

## 摘 要

我国的利率市场化已步入实质性阶段。利率市场化进程的加速极大地推动着中国债券市场的进一步发展，同时也扩大了金融资产价格波动的幅度。目前，我国已基本实行了债券发行利率、债券交易利率的市场化，债券投资中的利率风险日益凸显，选择有效防范利率风险的办法和途径是当前需要解决的一个现实问题，但目前国内不论在理论界，还是在实务界，有关债券利率风险管理的系统性研究和运用并不多见，本文算是一个尝试。

投资无违约风险的不含选择权的债券所面临的风险主要是利率风险。利率风险的度量和规避是债券投资中利率风险管理的两个重要环节。本文分两大部分，第一部分对债券投资中的利率风险效应和度量进行了阐述。市场利率的变动决定债券投资总报酬率的高低，利率变动对投资收益的影响主要反映在两个方面：价格效应和再投资效应。文章先论述了债券价格与利率间的关系，分析了债券价格波动的影响因素和特征；接着引入了利率风险的度量方法，同时对利率期限结构进行了阐述。第二部分主要论述了基于久期概念的免疫策略的作用机理。文章先论证了在水平收益率曲线平行移动的情形下及利率变动是随机过程情形下免疫策略的作用原理；然后针对免疫策略的局限性，又讨论了收益率曲线风险和关键利率久期。

本文的创新之处在于对问题既进行直观的说明，又有着严格的数学推导，并能结合我国目前债券市场的现状进行分析。图表说明和数学论证的相对称使用，更利于澄清概念；债券投资的管理人员熟悉金融方程的数学处理，易于对利率风险的分析形成清晰的、可操作的理解，有助于形成实践知识。

**关键词：**利率风险；久期；免疫

## **Abstract**

The market-oriented process of interest rate in our country has already stepped into substantive stage. With the liberalization advancing, deepening; bond market has developed greatly in China. But it expands the range that the price of the financial assets fluctuates at the same time. At present, our country has already implemented liberalization on issuing and trading of bond's interest rate basically. The increase is accelerating in the interest rate risk of bond investment. It is a realistic problem to choose the methods and ways of avoiding risk. But the reality is that we still have not made a systematic research on it. This paper attempts to discuss it.

The major risk faced by investors is interest rate risk when bond has no default and free-option. To measure and evade the interest rate risk is two important links of risk management in the bond investment. The paper is divided into two major parts. The first part has analysis of the interest rate risk effect and measurement methods. The change of the interest rate of market determines the level of the total returns. It reflects in two aspects mainly: price effect and reinvestment effect. The paper describes relationship between bond price and interest rate firstly, as well as analysis of price volatility characteristics and factors affecting of a bond. Then the methods of measuring interest rate risk are presented, and explain the term structure. The second part describes the principle of immunization strategies based on duration concept mainly. The paper proves it under the parallel shift and under the stochastic process situation. To the limitations of the immunization strategies, then has analysis of the yield curve risk and key rate duration.

The paper not only illustrates principle with numerical examples and graphs but also demonstrates them with strict mathematical proofs, as well as analysis on current situation of bond market in China. These come into the highlights in the paper. Mathematical demonstration and what chart is most suitable to use, do benefit to concept of clarifying and linking to each other with analysis

of reality closely even more. It contributes to analyzing of interest rate risk and forming practice knowledge, when the administrative staff of bond investment is familiar with the financial equation.

**Key words:** Interest Rate Risk; Duration; Immunization

# 目 录

<b>第一章 绪论</b> .....	<b>1</b>
§1.1 选题的背景和意义.....	1
§1.2 利率风险管理的涵义.....	4
<b>第二章 债券的价格和收益率</b> .....	<b>8</b>
§2.1 债券的特点和分类.....	8
§2.2 债券的定价.....	9
§2.3 债券的收益率.....	11
§2.4 债券价格波动的特征.....	14
§2.5 我国国债的价格收益率关系.....	24
<b>附录 2A 债券价格波动特征的数学证明</b> .....	<b>26</b>
<b>第三章 利率期限结构理论</b> .....	<b>30</b>
§3.1 即期利率与远期利率.....	30
§3.2 传统的利率期限结构理论.....	33
§3.3 现代的利率期限结构理论.....	38
§3.4 我国的利率期限结构.....	41
<b>第四章 债券的利率敏感性分析</b> .....	<b>45</b>
§4.1 久期和利率敏感度.....	47
§4-2 凸性.....	54
§4-3 对久期的再讨论.....	59
§4-4 我国国债价格的敏感性分析.....	65
<b>附录 4A 久期可加性的证明</b> .....	<b>69</b>
<b>第五章 债券投资的免疫策略</b> .....	<b>70</b>
§5.1 债券的投资策略.....	70

§5.2 久期免疫机理概述 .....	72
§5.3 水平收益率曲线平行移动下的免疫机理.....	75
§5.4 随机利率下的免疫机理 .....	77
§5.5 免疫技术的局限性 .....	78
<b>附录 5A 债券投资组合的案例.....</b>	<b>80</b>
<b>第六章 利率风险的进一步分析 .....</b>	<b>82</b>
§6.1 收益率曲线风险 .....	82
§6.2 关键利率久期 .....	84
§6.3 最小化风险免疫策略 .....	88
<b>结 束 语.....</b>	<b>90</b>
<b>参 考 文 献.....</b>	<b>92</b>
<b>后 记.....</b>	<b>95</b>

# Contents

<b>CHAPTER 1 Introduction.....</b>	<b>1</b>
1.1 The Purpose and Significance of Problem Selection .....	1
1.2 Risks and Interest Rate Risk Management .....	4
<b>CHAPTER 2 Price and Yield of Bond.....</b>	<b>8</b>
2.1 Characteristics and Classifications of Bonds .....	8
2.2 Pricing a Bond.....	9
2.3 Yield.....	11
2.4 Price Volatility Characteristics and Factors Affecting of a Bond.....	14
2.5 Price/Yield Relationship in China.....	24
<b>APPENDIX2A. Proof of the Price Volatility Characteristics .....</b>	<b>26</b>
<b>CHAPTER 3 Term Structure Theories .....</b>	<b>30</b>
3.1 Spot Rate and Forward Rate .....	30
3.2 Traditional Term Structure Theories .....	33
3.3 Modern Term Structure Theories .....	38
3.4 Term Structure in China .....	41
<b>CHAPTER 4 Analysis of Bond's Rate Sensitivity .....</b>	<b>45</b>
4.1 Duration .....	47
4.2 Convexity .....	54
4.3 Further Analysis of Duration .....	59
4.4 Analysis of Bond's Price Sensitivity in China .....	65
<b>APPENDIX 4A Proof of the Duration's Adding Property.....</b>	<b>69</b>
<b>CHAPTER 5 Immunization Strategies in Bonds Investment .....</b>	<b>70</b>
5.1 Bond Investment Strategies .....	70
5.2 Overview of Immune Theories .....	72
5.3 Immune Theory under Parallel Shift.....	75
5.4 Immune Theory under the Random Interest Rate .....	77
5.5 The Limitations of Immunization Strategies.....	78
<b>APPENDIX 5A A Case of Portfolio in Bonds Investment .....</b>	<b>80</b>

<b>CHAPTER 6 Further Analysis of the Interest Rate Risk .....</b>	<b>82</b>
6.1 Yield Curve Risk .....	82
6.2 Key Rate Duration .....	84
6.3 A Risk Minimizing Strategy .....	88
<b>CONCLUSION .....</b>	<b>90</b>
<b>REFERENCES .....</b>	<b>92</b>
<b>ACKNOWLEDGEMENTS .....</b>	<b>95</b>





## 第一章 绪论

### § 1.1 选题的背景和意义

选择“债券投资中的利率风险管理”这一问题进行研究,是基于现实和理论的需要。现实是我国的利率调整频繁,债券市场中中长期债券的出现和机构投资者的增加,债券投资的利率风险凸显,需引起关注。理论上的考虑主要是在我国重股市,轻债市,针对债券投资管理策略的研究比较少,散见于一些文章中的关于久期(duration)<sup>①</sup>知识的应用只侧重于结论的介绍和数字说明,很少有从理论上加以系统论证的,没有详细地回答“为什么要这样做”这个问题。

我国的利率市场化已步入实质性阶段。利率市场化是一个利率不断放松管制的过程,越来越多的因素将对市场利率产生影响,因此利率变动的频率和幅度都会不断扩大。“金融气候体系中的冲突将可能搅得利率像台风里的划艇。”<sup>[1]</sup>随着金融体制改革的不断深化,我国原有的固定利率制度已受到冲击;利率市场化进程的加速扩大了金融资产价格波动的幅度。目前,我国已基本实行了债券发行利率、债券交易利率、外币利率、同业拆借利率等的市场化,价格波动在这些市场化的利率中表现得较为充分。例如代号为000696的1996年记帐式(五期)国债,发行日期是1996年6月14日,期限为10年,息票率为11.83%,于1996年7月12日上市,开市价为105.77元。随着国家的8次降息,它的价格已从100多元变化到现在(2004年4月1日)的129.93元左右。其中在1999年6月10日,价格攀升到167元,因为这一天一年期储蓄利率被下调到2.25%。

---

<sup>①</sup> 在国内出版的一些书籍和文章中,duration有的译为持续期(见(美)安东尼·G·科因(Anthony G.Cornyn)等著;唐旭等译《利率风险的控制与管理》[M]北京:经济科学出版社,1999);有的译为存续期限(见(美)布鲁斯·塔克曼(Bruce Tuckman)著;黄嘉斌译;《固定收益证券》[M]北京:宇航出版社,1999);还有的译为期度(见李奥奈尔·马特里尼,菲利普·普里奥兰德著;肖军译《固定收益证券:对利率风险进行定价和套期保值的动态方法:Dynamic methods for interest rate risk pricing and hedging》[M]北京:机械工业出版社,2002)等。

我国债券市场上现在流通的主要是国债、企业债和金融债，其中国债的比重较大。至 2004 年 9 月，上市债券品种 77 只<sup>①</sup>，债券现货 65 只，而国债就有 26 只。2004 年，累计到 9 月，上市债券品种共成交 36897.29 亿元，可分为债券现货和回购两大类。其中：债券现货 2415.49 亿元，债券回购 34481.8 亿元。国债的成交量是 2108.42 亿元，占债券现货成交量的 87.292%。现货中金融债、企业债的成交量是 67.98 亿元，可转债的成交量是 230.09 亿元。这些债券的利率通常是依据同期银行存款利率制定的，一般同期限的债券利率比银行存款利率略高。当前，国家对存贷款率的调整日趋频繁，利率调整已成为重要的货币政策工具，它对国民经济的影响已比较大了，企业与个人对利率变化的反应也越来越敏感，利率风险管理也就越来越重要。关注债券市场的人士都知道 2003 年 9 月 21 日央行上调商业银行的存款准备金率一个百分点(中国人民银行上调存款准备金率，由现行的 6%调高至 7%。整个债券市场因此而产生了较大震动)，引起债券二级市场上各国债品种和企业债的市值三天被蒸发掉 40 多亿元。究其原因，主要是在债券投资过程中对于市场利率变化等风险因素缺乏有力的分析工具和足够的警惕性。由此可见利率风险的防范在债券投资管理中举足轻重的地位，这些正如科因在《利率风险的控制与管理》这本书中提到的：“利率波动的急剧扩大导致了风险管理这门艺术和科学的革命，也产生了对更好的利率风险管理工具、技术和战略的要求。”<sup>[2]</sup>

除了利率频繁调整外，目前的债券市场还呈现出两个特点：首先，中长期国债的发行量越来越多，10 年、20 年、30 年期的国债与政策性金融债券已经出现，而且在经济增长减速、低利率环境中的发行量呈快速上升趋势。在低利率时期，债券的期限越长，投资者承受利率风险的概率就越大。这些固定低利率长期债券的未来利率风险是任何一家持有机构所不容忽视的，因为谁也不能确定今后 30 年、20 年甚至 10 年内的经济形式与利率走

---

<sup>①</sup> 数据来源：上海证券交易所 <http://www.sse.com.cn>

向，正如美国棒球运动员和哲学家劳伦斯·P·约吉·贝拉所说：“预测难，预测未来更难。”<sup>[3]</sup>其次，机构投资者的比例不断增加，他们交易债券的数额都比较大，利率调整引起的债券价格的变化对这些机构投资者来说更不容忽视。一旦利率随物价回升而上调时，银行持有的那么多低利率长期国债和政策性金融债券以及不可流通的凭证式国债又卖给谁？有相当一部分股份制商业银行持有的国债占其总资产的15%以上，若这部分资金有朝一日大量缩水，对银行的资金调动会是一个重创，因此选择有效防范利率风险的办法和途径更是需要解决的一个现实问题。

选题的第二个原因是基于理论研究的考虑。由于我国习惯了利率管制，各金融机构缺乏利率风险管理的经验和办法，大部分机构没有利率风险防范的意识和管理技术，最终因利率风险管理不力而造成收益损失。我国一直存在着“重股票，轻债券”的现象，研究债券利率风险管理的专业人士更是很少，而现实的情况是债券市场的迅速发展已成为一个必然的趋势。从国际成熟的金融市场的发展历史看，二战以后，特别是近几十年以来，随着债券市场、特别是政府债券市场的发展及其功能的深度开发，连接资本市场与货币市场的债券市场已成为一国现代金融体系的基础性金融机制。越来越多的经验证明，缺乏一个完善的债券市场，不仅资本市场走不了很远，货币市场的流动性、广泛性与安全性也将大打折扣，金融体系将难以正常运转，金融风险难以管理和控制。从我国的证券市场的现状来看，党的十六届三中全会通过的《中共中央关于完善社会主义市场经济体制若干问题的决定》中明确指出“积极拓展债券市场”，2004年3月1日国务院又发布了《关于推进资本市场改革开放和稳定发展的若干意见》。《中华人民共和国国债条例》的修订工作已经接近尾声，《中华人民共和国国债法》则在酝酿之中。与此同时国家正在拓展债券市场，扩大公司债券发行规模，大力发展机构投资者，拓宽合规资金入市渠道，建立统一互联的证券市场，稳步发展期货市场。所有这些都表明，债券市场在整个中国金融市场体系

