13] Gilster Jr, J. E. (1997). "Option Pricing Theory: Is 'Risk-Free' Hedging Feasible?" *Financial Management* 26(1): 91-105.
- [14] Gultekin, N. B., R. J. Rogalski, et al. (1982). "Option Pricing Model Estimates: Some Empirical Results." *Financial Management* 11(1): 58-69.
- [15] Hodges, S. D. and A. Neuberger (1989). "Optimal replication of contingent claims under transaction costs." *Review of Futures Markets* 8(2): 222-239.
- [16] Huang, Y. C. and S. C. Chen (2002). "Warrants pricing: Stochastic volatility vs. Black-Scholes." *Pacific-Basin Finance Journal* 10(4): 393-409.
- [17] John C. Cox, Stephen A. Ross and Mark Rubinstein (1979). "Option pricing: A simplified approach." *Journal of Financial Economics*, Volume 7, (3): 229-263
- [18] Johnson, H. and D. Shanno (1987). "Option Pricing when the Variance is Changing." *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22(2): 143-151.
- [19] John Hull and Alan White (1987), "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *The Journal of Finance*, Vol. 42, No. 2, pp. 281-300.
- [20] Kabanov, Y. M. and G. Last (2002). "Hedging under Transaction Costs in Currency Markets: a Continuous-Time Model." *Mathematical Finance* 12(1): 63-70.
- [21] Kabanov, Y. M. and M. M. Safarian (1997). "On Leland's strategy of option pricing with transactions costs." *Finance and Stochastics* 1(3): 239-250.
- [22] Lauterbach, B. and P. Schultz (1990). "Pricing Warrants: An Empirical Study of the Black-Scholes Model and Its Alternatives." *The Journal of Finance* 45(4): 1181-1209.
- [23] Leland, H. E. (1985). "Option Pricing and Replication with Transactions Costs." *The Journal of Finance* 40(5): 1283-1301.
- [24] Macbeth, J. D. and L. J. Merville (1979). "An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model." *The Journal of Finance* 34(5): 1173-1186.
- [25] Merton, R. C. (1976). "Option pricing when underlying stock returns are

-
- discontinuous." *Journal of Financial Economics* 3:125-144
- [26] Mohamed, B. (1994). "Simulations of transaction costs and optimal rehedging." *Applied Mathematical Finance* 1(1): 49-62.
- [27] Perrakis, S. and J. Lefoll (2000). "Option pricing and replication with transaction costs and dividends." *Journal of Economic Dynamics and Control* 24(11-12): 1527-1561.
- [28] Scott, L. O. (1987). "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application." *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22(4): 419-438.
- [29] Soner, H. M., S. E. Shreve, et al. (1995). "There is no Nontrivial Hedging Portfolio for Option Pricing with Transaction Costs." *The Annals of Applied Probability* 5(2): 327-355.
- [30] Stein, J. (1989). "Overreactions in the Options Market." *The Journal of Finance* 44(4): 1011-1023.
- [31] Toft, K. B. (1996). "On the Mean-Variance Tradeoff in Option Replication with Transactions Costs." *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 31(2): 233-263.
- [32] Whalley, A. E. and P. Wilmott (1993). "Counting the costs." *Risk* 6(10): 59-66.
- [33] Whalley, A. E. and P. Wilmott (1993). *A Hedging Strategy and Option Valuation Model with Transaction Costs*, University of Oxford, Mathematical Institute.
- [34] Whalley, A. E. and P. Wilmott (1997). "An Asymptotic Analysis of an Optimal Hedging Model for Option Pricing with Transaction Costs." *Mathematical Finance* 7(3): 307-324.
- [35] Zhao, Y. and W. T. Ziemba (2004). *On Leland's Option Hedging Strategy with Transaction Costs*, Working Paper, Sauder School of Business (Canada: University of British Columbia).
- [36] 陈明亮 (2006). "修正 Black-Sholes 权证定价理论假设条件的数值方法研究." *统计与决策*(002): 16-18.
- [37] 陈松男 (1999). "在间断性避险及交易成本下的选择权评价模型: 以实务观

点修正理论, 风险管理学报, 第一卷第二期.

[38] 陈萍, 叶中行, et al. (2004). "基础股票有分红及配股的期权定价与套期保值." 高校应用数学学报: A 辑 19(003): 363-368.

[39] 王娜 (2006). "国内券商备兑权证运作模式初探." 上海投资(002): 40-43.

[40] 章飏, 李玉刚, 姜玉燕 (2005). "权证定价与避险策略研究." 上证联合研究计划课题.

[41] 张慧毅, 徐荣贞, et al. (2006). "VaR 模型及其在金融风险管理中的应用." 价值工程 25(008): 51-53.

[42] 张国辉, 郑明川 (2002). "衍生金融工具特点与 VaR 风险管理." 技术经济与管理研究(006): 64-65.

后 记

转眼, 研究生生活也要画上句号, 在此, 除了感恩与不舍, 我再也难有其它想法。

感谢我的母校, 本科四年, 研究生三年, 我早已把这里当成了自己的另一处故乡。时时有白鹭栖息的芙蓉湖畔, 枝头火一般缭绕的簇簇凤凰, 到处可见的青绿草坪和幽香阵阵的花朵, 清爽又夹杂柔和气息的缕缕海风、紫荆花铺洒满地的林荫小径……, 太多太多了, 过往的回忆盘旋于脑海, 无法遗忘: 我们的海蜊西施、麻辣皇后、刀削面大叔、睡觉(水饺)大婶……世界的嘈杂淹没于厦大的祥和中, 在受伤的时候, 她给我温暖; 在抑郁的时候, 她给我希望。忘不了, 永远也忘不了, 我深深爱着的这片土地。

感谢老师们, 尤其是我的导师郑振龙教授, 是您让我从懵懂中觉醒, 让我看到智慧之门缓缓开启之后, 那道亮丽夺目的光芒。剩下的路虽要自己前行, 但我没有丝毫慌张, 因为我始终相信, 自己不会辜负您的希望!

感谢师兄师姐们, 尤其是洪锐师兄和秦洪远师兄, 你们是我一路前行的好榜样, 你们给我的鼓励和教诲我会永远牢记!

感谢朋友们, 如果说中学交的朋友是果冻, 稚嫩没有杂质; 大学交的朋友是麻辣果, 刺激而纯粹; 那么研究生交的朋友就是热奶茶, 温暖而贴心。我会永远

牢记你们给我的照顾和关怀，感谢一期的才子们：老邱、贵华、水水、小波、清涛、得意阳阳、JR特工、阿龙……；感谢二期的帅哥们：阿朱、阿宝、峰子、老李、九天、老高、小红……，我爱你们！