中的地位正在迅速上升，在国民经济中发挥着越来越重要的作用。当越来越多的投资者进入到债券市场中，投资行为会逐渐走向正规化、理性化，债券组合管理的理念也会越来越受到市场参与者的重视。作为债券投资分析的强有力工具，资产组合管理是一个完整而细致的理论体系，其中利率风险管理是首要问题。“工欲善其事，必先利其器”。久期理论和免疫技术经过西方成熟的金融市场的多年实践证明是有效的投资工具，在我国的债券市场尚处于发展的阶段，结合国情借鉴和研究西方先进的投资管理理论是很有必要的。

## § 1.2 利率风险管理的涵义

### 一、风险及风险管理的涵义

在社会经济活动中乃至人们的日常生活中，风险无处不在，无时不有，风险一词也被人们经常谈论。不同的人从不同的角度对风险概念有着不同的解释。

“风险是指结果的任何变化”<sup>[6]</sup>，它是指在一定条件下，一定时期内可能产生的结果的变动。如果结果只有一种可能，不存在着发生变动，风险为零；如果可能产生的结果有几种，则风险存在。可能产生的结果越多，变动越大，风险也就越大。预期结果和实际结果的变动，意味着猜测的结果和实际结果的不一致或偏离，即风险是预期结果与实际结果的偏离。

在金融市场中，当我们投资某项金融资产时，资产将来的价值（或收益率）会因各种政治的、经济的等因素的影响而有多个可能的结果，投资者并不能确切地知道哪种结果会发生。资产的价值是一个随机变量。如果我们知道随机变量的概率分布，或者说知道将来结果发生的概率，此时我们面对的就是投资风险。

确定减少风险的成本收益权衡方案和决定采取的行动计划（包括决定

不采取任何行动)的过程称为风险管理<sup>[7]</sup>。风险管理的过程是为分析和应付风险而进行的系统尝试。这一过程主要包括风险识别、风险评估(如收集风险方面的数据,识别风险并使之量化)、风险管理方法选择、实施、评价。

## 二、债券投资中的利率风险及管理

债券是一种典型的利率产品,套用一句“国债利率是国债的灵魂”<sup>[8]</sup>,可以说利率是债券的灵魂。风险识别的内容就是分析对象所面临的主要风险是什么,债券投资中的主要风险是利率风险。市场利率的改变是难以预测的,所以债券的价格在到期之前都是不确定的。债券价格对利率的变化很敏感,利率变化越大,债券投资者潜在的损失或收益也越大。

投资付息债券的收益包括利息收入和资本增值,其中利息收入包括息票的利息支付,即债息,以及用临时现金流动(息票支付或本金偿还)进行再投资时所赚取的利息。资本增值是指到期时债券的面值或到期前卖出的价格高于原始的买进价格的差额。投资零息债券的收益主要来自资本增值。市场利率的变动决定债券投资总报酬率的高低。利率变动对投资收益的影响主要反映在两个方面:价格效应和再投资效应<sup>[4]</sup>,或者说是价格风险和再投资风险<sup>[1]</sup>。

对一个计划持有某种债券直至到期的投资者来说,到期前那种债券价格的变化与否没有多大关系;然而,对一个在到期前不得不出售债券的投资者来说,在购买债券后利率的上升,将意味着遭遇一次资本损失。这种现象被称为价格效应或价格风险。

债券主要有两种偿还方式,一种是到期时一次归还本金,如零息票债券,另一种是每年支付一次或两次利息,到期偿还本金,如息票式债券。投资者为了实现购买债券时所确定的收益相等的收益,就要求在持有债券期间将所获得的现金按等于买入债券时确定的收益的利率进行再投资。若市场利率下降,再投资时的利率低于预期收益率,则投资者所赚得的收益就比购入债券时所确定的收益低。这种现象被称为再投资效应或再投资

风险。决定利息的利息收入的重要性以及由此产生的再投资风险程度的是债券的两个特征：偿还期限和票息收入。在给定偿还期和到期收益率的情况下，息票利率越高，偿还期限越长，这张债券的总收益就越是依赖于利息的利息收入，以便实现购买时的收益率。换一句话说，偿还期越长，再投资的风险就越大。这一点的含义在于，长期息票债券的到期收益率的衡量结果，说明不了一个投资者如果持有债券直至到期而可能的潜在收益是多少。

还有一点需要说明的是，在给定偿还期和到期收益率的情况下，溢价债券比平价卖出的债券更加依赖于利息的利息收入。折价债券比平价卖出的债券对利息的利息收入的依赖要小。就零息票债券而言，其总收益完全不依赖于利息的利息收入。所以，如果持有一张零息票债券直至到期，便无再投资风险。

市场上所有已经存在的那些承诺在未来支付固定金额的债券的价格会因市场的利率变动而反向运动。也就是说，当利率上升或下降时，债券价格便会下跌或上涨。虽然利率变动能为投资者带来收益，但它通常也被称为“利率风险”，因为利率变化所引起的不确定性会令投资者感到不安。

利率的频繁剧烈波动，使利率风险越来越引起人们的关注。当然动荡带来风险，同时也带来机会。随着计算机技术的飞速发展，大规模的计算成为可能，从而先进的创造性的风险管理和优化方法能真正走出理论的殿堂，走入金融市场，为使用者带来丰厚的回报。

债券利率风险管理的流程主要分为利率风险的识别、测量、处理、评价四个阶段。准确测量利率风险的大小是有效进行利率风险管理的前提。对于不含有选择权的债券利率风险的度量技术主要有久期、凸性；对于含有选择权的债券利率风险的度量技术主要是有效久期、期权调整利差。也有运用比较新的技术如在险价值、情景分析和应力测试等手段来管理利率风险。在这些衡量利率风险的方法中，“债券久期是利率变动最直接的显示

器。”<sup>[4]</sup>詹姆斯 C.范霍恩在《金融市场利率与流量》中写到，尽管久期技术存在着这样和那样的假设、缺陷，但它仍然是我们在研究利率风险免疫策略时要考虑的一个重要指标。除了它的简单和成本显著性外，其他的模型在长时期内并没有被证明为有显著的优势<sup>[5]</sup>。

## 第二章 债券的价格和收益率

债券是一种基本的固定收益证券，这里的“固定”有两层意义：一是指债券的付息时间是确定的，通常是一年两次<sup>①</sup>，而且债券有到期日，在到期的时候归还本金和支付最后一期的利息；另一层是指对于付息债券来说，息票率是确定的。为了说明久期和凸性是如何用来度量单个债券或债券组合的利率风险的，先论述债券的价值是如何确定的很有必要，因为说清楚了这一点，债券价值变化的原因也就显而易见了。为此，本章先叙述债券的共同特点，然后说明债券价格怎样随市场利率而定，即利率和债券价格的数学关系，利用这一关系来解释为什么债券的价格变化向着与要求的收益率的变化相反的方向变动，最后讨论不同的收益率衡量方法以及它们在估价某种投资期限的潜在表现时的含义，同时给出债券的息票利率、当期收益率、到期收益率和其价格之间的关系。

### § 2.1 债券的特点和分类

债券是一种金融契约，该契约是债券发行人和债券持有人之间的合同，这一合同规定了债券发行人的全部义务。息票率、到期期限和面值是债券的内在特征，也是债券契约的组成部分<sup>[9]</sup>。影响债券现金流量和到期日的因素主要取决于债券契约中的附加选择权，如可赎回债券，债券发行人就具有在规定的到期日之前全部或部分买回债券的权力。所有债券的一个关键特征是它的到期期限，它是指债务停止存在、借款人全部清偿所借金额的日子。

债券的种类繁多，按支付利息的方式不同，可分为固定利息债券和浮

---

<sup>①</sup> 在美国和日本，通常的做法是一年支付两次息；对于欧洲债券市场和欧洲债券市场发行的债券来说，一般是1年支付利息一次。我国的定息国债也是1年支付利息一次。



动利息债券。按发行主体不同可分为政府债券、公司债券和金融债券三大类。按票面形态划分，可以分为溢价发行，即发行价格高于债券面值；平价发行，即发行价格等于债券面值；贴现发行，即发行价格低于债券面值。贴现发行债券中的一个极端例子就是纯贴现债券，即零息票债券<sup>①</sup>。它没有息票利息，仅在到期时为持有人一次性提供现金收益。实际上，投资者在购买这种债券时就已经得到了利息。零息票债券的期限一般较长，最多可到 20 年。可是我国债券市场上目前存在的零息票债券的期限都比较短，如简称为 04 国开 07 的债券期限只是半年，04 国债 1 和 03 国债 12 的期限是 1 年，3 年期的只有 02 国开 09 和 02 国开 16。

## § 2.2 债券的定价

在没有特别说明时，本文所讨论的债券均指不含有期权的债券。

任何金融工具的价格都是其现金流的现值<sup>②</sup>。债券投资是从期望的现金流中获得价值，因为现金流将在未来的期间得到，所以需要将这些现金流折现以获得债券的现值或价格。在一般情况下，债券的市场价值或者说价格，与借款者所承诺支付的利率及同类债券的市场通行的利率有关。

在给出债券价格的计算公式前，为方便分析，假设以下条件满足：息票支付每年进行一次，即这种债券的下一次利息支付，恰好是从现在起 1 年之后收到；在债券的到期日内息票利息是固定的；最后，由于市场利率会随各种因素的影响而变化，就是说，在实践中，不同时期的现金流会有不同的贴现率，为简化问题，先暂时忽略这一条件，现在假设只有一种利率，它适合于任何到期日现金流的折现。

---

<sup>①</sup> 这是上世纪 80 年代在国外出现的一种新的债券。目前，在我国的债券市场中，还有将利随本清债券视为“零息债券”的情况。利随本清债券是有固定息票的债券，只是利息和本金最后一次兑付，也可称之为累计债券。2001 年 4 月 25 日中国进出口银行发行的“01 进出 02”债券票面利率是 2.45%，这是一种利随本清债券。中国进出口银行于 2002 年 6 月 27 日在银行间债券市场发行的 100 亿金融债券“02 进出 04”就是真正意义的零息债券。

<sup>②</sup> 1896 年，美国经济学家欧文·费雪首次提出了关于资产的当前价值等于其未来现金流贴现值之和的思想。这一思想成为后来的资产定价理论的基石。

## 一、付息债券的定价

付息债券是指债券发行人承诺按照债券的票面利率定期向投资者支付利息（定期支付的利息凭证称为息票），并在债券到期时，即最后一次付息时必须偿还债券的面值。

一般地，在离散时间下按复利计算，付息债券的价格公式如下：

$$P = \frac{C}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2} + \frac{C}{(1+y)^3} + \Lambda + \frac{C}{(1+y)^n} + \frac{M}{(1+y)^n} \quad (2-1)$$

或者：

$$P = \sum_{t=1}^n \frac{C}{(1+y)^t} + \frac{M}{(1+y)^n} = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+y)^t} \quad (2-2)$$

其中：

P = 债券的价格

n = 期间数

C = 每期利息值

y = 每一期的利率，或称为折现率，也叫做投资者要求的回报率

M = 票面值

t = 收到支付的次数

C<sub>t</sub> = 第 t 次收到的款项

债券在到期前的所有利息收入的现值是  $\frac{c}{1+y}, \frac{c}{(1+y)^2}, \Lambda, \frac{c}{(1+y)^n}$ ，它们组成一个等比数列，运用等比数列的求和公式可以得到：

$$\sum_{t=1}^n \frac{C}{(1+y)^t} = C \left[ \frac{1 - \frac{1}{(1+y)^n}}{y} \right] \quad (2-3)$$

这样，公式（2-2）可以表示为

$$P = \frac{C}{y} \left[ 1 - \frac{1}{(1+y)^n} \right] + \frac{M}{(1+y)^n} \quad (2-4)$$

## 二、零息债券的定价

零息债券在其存续期内不支付利息，投资者收益的获取是通过购买价格和期满值的差额来实现的。它的价格只要用零代替公式（2-1）中的  $C$  就可以得到，即

$$P = \frac{M}{(1+y)^n} \quad (2-5)$$

公式（2-5）说明零息债券的价格就是其票面值的现值。

债券价格与利息率的基本关系是理解债券价格形成的一把钥匙。从公式（2-1）很容易看出：对于在未来确定日期的一个给定未来值，利率（贴现率）越高，债券的价格越低。这是因为今天投资的利率越高，那么为了实现确定的未来值需要投入的钱就会越少。公式（2-1）还揭示了债券价格和其期限之间的关系：对于一个给定的利率（贴现率），债券投资的期限越长，其价格越低。这是因为，投资期限越长，利息积累的机会就越多，所需要的现时投资就会越少。债券的定价公式对于观察各种类型的债券承受风险的一个基本来源，即利率的变化也是重要的，它有助于观察和了解具有不同特性的债券如何响应利率（债券投资风险的首要来源）的变化而变化。著名的久期度量就是关于这些分析的，并提供了一个关于承受利率风险的严密的表达式。具体的论述将在第四章中展开。

目前在我国的债券市场，由于债券品种和债券流动性的不足，债券定价还是个棘手的问题。国债公司 02 年底在中国债券信息网上推出了中国债券收益率曲线族系以及后来的债券估值服务，为债券定价提供了参考标准，不过这一标准还有待完善。

### § 2.3 债券的收益率

在债券契约中载明了债券所有权的有关条款，但它并未能说明有价证券的价值。投资者购买债券最关心的是债券的收益。债券投资收益的潜在

来源是：票面利息、再投资收入及资本损益。由于债券的品种不一样，就会出现债券的票面利率不同，因此，如果仅根据债券价格和利息数量的绝对值来判断债券收益肯定是不全面的，为了能比较债券的相对吸引力，投资者需比较它们的年回报率。用来描述二级市场上进行交易的债券年回报率的词，是债券的收益率。下面就给出收益率的几种基本类型。

### 一、当期收益率

当期收益率有时也称为直接收益率<sup>[10]</sup>，即当年利息收入占购买价格的比率。若  $c$  为当期收益率， $C$  为当年债券的利息， $P$  为债券购买的价格，则有

$$c = \frac{C}{P} \quad (2-6)$$

当期收益率仅考虑了息票利息支付，而没有考虑任何的资本利得（损失）或利息的利息收入对投资者收益的影响，货币的时间价值也被忽略了。该指标对于那些只关心整体收益的投资者来说用处很小，而对于想从投资组合中得到现金流量的调整收入的投资者来说很重要。这样的投资者可能是已经退休的以投资收入为生的人，因为考虑当期的利息收入比较合理<sup>[11]</sup>。

### 二、到期收益率

在实际中，投资者购买债券的决策依据并不是债券承诺的收益率。投资者要根据债券的价格、到期日、利息支付额等特征计算债券所能够提供的收益率。这种到期收益率也称为内在回报率，它就是使所有未来票面利息和期满时面值的现值等于该债券市场价格的贴现率。要计算债券的到期收益率，也就是在债券价格既定的前提下，求出债券价格公式中的贴现率。

利用公式（2-4），如果已知  $P$ 、 $C$ 、和  $n$  的值，便可以通过试错法运用财务计算器或 Excel 软件中的相关函数来求  $y$ 。

到期收益率这一指标，不仅体现了当期的息票收入，又可以衡量债券

生命期内价格的上涨或下跌。除此之外，到期收益率还将现金流量的时间性考虑在内。但这一指标也有自身的局限性，即在计算到期收益率时有两个隐含条件，即持有债券到期和息票支付能够按承诺的收益率进行再投资。如果不能同时满足这两个条件，投资者实现的实际收益率将大于或小于到期收益率。所以说，该指标只是衡量回报的理论值。

需要指出的是债券组合的到期收益率不是单个债券到期收益率的简单平均数或加权平均值。计算债券组合的到期收益率涉及以下步骤：首先，将组合中所有债券的市场价格加总；其次，按未来的每个阶段加总组合中所有债券的利息和偿付本金；最后求出使第二步中现金流量的现值与第一步起点时组合的市场价值相等的折现率。

### 三、持有期收益率

可用于任何投资的测度是持有期收益率。主要思想是：确定一个持有期的利率，然后假定在此期间收到的任何支付能够被再投资，当债券到期或被卖出时所实现的总回报称为持有期收益或已实现收益，这一指标能准确衡量在一定时期内债券持有者究竟能得到多少收益，用公式可以表示成 [12]

$$h = \left[ \frac{PB_s + \sum C + RI}{PB_p} \right]^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (2-7)$$

$h$  表示债券的年总回报率， $PB_s$  表示债券的售出价格， $PB_p$  表示债券的购买价格， $\sum C$  表示债券的票息总额， $RI$  表示票息再投资得到的收入， $n$  表示持有债券的期数。

由于利率变化而引起的债券已实现收益率可能大于或小于承诺的到期收益率，两种收益率之间的偏离就是利率风险。

从以上的分析中可以看出，当给定对未来市场利率的预期及计划投资期时，持有期收益率这一指标是测度债券相对表现的比较有效的方法，但

持有期收益率和到期收益率一样也具有不确定性，事后计算持有期回报率是一件相对直接的事，事前来估计它是另一回事。在债券持有期间，任何围绕债券支付的不确定性都必须加以考虑，通过考虑各种不同可能及其概率，可以提供一个期望值，也就是说，一个债券或组合的预期持有期回报率可以通过以概率为权重的不同的可能持有期回报率的加权平均来计算。

## § 2.4 债券价格波动的特征

为了采取有效的债券投资策略，有必要理解由利率变化所产生的债券价格波动性的特征，明白哪些因素会影响债券投资的收益率，以及如何量化债券收益率的变动程度。

从公式（2-4）可以看出，债券的价格与它的到期时间、息票率、承诺的到期收益率等属性有关，其中任何一种属性的改变，都会改变债券的到期收益率水平，从而影响债券的价格水平。市场利率的变动对债券价格的影响幅度，因债券到期时间、息票率、及到期收益率的不同而有很大的差异。现在用局部均衡的方法，即在假定其它属性不变的情况下，分析某种属性的变化对债券价格的影响。

### 一、收益率的影响

表 2-1 给出了四种假设的不含有期权的债券在不同的收益率情况下的价格。表中“6%/5 年”的含义是票面利率为 6%，期限是 5 年。假设债券最初的收益率为 6%，当收益率变动时，它们瞬间的价格变动的百分比如表 2-2 所示。

表 2-1 债券的价格—收益率关系

收益率 (%)	价 格 (元)			
	6%/5 年	6%/20 年	9%/5 年	9%/20 年
4.00	108.9826	127.35555	122.4565	168.3887
5.00	104.3760	112.5514	117.5041	150.2056
5.50	102.1600	106.0195	115.1201	142.1367
5.90	100.4726	101.1651	113.2556	136.1193
5.99	100.0427	100.1157	112.8412	134.8159
6.00	100.0000	100.0000	112.7953	134.6722
6.01	99.9574	99.8845	112.7494	134.5287
6.10	99.5746	98.8535	112.3373	133.2472
6.50	97.8944	94.4479	110.5280	127.7605
7.00	95.8417	89.32225	108.3166	121.3551
8.00	91.8891	80.2072	104.0554	109.8964

资料来源：Frank J. Fabozzi.: Duration, convexity, and other bond risk measures /New Hope, Pa. :Frank J. Fabozzi Associates,1999, p.38。

表 2-2 债券价格变动的百分比

新的收益率 (%)	价格变化的百分比(%)			
	6%/5 年	6%/20 年	9%/5 年	9%/20 年
4.00	8.98	27.36	8.57	25.04
5.00	4.38	12.55	4.17	11.53
5.50	2.16	6.02	2.06	5.54
5.90	0.43	1.17	0.41	1.07
5.99	0.04	0.12	0.04	0.11
6.01	-0.04	-0.12	-0.04	-0.11
6.10	-0.43	-1.15	-0.41	-1.06
6.50	-2.21	-5.55	-2.01	-5.13
7.00	-4.16	-10.68	-3.97	-9.89
8.00	-8.11	-19.79	-7.75	-18.40

资料来源：Frank J. Fabozzi.: Duration, convexity, and other bond risk measures /New Hope, Pa. :Frank J. Fabozzi Associates,1999, p.39。

由表 2-1 和表 2-2 可以看出，当收益率变动时，债券的价格会相应地

变动。为什么会这样呢？这是因为在一个竞争性的市场中，所有证券提供给投资者的预期收益率应是相当的，因此债券的价格会对利率的波动作出反映，而且其价格的变化方向与其要求的收益率变化的方向相反，即当要求的收益率增加时，现金流的现值便减少，因此价格便下跌；当要求的收益率减少时，现金流的现值增加，因此债券价格便上涨。

不含有期权的债券的价格—收益率关系如图 2-1 所示。该图所显示的是“弓形”形状，这种形状叫凸形。价格—收益率曲线关系的凸性(convexity)对于债券的投资特征具有重要的意义，这一点将在第四章中说明。

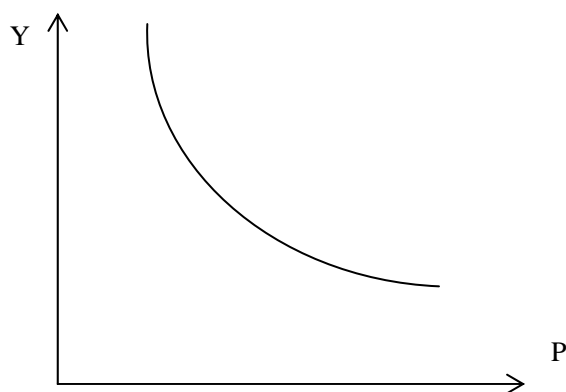


图 2-1 价格—收益率关系

由表 2-1 和表 2-2 的数据及图 2-1 可以得出收益率的变动对债券价格变动的影响有以下的特征<sup>[13]</sup>：

1. 虽然债券的价格与收益率呈反向变化，但对于相同的收益率变化，属性不同（如到期时间和息票率不同）的债券的价格变化的百分比却不相同<sup>①</sup>。
2. 同一种债券，对于要求的收益率的微小变化，不管是上升还是下降，其价格将作大致相同幅度的百分比变动。
3. 同一种债券，对于要求的收益率的较大变化，其上升和下降引起的

<sup>①</sup> 债券价格的波动特征，将在本章附录中给出证明过程。



价格变动的百分比不一样。

4. 同一种债券，对于给定的要求的收益率的较大变化，其价格上升的百分比大于其下降的百分比。

5. 对于给定的收益率的变动，当市场上收益率水平较低时，价格波动性比较大，当市场上收益率水平较高时，价格波动性比较小，见图 2-2。

其中特征 3 和 4 是由债券的价格—收益率关系的凸性引起的。特征 4 的具体含义是，如果投资者持有某种债券，收益率下降时所导致的价格升水大于收益率上升同样基点（100 个基点相当于 1%）时所导致的资本损失。

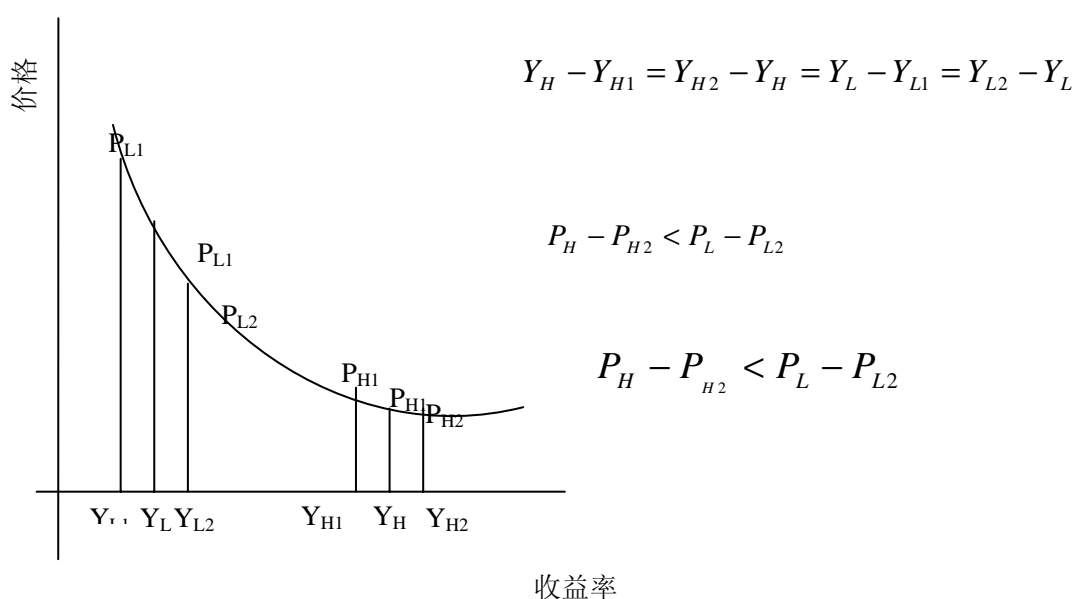


图 2-2 低和高收益率水平时价格变化的比较

## 二、到期时间的影响

### （一）期限对收益率的影响

债券的价格在其生命周期中会随市场利率的变化而不断波动，一种债券所剩时间被称为到期期限，债券价格的变动依赖于其期限的长短。具体来说，就是在其他因素不变时，一种债券的到期年限越长，市场利率变动时其价格波动幅度越大。

从表 2-2 中可以看到，假设最初的收益率为 6%，当收益率降为 4% 时，息票率均为 6% 的 5 年期和 20 年期的债券价格的升幅分别是 8.98% 和 27.3%，相差 18.32%；而当收益率上升为 8% 时，这两种债券价格变化的百分比的绝对值分别是 8.11% 和 19.79%。这说明：给定息票率和最初的收益率，对于相同基点的利率变化，长期债券价格变化的幅度要大于短期债券。这一现象也可从对债券的定价公式（2-4）的分析中得到解释。公式（2-4）表明，给定一个利率变化值，价格随之改变的量是到期年数的一个函数。对于长期债券，折现率的一个变化被累积地作用于整个票息支付序列中，而且在到期日面值的支付要以新的利率跨过整个期间折现，因此其价格会发生相当大的变化。然而对于短期债券，新的折现率仅仅作用于几次利息支付，对于面值金额也只是作用了很短的时期。

## （二）期限与再投资风险

债券的到期时间越长，再投资的风险也就越大，从而会影响投资的总收益。就长期债券而言，利息的利息收入占据了债券潜在收益的较大份额，有时可能高到债券潜在收益的 80%，这可以从下面的一组数据中得到验证。

表 2-3 达到复收益率 9% 的平价债券在各期限下利生利的值

到期年数	总回报/美元	再投资利率为 9% 时利生利	利生利占总回报的 百分比 (%)
1	92	2	2.2
2	193	13	6.5
3	302	32	10.7
4	422	62	14.7
5	553	103	18.6
7	852	222	26.1
10	1412	512	36.2
20	4816	3016	62.6
30	13027	10327	79.3

资料来源：小詹姆斯 L. 法雷尔. 投资组合管理理论及应用. 北京：机械工业出版社，2000，p. 113.

表 2-3 表示了面值为 1000 美元，为了实现复利收益率 9% 的平价债券在不同期限下利生利的大小。这里是假定每半年支付一次票息。例如，到期期限是 5 年的话，为了使 5 年间资产以复利 9% 增长，1000 美元最终要累积达到  $1000 \times (1 + \frac{0.09}{2})^{10} = 1553$  美元。也就是说，有一个增值的回报是 553 美元。5 年的利息收入是 450 元，这 103 美元的差额只有将利息再投资才能弥补。表 2-3 清楚地说明了再投资风险的大小随着投资组合中债券期限的增长而增加<sup>[14]</sup>。因此，长期债券具有更多的承担利率风险成分，期限是影响债券利率风险的一个重要因素。

### 三、息票率的影响

#### （一）息票利率对债券价格波动的影响

从表 2-2 可以看出，给定了到期时间和初始收益率，对于相同的收益率的改变，其中息票率较低的债券的价格波动的百分比大于息票率较高的债券的价格波动的百分比。例如，当收益率由 6% 降为 4% 时，5 年期、息票率为 6% 的债券的价格上升 8.98%，而同是 5 年期、息票率为 9% 的债券的价格上升 8.57%，相差 0.41%。类似地，当收益率由 6% 升为 8% 时，5 年期、息票率为 6% 的债券的价格下降 8.11%，而同是 5 年期、息票率为 9% 的债券的价格下降 7.75%，相差 0.36%。

#### （二）不同的收益率和债券价格间的关系

若资本市场是有效的，经过税负调节和风险因素调整后，任何债券向投资者提供的收益率应该是相等的。否则，投资者就会卖掉收益率低的债券，买入收益率高的债券，导致相应价格的下降或上升，直到各种债券收益率相等为止。当市场收益率变化时，针对新的市场应计收益率，债券价格是对投资者进行补偿的唯一可变的变量。若债券息票利率等于市场利率，投资者资金的时间价值通过利息收入能得到补偿，债券会按面值出售，即平价出售。若息票利率低于市场利率，利息支付不足以补偿资金的时间

价值，投资者还需从债券价格的升值中获得资本收益，债券就会折价出售。若息票利率高于市场利率，债券必须以高于票面值的价格出售，即溢价出售。这是因为有机会以票面值购买债券的投资者将得到多于市场应计的收益率，这高出的收益率就会导致投资者抬高价格，债券价格便将一直上升到债券产生的收益率和市场应计收益率相等时为止。以上所得出的收益率和债券价格之间的关系也可以从下面的数学推导中反映出来：

从公式（2-4）可以得到：

$$P - \frac{M}{(1+y)^n} = \frac{C \left[ 1 - \frac{1}{(1+y)^n} \right]}{y} \quad (2-8)$$

在等式（2-8）的两边同时除以 P 并变形后可得到：

$$\frac{1 - \frac{M/P}{(1+y)^n}}{1 - \frac{1}{(1+y)^n}} = \frac{C/P}{y} \quad (2-9)$$

当  $M=P$  时， $y = \frac{C}{P} = \frac{C}{M}$ ，

当  $M>P$  时， $\frac{C}{M} < \frac{C}{P} < y$ ，

当  $M<P$  时， $\frac{C}{M} > \frac{C}{P} > y$ 。

这里的  $\frac{C}{P}$  就是前文中提到的当期收益率， $\frac{C}{M}$  就是债券的息票利率， $y$  是债券的到期收益率。上面论证的息票利率、当期收益率、到期收益率和债券价格之间的关系可以用表 2-4 来反映。

表 2-4 不同的收益率和债券价格之间的关系

债券出售价	关系
平价	息票利率=当期收益率=到期收益率
折价	息票利率<当期收益率<到期收益率
溢价	息票利率>当期收益率>到期收益率

债券价格行为的一个重要方面，就是在到期时债券价格必须等于其面值，这被称作收敛于面值现象<sup>[15]</sup>。如果收益曲线是水平的，即在利率不变的条件下，随着债券到期日的趋近，当债券价格由预期收益率确定的现值决定时，没有违约风险的折价债券的价格将会随时间的推移而上升，预期的资本收益能够补足息票率与预期收益率的差异；相反，溢价债券的价格将会下跌，资本损失抵消了较高的利息收入，投资者仍然获得相当于预期收益率的收益率。图 2-3 反映了这两种债券的价格变动轨迹<sup>[16]</sup>。

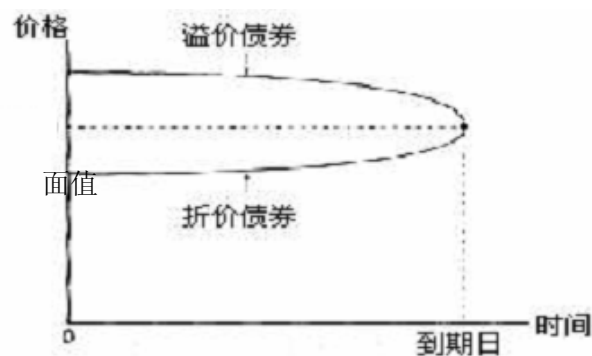


图 2-3 息票债券价格变动轨迹

由前面的分析可以看出，债券价格的变化是由一个或多个因素的影响而产生的，归纳起来主要有以下几点<sup>[17]</sup>：（一）由于债券发行者信用质量的变化而使投资者要求的收益率发生了变化；（二）要求的收益率没有任何变化，只是因为债券日益接近于到期，使得按某种溢价或折价出售的债券的价格发生了变化；（三）由于一些可比债券的收益率发生了变化，要求的收益率发生了变化，即市场利率发生了变化。

以上的分析表明，影响利率风险的主要因素除了期限长度外，还有息票利率和到期收益率水平，单单一个期限不足以测度利率的敏感性。

#### 四、国债 000696 的价格波动分析

国债 000696 的基本情况如表 2-5 所示。

表 2-5 国债 000696 的基本情况

挂牌代码	000696
挂牌名称	96 国债(6)
国债全称	九六年记帐式(五期)国债
发行价格	100
期限	10
到期日	2006-6-14
票面利率	11.83
国债付息方式	按年付息
计息日期	1996-6-14
上市日期	1996-7-12

资料来源：上海证券交易所 <http://www.sse.com.cn>

该券自 1996 年 7 月 12 日上市后，随着利率的频繁调整（1996 年开始的一年期储蓄利率变动情况如表 2-6 所示），其价格也在大幅度地波动，它的价格变化可以划分为三个阶段，见表 2-7。第一个阶段从上市日（1996 年 7 月 12 日）到 1999 年 6 月中旬。1996 年 5 月 1 日至 1999 年 6 月 10 日，官方将基准利率（1 年期储蓄存款利率）连续大幅调低，从 9.18% 调到 2.25%，累计幅度达到 6.93%。在这样的背景下，因为市场利率显著下降，债券价格主要呈现出大幅上升趋势，上升的幅度达到了 55.67%。1999 年 6 月 10 日的最高价是 167 元，1996 年 7 月 12 日的最低价是 119.1 元，振幅为 59.05%。第二阶段，从 1999 年 6 月到 2002 年 2 月，官方利率继续下调，累计幅度（包括 1999 年 11 月 1 日起征 20% 利息税）大约 0.666%。虽然如此，和第一阶段相比，利率变动幅度已经明显减小，因此，本阶段总的价格走势基本反映了累计票息效应和价格收敛效应的叠加，具有向下倾斜的锯齿状曲线的清晰轮廓。第三阶段始于 2002 年 3 月 25 日，交易所采取净价报价，实际上相当于价格收敛效应和净价效应综合的收敛价格曲线，呈向下倾斜的直线。这里要说明的是，在上述第二阶段，市场利率和国债收益率曲线是继续下降的，但是 96 国债（6）的总体价格走势竟然也是逐步下降的，

这似乎不符合“利率下降，债券价格上升”的说法，其实并不是这种说法不对，而是应从两次付息日之间的时间范围来看，利率走低引起的价格上升效应小于价格收敛引起的价格下降效应。<sup>①</sup>由此可见，“利率下降债券价格上升”是不准确的，仅仅适用于平价券的情况。96 国债（6）价格变动的直观表现见图 2-4（该图是选取了 1996 年 7 月 12 日到 2004 年 4 月 1 日每日的收盘价，共 1851 个数据绘制而成的）。

表 2-6 一年期储蓄存款利率变动

时间	利率 (%)
1996-05-01	9.19
1996-08-23	7.47
1997-10-23	5.67
1998-03-25	5.22
1998-07-01	4.77
1998-12-07	3.78
1999-06-10	2.25
2002-02-21	1.98

资料来源：中国债券信息网 <http://www.chinabond.com.cn>

表 2-7 国债 000696 价格的历史行情

单位：元

时间	开市价	收市价	涨跌幅 (%)	最高价	最低价	振幅 (%)
1996-07-12/1999-06-10	105.77	164.65	55.67	167 (1999-6-10)	105 (1996-7-12)	59.05
1999-06-10/2002-02-20	158.20	136.72	-13.58	158.2 (1999-6-14)	119.1 (2001-8-8)	32.83
2002-03-25/2004-03-30	139.88	120.40	-13.93	140 (2002-3-25)	120.08 (2004-3-29)	16.59

资料来源：上海证券交易所 <http://www.sse.com.cn>

<sup>①</sup> 全价交易和净价交易下债券的价格走势是有区别的。由于前者包含了利息因素，而利息是与日积累的，全价交易下的债券价格走势就是逐步上升的，到除息日留下一个缺口。而净价交易下债券价格围绕其面值上下波动，反映了市场利率与该债券票面利率之间的差距。相对而言，净价交易更能反映出市场利率调整对债券价格的影响。

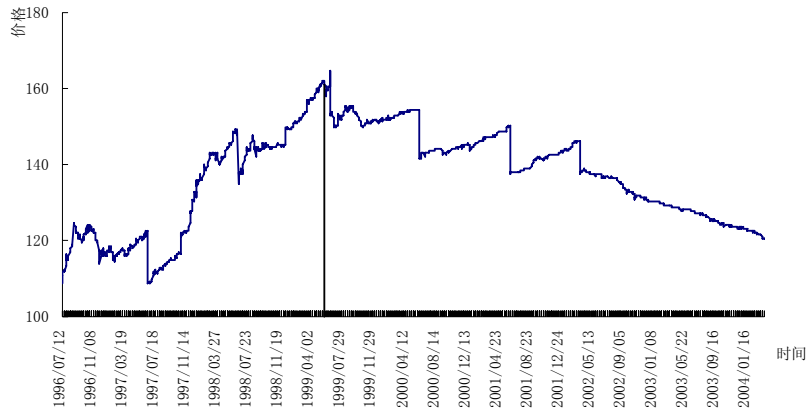


图 2-4 国债 000696 的价格变动轨迹

## § 2.5 我国国债的价格收益率关系

由国泰君安网站获得 2004 年 3 月 28 日的固定息票的国债价格和收益率的数据，见表 2-8。

表 2-8 定息国债的价格—收益率关系

债券代码	到期日	票面利率	全价价格(元)	类型	收益率(%)
000696	2006-6-14	11.83	129.71	固息	2.26
009704	2007-9-5	9.78	127.99	固息	2.81
009905	2007-8-20	3.28	102.49	固息	3.12
009908	2009-9-23	3.3	98.62	固息	3.93
010103	2008-4-24	3.27	101.64	固息	3.64
010107	2021-7-31	4.26	102.92	固息	4.08
010110	2011-9-25	2.95	94.29	固息	4.08
010112	2011-10-30	3.05	94.72	固息	4.06
010115	2008-12-18	3	97.75	固息	3.72
010203	2012-4-18	2.54	91.53	固息	4.15
010210	2009-8-16	2.39	93.97	固息	3.96
010213	2017-9-20	2.6	92.18	固息	3.33
010214	2007-10-24	2.65	98.55	固息	3.42
010215	2009-12-6	2.93	96.24	固息	3.86
010301	2010-2-19	2.66	93.88	固息	3.89
010303	2023-4-17	3.4	91.03	固息	4.21
010307	2010-8-20	2.66	94.88	固息	3.86
010308	2013-9-17	3.02	93.11	固息	4.12
010311	2010-11-19	3.5	99.53	固息	3.79

资料来源：国泰君安证券 <http://www.gtja.com.cn>



根据表 2-8 的数据可以得到图 2-5。

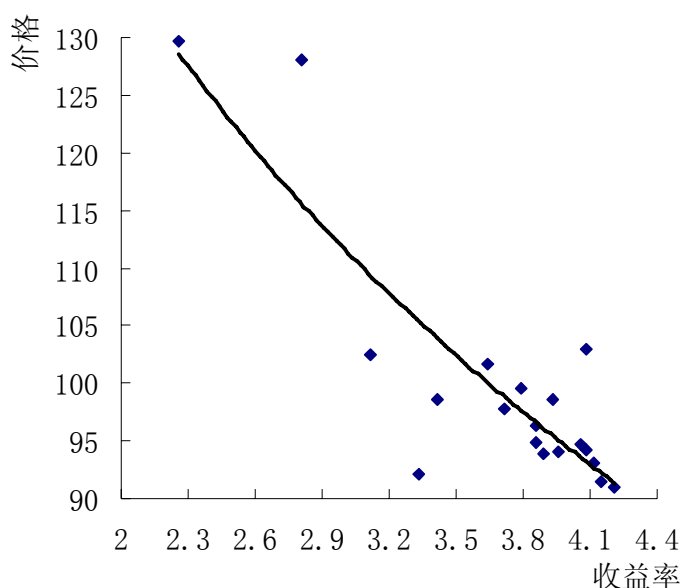


图 2-5 定息国债的价格—收益率关系

从图 2-5 可以看出,我国的国债市场上价格和收益率之间虽呈反向关系,但随机性很强,价格收益率曲线较平坦,说明凸性比较小。笔者认为造成这种现象的原因主要有以下几点:首先,我国的国债品种少,短期债发行量和发行规模特别小,3 个月和 1 年期短期债券品种基本是空白,20 年、30 年期债券分别于 2002、2003 才开始发行。市场交易主体单一,交易方式和工具也比较单一,还没有形成合理的利率期限结构,导致市场价格出现偏差,债券的定价过程有待改进。第二,国债市场上真正的机构投资者缺乏,买卖国债的参与者不是把定价建立在由模型进行的科学预测上,而是主要建立在主观判断的基础上。第三,债券市场制度的不完善,使得非真实性交易大量存在<sup>①</sup>,有部分成员通过虚假的做市交易来误导投资者。

<sup>①</sup> 非真实性交易产生的主要原因:对倒交易盛行,主要目的在于增加交易量。因为现券交易量关乎优秀交易成员、结算成员的评选,是申报承销商和一级交易商的一个重要条件,也是市场成员提高市场形象的一大捷径。另外,有部分成员通过虚假的做市交易来误导投资者。

## 附录 2A 债券价格波动特征的数学证明<sup>[18]</sup>

1. 债券价格与收益率的变动成反向关系。

证明：在公式 (2-2) 两边对  $y$  求导可得：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \sum_{t=1}^n \frac{-c \cdot t}{(1+y)^{t+1}} + \frac{-n \cdot M}{(1+y)^{n+1}} = - \left[ \sum_{t=1}^n \frac{c \cdot t}{(1+y)^{t+1}} + \frac{n \cdot M}{(1+y)^{n+1}} \right] < 0 \quad (1)$$

2. 债券到期收益率的上升导致其价格下降的幅度小于收益率等规模降低相对应的价格上升的幅度，即由相同幅度的到期收益率的绝对变化带来的价格变化是非对称的。

证明：价格与收益率之间的函数关系是  $P = f(y)$ ，其曲线的斜率  $\frac{\partial P}{\partial y}$  是一个负值，当  $y$  增加时，曲线变得较平坦。为了说明价格的非对称性变化，只要证明  $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} > 0$  就可以了。

在 (1) 式中对  $y$  求导，得到

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \sum_{t=1}^n \frac{C \cdot t(t+1)}{(1+y)^{t+2}} + \frac{n(n+1) \cdot M}{(1+y)^{n+2}} > 0。$$

3. 在给定利率变化水平下，长期债券的价格比短期债券的价格的波动性大。

证明：要证明上述结论，也就是要确定式子  $\frac{\partial [P(y) - P(y_0)]}{\partial n}$  的符号，其中  $y_0$  是息票利率。

事实上，当  $y = y_0$  时， $P = M$ ， $\frac{\partial P(y_0)}{\partial n} = 0$ 。

公式 (2-4) 可以变形为

$$P = \frac{C}{y} - (1+y)^{-n} \left( \frac{C}{y} - M \right) \quad (2)$$

在 (2) 式两边对  $n$  求导, 有

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \left( \frac{C}{y} - M \right) (1+y)^{-n} \ln(1+y) \quad (3)$$

当  $y < y_0$ , 即  $y < \frac{C}{M}$  时, 由表 2—4 可知, 债券溢价出售, 有  $\frac{C}{y} - M > 0$ , 和  $\frac{\partial P}{\partial n} > 0$ 。这说明, 当市场提供的收益率低于息票利率时, 债券的价格会上升, 价格上升的幅度随着到期期限的增加而增加。

当  $y > y_0$ , 即  $y > \frac{C}{M}$  时, 由表 2—4 可知, 债券折价出售, 有  $\frac{C}{y} - M < 0$ , 和  $\frac{\partial P}{\partial n} < 0$ 。这说明, 当市场提供的收益率高于息票利率时, 债券的价格会下降, 价格变动幅度的绝对值随着到期期限的增加而增加。

4. 随着到期期限的增加, 债券价格变动的百分比以一个下降的速率增加。换句话说, 利率风险与债券期限不成比例, 而是滞后于这个比例的变化。

证明: 在 (3) 式两边对  $n$  求导, 得到

$$\frac{\partial^2 P}{\partial n^2} = -\left( \frac{C}{y} - M \right) (1+y)^{-n} [\ln(1+y)]^2$$

与结论 2 证明中的理由相同, 当  $y < y_0$  时,  $\frac{\partial^2 P}{\partial n^2} < 0$ , 即债券价格是随着到期期限的增加以一个递减的速率上升的。

相似地, 当  $y > y_0$  时,  $\frac{\partial^2 P}{\partial n^2} > 0$ , 即债券价格是随着到期期限的增加以一个递减的速率下降的。

5. 利率风险与债券的息票利率呈反向关系。高息票利率债券的价格与低息票利率债券的价格相比, 前者对利率的敏感性较低。一年期公债和统

一公债<sup>①</sup>除外。

证明：式子  $\frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{y}{P}$  的结果是反映利率变动 1% 时价格变动的百分率，即价格对利率变动的弹性，但利率和价格变动的方向是相反的。要证明结论 5，

只要证明对于有限的  $n \geq 2$ ， $\frac{\partial \left[ \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{y}{P} \right]}{\partial C} > 0$  就可以了。

在 (2-4) 式两边对  $y$  求导并整理得：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-C(1+y)^{n+1} + C(1+y+ny) - Mn \cdot y^2}{y^2(1+y)^{n+1}} \quad (4)$$

利用 (2-4) 式表达价格  $P$ ，在等式 (4) 的两边乘以  $\frac{y}{P}$  并化简得到：

$$\frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{y}{P} = \frac{-C(1+y)^{n+1} + C(1+y+ny) - Mny^2}{C(1+y)^{n+1} - C(1+y) + My(1+y)} \quad (5)$$

记  $\Delta(n) = (1+y)[C(1+y)^n - C + My]^2$

$$\text{则 } \frac{My}{(1+y)[C(1+y)^n - C + My]^2} = \frac{My}{\Delta(n)} > 0$$

在等式 (5) 两边对  $C$  求导并化简，得

$$\frac{\partial \left[ \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{y}{P} \right]}{\partial C} = \frac{My}{\Delta(n)} [1+y + (1+y)^n (ny - 1 - y)] \quad (6)$$

当  $n=1$  及  $n$  趋于无穷大时，(6) 式的值是 0。下面用数学归纳法证明

当  $n \geq 2$  时，(6) 式的值是正值，为此，不妨记

$$\phi(n) = 1+y + (1+y)^n (ny - 1 - y)$$

$$n=2, \phi(n) = y^2 + y^3 > 0.$$

设  $\phi(n) > 0$ ，则

<sup>①</sup> 统一公债即永久债券，它的久期为  $\frac{1+y}{y}$ ，与息票率无关。

$$\phi(n+1) = 1 + y + (1+y)^n(1+y)(ny-1)$$

即  $\phi(n+1) = \phi(n) + ny^2(1+y)^n$

所以  $\phi(n+1) > 0$

由以上的推理可以得到  $\frac{\partial \left[ \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{y}{P} \right]}{\partial C} = \frac{My}{\Delta(n)} \cdot \phi(n) > 0$ 。

## 第三章 利率期限结构理论

第二章论述了债券的价格和收益率之间的关系，并指出了债券的价格是利率、期限和票面利率等因素综合作用的结果。在债券的价格计算公式中，实际上是假定了贴现率不随时间变化，也就是说不管是从现在开始的1年还是从明年开始的1年，只要时间长度相同，不同时间起点的利率是相同的。但在现实世界中，这种情况极少发生。长期债券的投资者所承担的风险显然要大于持有短期债券的投资者，影响债券收益率的一个特定因素就是期限。人们进行了大量的研究以试图更精确地理解是什么决定了具有不同时间长度的即期利率之间的关系，以及这些关系是如何随时间而变化的。解释这些关系的努力就成为利率期限结构的理论。本章将通过考察利率的期限结构来研究除期限以外的其他因素都相同的债券的收益和到期时间之间的关系。利率的期限结构对债券估值和利率风险管理是非常关键的，要使债券的定价模型能精确地反映其市场价格，必需谨慎地假设利率在未来的随机演变过程。确定了利率的期限结构，也就给出了资金市场的利率信息。通过对利率期限结构的分析，可以对未来的利率变动进行一个预测，从而制定有效的投资和风险管理策略。

### § 3.1 即期利率与远期利率

#### 一、即期利率与远期利率

某个给定时点上零息票债券的到期收益率称为即期利率，它可以看作是联系一个即期合约的利率水平。一般情况下，市场参与者在谈论“利率”时，实际上指的是利率期限结构所代表的即期利率。

远期利率就是指隐含在给定的即期利率中的从未来的某一时点到另一时点的利率。换句话说，远期利率是指投资者同意在未来的某个特定日期

购买的零息票债券的到期收益率。远期利率是单阶段的隐含利率，它们可由观测到的即期利率来获得。

这两个概念之间的差别可用图 3-1 来加以说明。图中的水平线表示时间，用  $T_0$  表示现在。在时间线下方的  $S_n$  线表示  $n$  年期即期利率。在时间线上方的  $F_n$  线表示第  $n$  期远期利率。比如已知  $S_1$  和  $S_2$ ，可以计算出  $F_2$ 。利率  $F_2$  只能计算出来，因为它是无法观测到的，所以把它称为隐含远期利率。

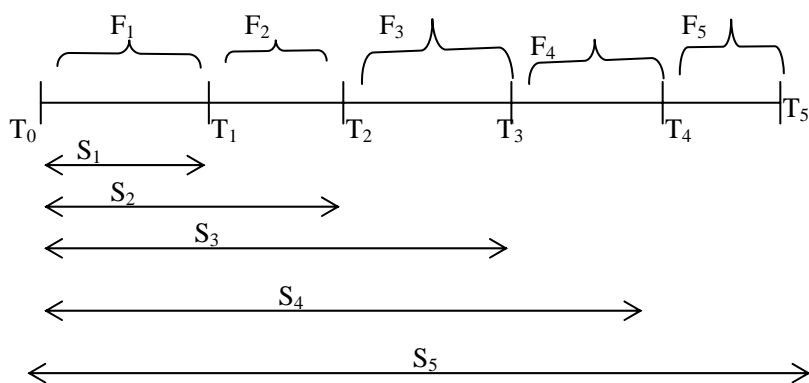


图 3-1 即期利率与远期利率

远期利率和即期利率之间的关系可用函数式来反映。设现期为 0，终期为  $t$ 。一般来说，远期利率和即期利率的关系可用下式来定义<sup>[19]</sup>：

$$[1 + h(0, t)]^n = [1 + h(0, t-1)][1 + h(t-1, t)] \quad (3-1)$$

其中  $h(0, t-1)$ ,  $h(0, t)$  分别表示从现在开始到  $t-1$  期和  $t$  期的即期利率， $h(t-1, t)$  表示从  $t-1$  期后开始到  $t$  期末为止的 1 期利率，从 0 时刻来看，它是未来的利率，也就是说， $h(t-1, t)$  是一个远期利率。

公式 (3-1) 只适用于每年结转一次利息的情形。在一年结转多次利息的名义利率条件下，首先应该把名义利率转化为每年结转一次利息的实际利率，再运用公式 (3-1) 计算远期利率。

## 二、收益率曲线与即期利率曲线

利率的期限结构是指具有相同的信用风险和不同的到期期限的金融利率模式,这种模式反映每期利率随着期限变化而变化的情况。若设现期为 0, 终期为  $t$ , 那么从现在开始, 到  $t$  期末止, 这跨度为  $t$  期的每期收益率水平用  $h(0,t)$  表示, 则  $h(0,1), h(0,2), \Lambda, h(0,t)$  称为现时 (0 时刻) 的利率期限结构, 利率的期限结构是一个静态函数。若用横轴表示期限, 纵轴表示收益率, 反映它们关系的图形就称为收益率曲线。收益率曲线是描述利率期限结构的重要工具。收益率曲线是固定收益证券分析的核心概念, 作为利率基准, 它在市场大势判断、债券产品定价、套利机会的发现等方面都起着基本的作用, 是债券投资者必不可少的工具。

市场参与者对于利率期限结构的传统理解是采用收益率曲线, 作为债券估值的基础, 但由于债券息票利率的作用与影响, 收益率曲线并不能令人满意地衡量出市场参与者所需要的收益与期限之间的关系, 相同期限的债券实际上可以提供不同的收益率。目前国际上通用的方法是采用即期利率曲线作为债券价值分析的基础。

即期利率曲线是根据即期利率与期限之间的对应关系所作的图形。由于零息债券的到期收益率就是即期利率, 所以利率期限结构实际上是指在某个时点不同期期限的零息票债券的利率的集合。设由零息债券得到的  $T$  期到期收益率序列为:

$$r_1, r_2, \Lambda, r_T$$

这就是所要寻求的利率的期限结构。任何债券都可以看做是一揽子零息债券的组合, 其价值等于所有零息债券的总和。理论上的国债即期利率曲线可以由国债收益率曲线推出。

在债券市场上, 投资者不知未来年份短期利率的变化情况, 他们能够知道的是媒体公布的债券价格与到期收益率, 但根据即期收益率曲线的形状, 再运用即期利率和远期利率的关系可以推断出未来的远期利率, 从而



预测利率的变动方向，追踪债券价格的变动趋势，由此可见利率期限结构是进行债券投资中利率风险管理的基础工具，在这里对它的分析是为后面讨论利率风险的度量和规避作一铺垫。

需要注意的是，各种期限的即期利率不是一个能够直接观察的市场变量，而是一个需要用现金流折现法，对市场数据进行分析得到的利率。精确地构造利率期限结构技术难度较大。在计算机技术还不发达的时候，人们一般是按一组债券的市场报价所对应的到期收益率，画出相应的散点图，然后用手工绘图的方法把他们连成一条曲线。比手工绘图更精致一些的做法是，用 Excel 或其它工具进行拟合。这样做虽然简便易行，但结果的正确性没有保证，在很多情况下，会造成投资者的判断失误。准确而稳定的收益率曲线模型，是精确定价的保证，是债券投资者在市场竞争中获胜的重要武器。如何建立一个稳定的数学模型，准确、合理地计算即期利率，是一个值得深入探讨的问题。<sup>①</sup>

### § 3.2 传统的利率期限结构理论

债券是一种典型的利率产品，债券投资管理的理论和利率理论从来就没有分开过。在现实中，期限不同的债券所提供的收益率会有差异，为了更好地了解利率的运动，有必要探讨利率运动的过程及理性投资者的行为，这有助于解释在一定期限内收益曲线的变动。

一般而言，即使在风险、流动性、税收特征等方面相同的债券，期限不同的债券利率也会有所不同，再加上影响利率运动的其它因素的作用，使得收益率曲线的形状也有几种情况。大量的实证研究得出，收益率曲线的形状主要有向上倾斜、平缓或向下倾斜（反转）三种情况。当收益率曲线向上倾斜时，长期利率高于短期利率，即对所有的  $t$ ， $h(0,t) > h(0,t-1)$ ；

---

<sup>①</sup> 随着中国债券市场近几年来不断升温，收益率曲线这个债券分析的核心工具也日益受到重视。郑振龙、林海利用息票剥离法和样条估计法对我国市场的利率期限结构进行了静态估计。<sup>[28]</sup>

当收益率曲线平缓时，长期利率等于短期利率，即对所有的 $t$ ， $h(0,t) = c$ （常数）；当收益率曲线向下倾斜时，短期利率高于长期利率，即对所有的 $t$ ， $h(0,t) < h(0,t-1)$ 。收益率曲线的形状除了以上三种外，还有一种是先扬后抑型的，即存在某一时点 $t^*$ ，使得 $t < t^*$ 时，有 $h(0,t) > h(0,t-1)$ ，而当 $t > t^*$ 时，有 $h(0,t) < h(0,t-1)$ ，这就是通常被称做驼峰式的利率期限结构。一般来讲，收益率曲线大多是向上倾斜的，偶尔也会呈水平状或向下倾斜。在任意时点，三个主要因素影响收益率曲线的形状：（1）市场对未来利率走向的预期；（2）存在于债券收益中的流动性溢价；（3）市场的不完全阻碍资金在长期与短期市场间的流动。根据三个因素中哪个因素占主导地位的不同，有三中利率期限结构理论从不同的角度对收益率曲线形状产生及收益率随时间变化的原因做了一些有效的解释。纯粹预期假设、流动性偏好假设及期限偏好假设是三种主要的传统利率期限结构理论。

### 一、纯粹预期假设

纯粹预期假设首先是由伊文·费雪（Irving Fisher）于1896年提出的，是最古老的，也是最著名的和最容易应用的定量化的期限结构理论<sup>[2]</sup>。该理论中隐含着以下几个前提假设：（1）投资者对债券的期限没有偏好，其行为取决于预期收益的变动。如果一种债券的收益低于另一种债券，那么，投资者将会选择后者。（2）所有市场参与者都有一致的预期。（3）在投资者的资产组合中，期限不同的债券是完全替代的。（4）完全替代的债券具有相等的预期收益率。（5）金融市场是完全竞争的<sup>[16]</sup>。按照预期假设理论，远期利率等于市场整体对未来短期利率的预期。纯粹预期理论认为，收益曲线的形状是由预期所决定的。梅塞门尔（Meiselman）检验了利率的期限结构，发现只要事实证明投资者先前的估计不正确，他们就会改变对未来的预期。收益曲线向上倾斜表明投资者预期短期利率将变高，而收益曲线向下倾斜表明投资者预期短期利率将变低。如果投资者预期短期利率保持

不变, 收益曲线应该是平滑的。既然收益曲线已经隐含了预期的短期利率, 那么对投资者而言, 不论其所投资的债券期限长短, 投资取得的单一时期的预期收益率相同, 也就是说, 如果某个人投资的期限为一年, 那么他投资于一年期的债券, 或是最初投资于两年期债券并在一年末出售债券, 或是投资于五年期债券并在一年末出售债券, 他们之间不存在任何差别。根据这一理论, 我们可以计算出一个预期的短期利率数列。反过来, 作为一个整体, 它们可以产生收益曲线所表示的任何给定期限的市场利率。若收益率是按复利计算的用公式可以表示如下:

$$[1 + h(0,t)]^t = [1 + h(0,1)] \cdot [1 + h(1,2)] \cdot [1 + h(2,3)] \cdots [1 + h(t-1,t)] \quad (3-2)$$

其中,  $h(0,t)$  表示从现期开始  $t$  期的零息票利率。 $h(t-1,t)$  表示从时点  $t-1$  到  $t$  期间的隐含远期利率。在这里是把零息票利率分解为一个隐含远期利率数列, 对于第一个短期利率, 远期利率就等于零息票利率。

预期理论解释了长期利率和短期利率一起变动的的原因。一般而言, 短期利率有这样一个特征, 即短期利率水平如果今天上升, 那么往往在未来会更高。因此, 短期利率水平的提高会使人们对短期利率的预期也相应提高。由于长期利率是预期的短期利率的几何平均, 因此短期利率水平的上升也会使长期利率上升, 从而导致短期利率与长期利率同方向变动。

按照预期假说的解释, 在金融市场上, 有固定利息收入的参与者是理性的投资人, 其投资组合的内容会随着他们对市场利率变动的预测进行调整。如果预期利率水平上升, 由于长期债券的价格比短期债券的价格对利率更加敏感, 下降幅度更大, 所以投资人会在其投资组合中, 减少长期债券数量, 增加短期债券的持有量, 从而导致短期债券价格上升, 长期债券价格下跌。反之, 如果预期利率下降, 投资人会在其投资组合中, 增加长期债券数量, 减少短期债券的持有量, 从而导致短期债券价格下降, 长期债券价格上升。

## 二、流动性偏好假设

为了将风险因素包括在利率的期限结构模型中，J. R. 希克斯 (J. R. Hicks) 对纯粹预期假设提出了修正，提出了流动性偏好假设<sup>[20]</sup>。该假设认为，由于短期债券到期而获得清偿的期限较短，所以市场变化导致的价格波动比长期债券要小，投资者认为若投资于较短期限的债券，他们将面临较小的价格风险。假设投资者都是风险回避者，他们会偏好持有短期债券，为鼓励他们购买期限更长，而风险也更大的长期债券，必须向其支付流动性溢酬，流动性溢酬就是给投资者的风险补偿。流动性偏好假设是纯粹预期假设的扩充，它表明远期利率是预期即期利率与流动性溢酬（风险升水）之和，并且流动性溢酬随期限的延长而延长。即

$$h(t-1,t) = ER_{t-1,t} + L_{t-1,t} \quad (3-3)$$

其中  $h(t-1,t)$  是远期利率， $ER_{t-1,t}$  是预期的即期利率， $L_{t-1,t}$  是从  $t-1$  刻开始到  $t$  刻为止这一段时期的流动性溢酬。因此，即使投资者预期短期利率将保持不变，收益曲线也是向上倾斜的。

## 三、期限偏好假设

期限偏好假设认同流动性偏好假设所持的观点，但它摒弃了流动性溢酬必须随期限的延长而延长的论断<sup>[21]</sup>。期限偏好假设认为，特定的投资者对特定的期限有极强的偏好，市场是由具有不同投资要求的各种投资者所组成的。不同投资者具有明显的区别，每种投资者都偏好投资于收益曲线的特定部分。像保险公司和养老金这样的投资者则喜欢投资于与保单和养老金计划责任相一致的、具有较长期限和现金流的债券，使其资产寿命与债务寿命相匹配。还有一些投资者，如商业银行，为了保证其流动性需求，通常会首先选择短期债券。这样，利率的期限结构是由每一种不同期限的债券的市场需求情况所决定的。为了吸引投资者偏离其在收益曲线上的偏好位置，就应该给他们以补偿。因此，期限偏好假设断定，如果债券期限

的供求不平衡，债券就要在预期收益的基础上溢价或折价出售。按期限偏好假设，预期的未来短期即期利率与隐含的远期利率之间没有正式关系，而且收益曲线的形状是供给和需求的函数。只有当所有投资者计划在最短的可能时间内出清其投资而所有借款人都延长其借款期限时，流动性溢酬才随期限的延长而增加。

利率期限结构的预期理论和流动性理论都认为不同期限的债券是可以互相替代的。与这两种理论不同，一种极端形式的期限偏好理论—市场分割假设将不同期限的债券市场视为独立的。该理论认为：投资者和筹资者受法律、偏好、或对特定到期的习惯等限制，存在一个分割的市场，如短期债券市场，中期债券市场，长期债券市场，而期限不同的债券市场是完全分离的，即不同期限的债券完全没有替代性。长期债券与短期债券在不同的相互分割的市场上进行交易，它们各自达到平衡。按照市场分割理论，每一种债券的即期利率取决于各自市场的供给和需求条件，不受其他不同期限债券预期收益率变动的影 响，也就是说，即使当前的利率提醒投资者和借款人只要作一个移动就会获得一个更高的预期收益，他们也不会离开原有的市场而进入一个不同的市场。该假说中隐含着这样几个前提假定：(1)投资者对不同期限的债券有不同的偏好，因此只关心他所偏好的那种期限的债券的预期收益水平。(2)在期限相同的债券之间，投资者将根据预期收益水平的高低决定取舍，即投资者是理性的。(3)理性的投资者对其投资组合的调整有一定的局限性，许多客观因素使这种调整滞后于预期收益水平的变动。(4)不同期限的债券完全没有替代性<sup>[16]</sup>。这一假定和预期假说的假定正好截然相反。

根据这一理论，一个上倾的期限结构存在于这样一个时候，即短期资金的供给和需求曲线的交点的利率比长期资金的交点的利率低。反过来，一个下倾的期限结构则出现在短期资金供求的交点的利率比长期资金的交点有更高的时候<sup>[22]</sup>。

由于各种理论都解释了另一种理论无法解释的事实，所以寻求对期限结构理论作更好理解的方法便是将几种理论的特点加以合并，这就是说不能将期限结构看作预期与风险溢价之间的一种“或者”选择。预期和风险溢价都会影响收益率曲线，因此，我们在分析收益率曲线时，应当全面考虑这两个问题。

关于利率变动还有许多尚未弄清楚的地方，因而还无法做出确信的预测，这个领域还有许多工作要做，但不同的观点仍然会存在。

### § 3.3 现代的利率期限结构理论

如何假设短期利率的演变是一门艺术<sup>[23]</sup>。利率期限结构模型的发展由简单到复杂。随着新的金融理论和产品的不断出现，以后建立的利率期限结构模型，陆续增添了一些能够反映现实的调整。当模型的复杂程度增加以后，其精确性也随之增加了。传统的利率期限结构理论主要分析了具有不同到期期限的金融资产利率之间的关系，基本上是视利率为确定的且现金流也不变化作为假设。但实际上，利率是随机地因时间变动而变动的，现金流依赖于利率水平而波动。较新的利率理论将利率的运动过程视为一种随机过程。在现实社会中，大量不确定因素时刻影响着期限结构。这些不确定因素可以是经济、政治、政策和法律等因素、甚至可以是自然因素。这种不确定性的期限结构被称为随机利率期限结构，它一般分为两种类型，即连续时间模型和离散时间模型。期限结构的连续时间模型把时间看作是一个连续变量，利率随时间而变化。最简单的连续时间模型是单因素模型，该模型将短期利率随时间的运动作为经济中不确定性的单一来源，其中较有代表性的就是考克斯-英格索尔-罗斯（Cox-Ingersoll-Ross，即 CIR）模型。利率期限结构的离散时间模型从这样的时间观开始，它假定我们可以观测到时间以明确的单位流逝，如 1 小时、1 个月或 1 年时间的的时间间隔。这些技术把注意力集中于在离散时间段的开始或结束时利率如何在观测点之间

波动。最简单的而又具有代表性的离散时间模型是二项树模型。

### 一、考克斯-英格索尔-罗斯（Cox-Ingersoll-Ross）模型

利率是金融资产的价格。从严格意义上来说，债券价格的变化过程属于离散变量的离散时间随机过程，但我们仍可把它近似为连续变量连续时间的随机过程<sup>[24]</sup>。期限结构的连续时间方法把时间看作连续体，永远有事情在发生之中。因此，在任何时间段，利率都可能正在变动，有时候正如预期的，而有时候则不是。

经济学家考克斯（J.C.Cox）、英格索尔（J.E.Ingersoll）和罗斯（S.A.Ross）于 1981 年在题为《对利率期限结构传统理论的重新检验》<sup>[25]</sup>一文中用一般均衡的分析方法对利率结构问题进行了研究，并于 1985 年在《利率期限结构理论》<sup>[26]</sup>一文中提出了利率的一般均衡模型，即 CIR 模型。该模型首先对投资者偏好<sup>①</sup>和经济中的不可预测性变动进行假设<sup>②</sup>，然后，通过一些精巧的数学和经济学论证，推导出了利率期限结构运动的特性。

CIR 模型将利率期限结构视为一个随机过程，在论述经济变量和总体均衡时运用了大量的数学计算。以下是它的一种表述形式：

$$dr_t = \beta(\mu - r_{t-1})dt + \sigma\sqrt{r_{t-1}}dz \quad (3-4)$$

公式（3-4）中， $\sigma$  是利率在瞬间内变动的标准差， $dz$  代表随机误差。 $\beta$  表示即期利率的调整系数， $\mu$  表示平均利率， $r_t$  表示即期利率。其中  $dr_t \approx r_t - r_{t-1}$  表示短期利率在瞬间  $dt$  内的变动，它的运动是由两个作用力的综合影响所左右的一决定性作用力和随机性作用力。表达式（3-4）的右边第一项  $\beta(\mu - r_{t-1})dt$  是公式的决定性部分，代表着短期利率趋向移动的总

<sup>①</sup> 在寻找均衡模型时，需要明确消费者的偏好。要使建立的模型越精确，则假设的限定性就越强。所以，通常一般均衡模型在实际中应用很不方便。

<sup>②</sup> CIR 模型的主要假设：在风险中性世界中，个人从消费单一商品中取得的预期效用最大化，在实现效用最大化过程中，每个人选择最佳消费水平；财富中投资于每个生产过程的最佳比例；财富中投资于各种债券的最佳比例。

方向。 $\mu$  是短期利率变动所趋向的长期均衡利率，其目前水平与长期均衡水平之间的差用  $\mu - r_{t-1}$  来表示。表达式 (3-4) 的右边的第二项  $\sigma\sqrt{r_{t-1}}dz$  是随机性部分，它反映的是短期利率在总体趋势方向上运动时所发生的持续的、随机性的位移特征，它影响着短期利率的运动轨迹。从这一模型可以看出，利率将围绕一个均值波动。如果利率偏离平均值，那么随着时间的推移，利率将回到平均值的水平。调整系数  $\beta$  显示利率以什么速率向平均值回归，即决定利率回到平均值的时间。图 3-2 是关于 CIR 理论的直观诠释。

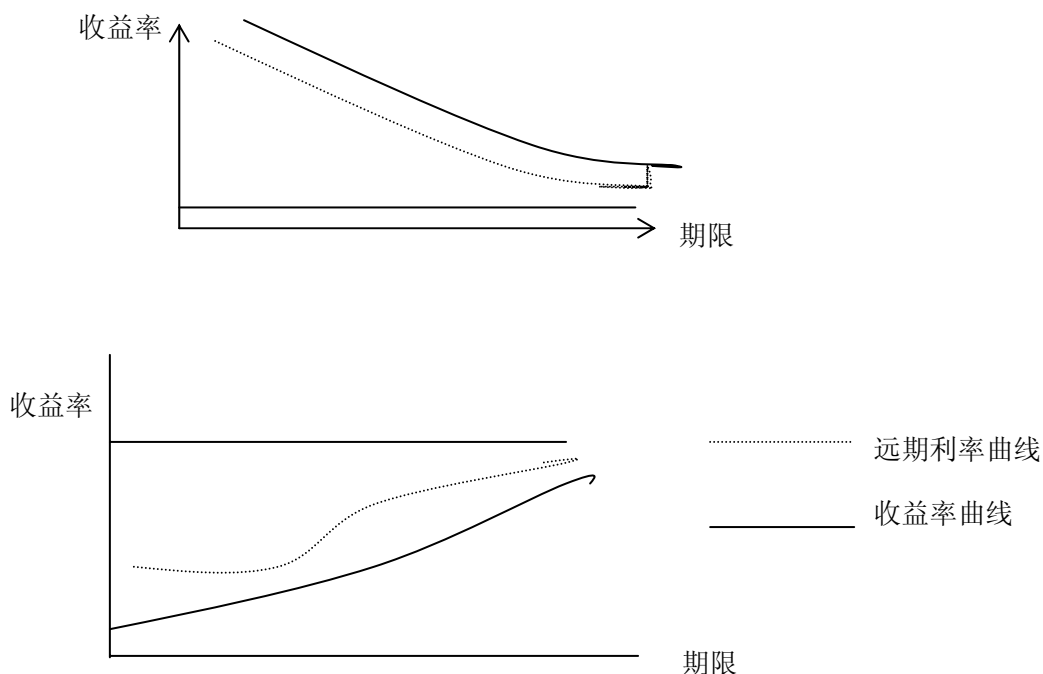


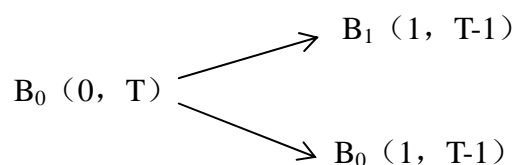
图 3-2 CIR 模型的收益率曲线图

## 二、二项树模型

最早采用二项树模型对利率期限结构进行分析的是托马斯·霍 (Thoms.S.Y.HO) 和李善宾 (Sang-bin Lee)。他们在 1986 年的《期限结构变动与利率或有债权的定价》<sup>[27]</sup>一文中提出了这一方法。该模型在基于无



套利机会的限制条件下，对债券价格从一个时期到下一个时期的变动进行定量分析。其基本假设如下：第一，市场是无摩擦的，即没有税收费用和交易成本，并且所有证券皆可分割；第二，市场是完全的，即对于没一个期限  $n$ ，都有于其对应的贴现债券存在；第三，市场是在有规则间隔的时点上出清，并非连续出清；第四，在每一时刻  $t$ ，仅存在有限种状态。建立树图的方法是，将时间上的离散点在水平轴上表示，当期和可能性未来的单期利率的水平在每个节点上标注出。在时间的每个节点上，利率被假定向上或向下变动，为了方便起见，一般假定利率向上与向下变动是等可能的。若用  $B_i(n, T)$  表示在第  $i$  种状态下，剩余到期期限为  $T$  的零息票债券在时间  $n$  的价值，则当利率上升时，该价值将向  $B_{i+1}(n+1, T-1)$  运动；当利率下降时，该价值将向  $B_i(n+1, T-1)$  运动，即



该模型采取的是局部均衡的分析方法，它假定任何阶段的利率水平，都等于前一阶段的利率水平加上或减去某种随机冲击，从而得出短期零息票利率的轨迹，再根据预期利率之贴现现金流得出每个期间的期望值。用这种分析方法得到许多个期间的利率，从而形成一个预期的短期利率结构模型。

### § 3.4 我国的利率期限结构

目前，用来估计利率期限结构的模型有两类：均衡模型<sup>①</sup>和无套利模型。均衡模型假定某个短期无风险利率服从一个特定的随机过程，根据

<sup>①</sup> 均衡模型一般是从经济体中的经济代理人所做出的最优决策角度出发，当市场均衡中的供应和需求能明确用最优化生产和消费决策来表示时，就找到了一般均衡模型。在这类模型中，相关的经济变量是输入变量，利率水平是输出变量。

市场的均衡条件推导出整个利率期限结构，如 CIR 模型。显然，通过该类模型得到的利率期限结构仅在完全市场假设前提下有意义，很难令人满意地拟合实际观测到的数据，因而较少运用于实践。而实证模型使用了曲线拟合技术来估计隐含在现实数据中的利率期限结构，比较有实用价值。在我国，由于利率市场化进程缓慢和国债市场发育不完善，估计利率期限结构有一定的难度。虽然如此，近年来，还是有学者开始采用实证模型对我国国债收益率的期限结构进行研究。

郑振龙、林海利用中国的付息国债数据<sup>[28]</sup>，分别采用息票剥离法<sup>①</sup>和样条估计法<sup>②</sup>对我国的利率期限结构进行静态的估计，得出的主要结论是：我国的利率期限结构基本上是一条稍微向上的曲线，说明长期利率高于短期利率。我国的利率变动呈现出明显的均值回归现象；长期利率和短期利率存在着同涨同跌现象。

为了分析影响中国市场利率变动的潜在因素，已有学者对中国的利率期限结构进行了主成分分析<sup>③</sup>。朱峰通过样条函数估计中国市场利率的期限结构<sup>[29]</sup>，并对利率期限结构进行了主成分分析。实证分析的结果表明，我国的利率期限结构同样可以用水平因素、斜度因素和曲度因素来进行解释。其中，水平因素对利率期限结构的影响程度是 42.63%，水平因素和斜度因素联合起来的影响程度是 73% 左右。

另有学者根据 2001 年 9 月—2003 年 9 月的 1 周、1 个月、1 季度、半年、1 年、2 年、3 年、4 年 5 年利率的周末数据进行主成分分析，研究的结果见表 3-1 和图 3-3。

从图 3-3 可以看出，因素 1 的变化非常平稳，体现的是水平因素对利率变动的影响；因素 2 向上倾斜，代表斜度因素对利率变动的影响；因

<sup>①</sup> 由于在中国债券市场上，大部分债券都是息票债券，零息票债券的数量很少，因此需通过一定的方法对这些息票进行处理。息票剥离法就是将息票从债券中分离出来，并在此基础上估计无息票的利率水平的一种方法。

<sup>②</sup> 样条估计法主要通过一个贴现函数将不同时期的息票和本金贴现到现在，通过这些贴现总值和当前债券价格的拟合对贴现函数进行估计，从而得出不同期限的利率水平，推导出利率期限结构。

<sup>③</sup> 从数学角度来看，主成分分析就是将一组  $m$  个相关变量转变为一组正交变量，这些正交变量能够复制在相关结构中出现的原始信息。主成分分析的目的在于用由未观察到的隐含变量组成的较小集合来解释观察到的变量行为。

素 3 先下降后上升，体现了曲度的影响。

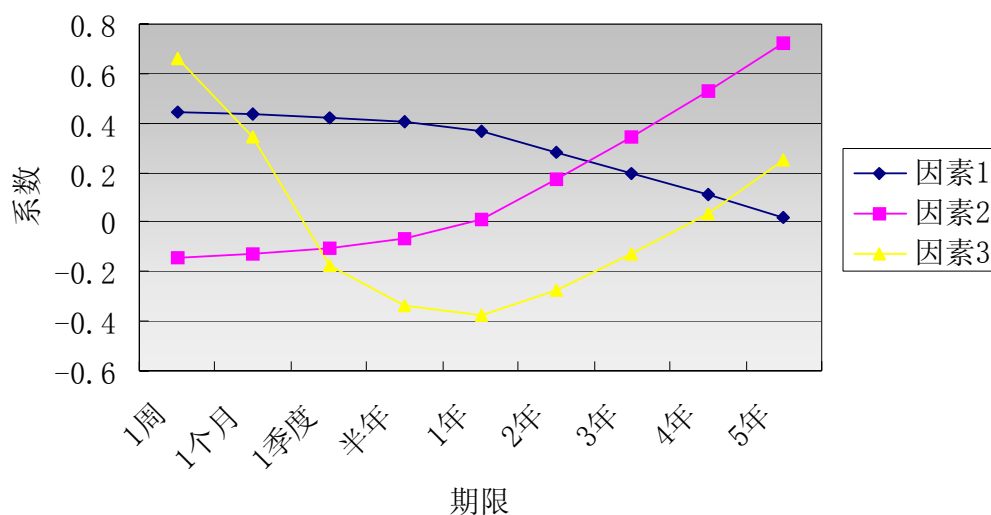
由表 3-1 可以得出，若从方差贡献率的角度来考虑利率变动的影响因素，则对利率变动影响最大的是水平因素，贡献率达到了 95.56%。主成分分析为包含平行风险和非平行风险在内的债券套期保值提供了理论根据<sup>[30]</sup>。

表 3-1 中国利率期限结构的主成分分析：2001-2003

时间	因素 1	因素 2	因素 3
1 周	0.4466	-0.1473	0.6601
1 个月	0.4394	-0.1314	0.3421
1 季度	0.4248	-0.1041	-0.1765
半年	0.4028	-0.0667	-0.3398
1 年	0.3638	0.014	-0.3778
2 年	0.2834	0.1733	-0.2773
3 年	0.1982	0.3452	-0.1297
4 年	0.1121	0.5285	0.0359
5 年	0.0177	0.7191	0.2507
方差贡献率	95.56%	4.17%	0.22%

资料来源：林海、郑振龙.《中国利率期限结构：理论及应用》，中国财政经济出版社，2004，p.146.

图3-3 利率期限结构的主成分分析：2001—2003



资料来源：林海、郑振龙.《中国利率期限结构：理论及应用》，中国财政经济出版社，2004年4月，p.147.

以上的实证研究说明，我国的利率期限结构是一条稍微向上的曲线，

而且利率曲线的变动形式也主要是水平移动。这意味着，在我国的债券市场上，使用久期匹配策略就可以较好地实现套期保值目标。

## 第四章 债券的利率敏感性分析

为什么要进行利率敏感性分析？在第二章中已经指出了投资债券要承担利率风险，并且长期债券比短期债券对利率风险更为敏感，出于交易和保值的目地，需要衡量价格的敏感性。具体来说衡量债券价格因为利率变动而产生的变动主要有以下的用途：第一，投资者对于未来的利率发展可能有某种特定的看法，他需要知道如何选择该种情况下表现最佳的证券。比如某位投资者认为，所有期间的即期利率在未来一个月内都会下跌，那么是选择 30 年期的抵押贷款债券呢还是 10 年期的零息票债券呢？这就需要清楚在预期的利率走势下，这两种债券价格的上涨幅度如何。第二，是衡量价格的波动程度。厌恶风险的投资者希望知道，在利率的合理变动范围内，债券价格如何波动。第三，是在资产—负债的管理方面。在某些情况下，资金的收入会产生对应的负债。如保险公司收取保费，并投资于许多固定收益的证券。资产—负债的管理人需要了解其资产与负债对于利率变动的敏感程度。

用什么指标来度量债券价格对利率变动敏感性？在第二章中已经得出影响利率风险大小的一个决定因素是债券的到期期限，期限是影响债券利率风险的一个重要来源，但是债券关于利率风险的敏感性仅用期限这个估计手段是不精确的，正如约翰·马歇尔指出<sup>[31]</sup>，到期期限并不是影响债券价格对收益率变动的敏感性的唯一因素，还有四项因素起作用，它们是：（1）债券的息票利率；（2）利息支付的频率；（3）债务本金摊还的速度；（4）债券当期的收益率值。下面再举一个例子来进一步说明这个问题。

在现实生活中，人们的常识总是认为，债权价格的变化受到债券期限长短的影响，较长期限的债券价格的变动要大于较短期限的债券价格的变动，所以期限长的债券其利率风险高于期限短的债券的利率风险。然而，

如果考虑债券的票息率的影响，上述结论则不正确。即对于两个其他条件完全相同，只有到期时间不同的债券，到期时间较长的债券，其利率风险未必就大。这个结论可以通过计算得到验证。

设息票率均为 5% 的债券 A 和 B，到期时间分别是 20 年和 40 年，一年支付一次利息。若初始到期收益率为 15%，债券 A 和 B 的价格分别是 37.41 元和 33.58 元。如果到期收益率下降为 14%，则其价格分别上升到 40.39 元和 36.06 元，债券 A 的价格变化幅度 7.97% 大于 B 的价格变化幅度 7.39%；如到期收益率上升为 16%，债券 A 的价格变化幅度的绝对值 7.03% 大于债券 B 的价格变化幅度的绝对值 6.40%。见表 4-1。

表 4-1 息票率为 5% 的债券价格变动

到期收益率 (%)	T=20 年	T=40 年
15	37.41	33.58
14	40.39 (价格变化 7.97%)	36.06 (价格变化 7.39%)
16	34.78 (价格变化 -7.03%)	31.43 (价格变化 -6.40%)

从表 4-1 的数据比较中可以看出，仅用债券的到期时间并不足以测度债券的利率风险，甚至会产生完全歪曲的结论。期限度量，忽视了债券中间时期的现金流，仅仅是关注到期时的最后支付，而利息支付及利息收入的再投资对于利率风险是重要的，特别是票息高的债券比那些票息低的债券对利率的敏感性要低，因为持有高息票债券的投资者比持有低息票债券的投资者可更快收回投资。若使用债券的平均到期时间来衡量债券的利率风险，效果也不好，因为它没有考虑到不同时间的付款所包含的时间价值。为了解决债券多次支付的“期限”含糊不清的问题，弗雷德里克·麦考莱 (Frederick Macaulay) 与 1938 年首次提出了久期 (duration) 的概念<sup>①</sup>，

<sup>①</sup> Frederick R. Macaulay, Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1856, New York, National Bureau of Economic Research, 1938.

这一概念在他提出几十年后，才被广泛接受和使用。

久期将债券的到期时间、息票率和利率水平三者综合起来研究利率变动对固定收益类证券价格的影响，它既考虑到期末的又考虑到期间的现金支付情况，避免了仅将债券期限作为影响债券价格变动幅度的唯一因素的局限性。这种度量可以让人评价具有不同现金流方式的债券的相对承担利率风险的成分。

## § 4.1 久期和利率敏感度

### 一、久期计算公式

麦考莱 (Macaulay) 久期作为衡量利率风险的指标，是在非常严格的假设之下推导而得出来的，仅适用于现金流量固定的债券，并假设收益率曲线是水平的而且曲线是平行移动的，即所有期限的收益率同时产生相同的变动。用久期来衡量价格的波动性是依据数学中一个众所周知的原理：函数值的变化可用该函数的一阶微分来估计。债券的价格是收益率的函数，所以依据这一原理可推导出久期的计算公式：

在公式 (2-1) 两边求债券价格对到期收益率的导数，得到：

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dy} &= \frac{(-1)C}{(1+y)^2} + \frac{(-2)C}{(1+y)^3} + L + \frac{(-n)C}{(1+y)^{n+1}} + \frac{(-n)M}{(1+y)^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{1+y} \left[ \frac{C}{1+y} + \frac{2C}{(1+y)^2} + L + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n} \right] \end{aligned} \quad (4-1)$$

在 (4-1) 两边同除以 P，得到

$$\frac{dP}{dy} \cdot \frac{1}{P} = -\frac{1}{1+y} \left[ \frac{C}{1+y} + \frac{2C}{(1+y)^2} + L + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n} \right] \cdot \frac{1}{P} \quad (4-2)$$

(4-2) 式中的括号部分被价格除就称为麦考莱久期，即：

$$D = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{1+y}{P} = \left[ \frac{C}{1+y} + \frac{2C}{(1+y)^2} + L + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n} \right] \cdot \frac{1}{P}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+y)^t} \cdot t}{P} \quad (4-3)$$

若记  $w_t = \frac{C_t(1+y)^{-t}}{P}$ ，则得

$$D = \sum_{t=1}^n w_t \cdot t \quad (4-4)$$

$w_t$  表示与每一期支付相关的权重，它等于各期现金流的现值占债券总现金流现值的比例。久期以年为测度单位。一般说来，如果现金流动每年发生  $m$  次，需要利用所求的结果除以  $m$  使久期调整为年数。

投资者通常把麦考莱久期和  $(1+y)$  的比叫做修正久期<sup>①</sup> (modified duration)，也就是表达式 (4-2)，一般记作 MD。即

$$MD = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{1}{P} = \left( -\frac{1}{1+y} \right) \cdot D \quad (4-5)$$

当收益率发生微小变动时（一般是  $\Delta y \leq 100bp$ ），可以认为  $\Delta y \approx dy, \Delta P \approx dP$ ，那么，由 (4-5) 式可以得到

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -\frac{D \cdot \Delta y}{1+y} \quad \text{即}$$

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -MD \cdot \Delta y \quad (4-6)$$

上式用文字可以表述为：

<sup>①</sup> 若债券的价格是按连续复利计算的，即  $P = \sum_{t=1}^n C_t \cdot e^{-yt}$ ，则有  $\frac{dP}{dy} = -\sum_{t=1}^n t \cdot C_t \cdot e^{-yt}$ ，从而，  
 $D = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{1}{P} = \frac{-\sum_{t=1}^n t \cdot C_t \cdot e^{-yt}}{P}$ ，这里就不需要对久期进行修正了。



$$\text{价格变化的百分比} \approx -\frac{\text{久期} \times \text{到期收益率变化}}{1 + \text{到期收益率}} \quad (4-7)$$

或者是

$$\text{价格变化的百分比} \approx -\text{修正久期} \times \text{到期收益率变化} \quad (4-8)$$

修正久期 MD 实际上是债券的价格对利率  $y$  变化的弹性，它给出了收益率微小变动所引起的价格变化百分比的近似值，也可以理解为利率变动 100 个基点时所引起的价格变动百分比的近似值。价格变化的百分比是比价格变化的绝对值更有意义的指标。(4-6) 式说明了债券价格的易变性与其修正久期成比例，负号的含义是债券价格的变化方向与收益率的变化方向相反。所以久期便成为利率风险暴露程度的自然测度。例如，当债券的修正久期为 3 时，市场利率每上升 0.1%，债券价格将下降 0.3%。

债券组合的久期就是投资组合中每只债券久期的加权平均数，权重是每只债券的市值占组合总市值的比例。即对于一个由  $M$  种债券构成的债券组合， $w_j$  表示第  $j$  种债券的市值占组合总市值的比例， $D_j$  表示第  $j$  种债券的久期，则组合的久期  $D_p$  为

$$D_p = \sum_{j=1}^M w_j D_j$$

久期的可加性的证明见本章附录。

## 二、久期的近似计算公式

久期的近似计算公式<sup>①</sup>如下：

$$D \approx \frac{P_- - P_+}{2P_0 \cdot \Delta y} \quad (4-9)$$

其中： $P_-$ =收益率下降  $\Delta y$  时债券的价格， $P_+$ =收益率上升  $\Delta y$  时债券的价格<sup>②</sup>，

<sup>①</sup> 当公式中的价格是由随收益率变动而变动的现金流推导出时，得到的久期是有效久期 (Effective duration)，用来度量嵌有期权的债券的价格的敏感性。

<sup>②</sup> 为了使用公式 (4-9)，必须有一个好的定价模型来得到收益率变动后债券的新价格。久期是定价模型的副产品，如果定价模型不合理，所得出的久期估算值也将不合理。

$P_0$ =债券的初始价格,  $\Delta y$ =收益率的变化。

### 三、久期的性质

债券价格对市场利率变动的敏感性受三个主要因素的影响: 息票利率、到期时间和到期收益率。这些决定价格敏感性的因素对于债券投资组合管理十分重要, 现在结合表 4-2 (假设到期收益率为 9%, 表中的久期是按半年期计算的, 被 2 除就得到以年计的久期) 和公式 (4-3) 来讨论这些因素对久期的影响。

表 4-2 六种假设的债券的久期

债券	D (以年计)	MD (以年计)
9%/5 年	4. 13	3. 96
9%/25 年	10. 33	9. 88
6%/5 年	4. 35	4. 16
6%/25 年	11. 10	10. 62
0%/5 年	5. 00	4. 78
0%/25 年	25. 00	23. 92

资料来源: (美)弗兰克.J.法博齐著.《投资管理学》(第二版) [M]. 北京: 经济科学出版社, 1999, p566.

由表 4-2 的数据可以得到以下结论: 首先, 当其他因素不变时, 没有选择权的息票债券的期限越长, 则其麦考莱久期和修正久期也越长, 并短于它们的到期期限。再者, 如到期时间相同, 则息票利率较低的债券和息票率高的债券相比前者的麦考莱久期和修正久期较大。正如表 4-2 中所反映的, 同是 5 年期的债券, 若息票率为 9%, 其麦考莱久期和修正久期分别是 4.13 年和 3.96 年; 若息票率为 6%, 其麦考莱久期和修正久期分别是 4.35 年和 4.16 年。最后, 由表 4-2 可以很容易得出, 零息票债券的麦考莱久期等于其偿还期限, 而它的修正久期比其偿还期限短。

在前面讨论债券价格的波动特征时已指出, 当其他因素不变时, 偿还期越长, 价格波动性越大; 息票利率越低, 所有其他因素不变时, 债券的价格波动性越大。表 4-2 显示了债券价格波动特征和修正久期之间的一致性。

#### 四、我国国债的价格波动和久期的关系

实证研究表明，国债收益率曲线主要有两种变化形式，一种是收益率曲线的平移，即各种期限的国债收益率曲线同时发生等规模的涨跌，这种情况通常代表了宏观利率水平的变化；一种是收益率曲线斜率的变化，变得更陡峭或者更平坦，这种情况通常表示国债市场内部长短期券种收益率比较关系的相对变化，和宏观利率水平的变化无关。我国金融市场相对初级，国债收益率曲线的变化主要以平移为主，从理论上来说，用久期这一指标应可以很好地反映债券价格对利率变动的敏感性。

2004年7月1日有关定息国债的剩余期限和久期的数据如表4-3所示（以下讨论都是对每年付息一次的固定票息率债券而言的，研究对象是修正久期）。

表 4-3 沪市定息国债的剩余期限和久期

交易代码	简称	收盘全价	修正久期	剩余年限
000696	96 国债(6)	118.0610	1.8126	1.956
009704	97 国债(4)	127.5116	2.6501	3.184
009908	99 国债(8)	96.8905	4.5494	5.233
010103	21 国债(3)	98.4092	3.4919	3.816
010107	21 国债(7)	95.0424	11.3337	17.085
010110	21 国债(10)	91.3549	6.1291	7.238
010112	21 国债(12)	91.5489	6.1990	7.334
010115	21 国债(15)	96.3027	4.0024	4.468
010203	02 国债(3)	86.2350	6.7516	7.800
010210	02 国债(10)	92.3688	4.5570	5.129
010213	02 国债(13)	78.6937	10.3411	13.225
010214	02 国债(14)	98.1951	3.0452	3.318
010215	02 国债(15)	93.8617	4.7834	5.436
010301	03 国债(1)	91.2920	5.0083	5.641
010303	03 国债(3)	81.9486	12.6808	18.797
010307	03 国债(7)	91.5356	5.3257	6.140
010308	03 国债(8)	88.8746	7.5102	9.216
010311	03 国债(11)	95.9279	5.4371	6.389

资料来源：<http://finance.sina.com.cn/stock/bond>

在到期收益率波动幅度一定的条件下，债券久期越长，则价格波动比例越大，投机性越强。事实上，美国国债市场的 30 年期券种是最热门的投机工具之一。上海证券交易所现在有 20 年期的券种挂牌，如国债 010107；银行间市场已有 30 年期券种交易，即金融债 010221。这些券种的价格变化可以用“无风三尺浪”来形容，更不用说当市场利率发生明显变化的时候了。

2004 年 7 月 1 日，010107 的剩余期限为 17.085 年，久期为 11.3337 年，收盘全价为 95.0424 元。假定市场利率变化 0.1%，则其价格波动比例为  $0.1\% \times 11.3337 = 1.13337\%$ ，价格波动的绝对金额为  $1.13337\% \times 95.0424 \approx 1.0772$  元。以债券市场波动的一般水平来说，这是惊人的价格幅度。

为了说明债券价格波动和久期的关系，现在来估算国债 010203 和 000696 的价格波动比例和绝对金额。假定市场利率变化 0.1%，国债 010203 价格波动比例为  $0.1\% \times 6.7516 \approx 0.6752\%$ ，绝对金额为  $0.6752\% \times 86.2350 \approx 0.5823$  元。国债 000696 的价格波动比例为  $0.1\% \times 1.8126 \approx 0.1813\%$ ，绝对金额为  $0.1813\% \times 118.0610 \approx 0.2140$  元。这表明，债券的剩余期限越长，久期越大，从而价格的波动性也越大。

长期国债大幅度的价格波动性一方面给投资者带来了极高的资本利得的机会，开辟了国债市场短期炒作的渠道；另一方面，也给投资者带来了很大的价格波动风险。市场风险的显现，有利于投资者走向成熟并引导债券合理定价，这对我国今后债券市场的发展也具有促进作用。

## 五、久期的局限性

前面已经指出，久期是在一定的假设条件下推导出来的，因此它作为一种评价利率风险的度量指标自然有其局限性。

首先，债券的价格和收益率之间的关系并不是线性的，利用久期只能衡量利率发生微小波动时价格的变化。当收益率发生较大变化时，由于价格—收益率曲线的凸性性质，根据久期计算得到的价格变化就出现了较

大的误差，从而会导致价格变化估计值的不准确和利率风险管理的不完美套期保值。

其次，麦考莱久期和修正久期这两个计算公式是以价格公式（2-1）为基础推导出来的，而价格公式（2-1）的假设条件是，债券投资期内所有的现金流按相同的贴现率进行贴现，即久期的计算中假设收益率曲线是水平的，并且曲线的移动也是平行的<sup>①</sup>。久期把价格变化与一个特殊债券的到期收益率联系在一起，会使得久期的计算出现问题。尤其是当投资组合中的债券具有不同的到期期限，则久期无法准确估计当不同到期日的利率发生不同变化时的价格变化，这一影响尤其重要。假设麦考莱久期为 20 年的债券到期收益率变化 100 个基点，根据公式（4-6）可得麦考莱久期为 10 年到期收益率为 8% 的债券价格大约变化 9.26%，麦考莱久期为 5 年到期收益率为 7% 的债券价格大约变化 4.67%，但不能就此断言久期为 10 年的债券承受利率变化的风险约是久期为 5 年的 2 倍。现实中，长期内的利率波动波动小于短期内的利率波动，而且两者相关性并不好，有时甚至出现反向变化。在所举的例子中，久期为 10 年的债券承受利率变化的风险小于久期为 5 年的债券承受利率变化的风险 2 倍。至于小多少，决定于对整个收益率曲线上可能发生的利率变化的主观

估计。在这里，涉及到收益率曲线非平行移动的问题，其具体内容将在后面的章节中讨论。

第三，久期只在一定情况下适用。在使用久期来描述债券投资的风险时，要清楚久期的使用对象，即清楚债券是否有提前偿付的假设？是否有

<sup>①</sup> 费雪和威尔将久期定义如下：

$$D = \frac{\sum_{t=1}^m \frac{Cn}{\prod_{i=1}^n (1+r_t)} + \frac{Am}{\prod_{i=1}^m (1+r_t)}}{\sum_{t=1}^m \frac{C}{\prod_{i=1}^n (1+r_t)} + \frac{A}{\prod_{i=1}^n (1+r_t)}}$$

其中 C 是每次支付的票息，A 是债券的面值，m 是到期时间， $r_t$  是现金支付的相应时期的远期利率（可利用利率期限结构来计算远期利率），n 是息票支付的次数。若收益率曲线是平坦的，则所有的远期利率是相等的，那么费雪和威尔的久期定义与麦考莱的定义是等价的。费雪和威尔的久期定义避免了水平的利率期限结构的假定，但仍暗含了曲线平行移动的假设。

其他隐含期权？久期不是可以修理任何东西的锤子，它是应慎重使用的一种投资工具<sup>[2]</sup>。对于附有选择权的债券来说，收益率变动时，会导致债券的预期的现金流的变化。度量附权债券的利率风险的久期被称为有效久期<sup>[32]</sup>。

## § 4-2 凸性

### 一、凸性

前一节中讨论了在利率变化很小的条件下，利率和债券价格可通过久期以一种线性关系联系起来，这种关系给出了一个债券价格变化的近似值。然而，当利率变化较大时，这种关系将失去精确性，因为它不能体现出收益率发生较大变动时债券价格表现的凸性本质，这就需要通过凸度<sup>①</sup>调整来进行修补。下面就将债券价格收益率间的凸性关系与前文提出的债券价格的波动特征结合在一起讨论。

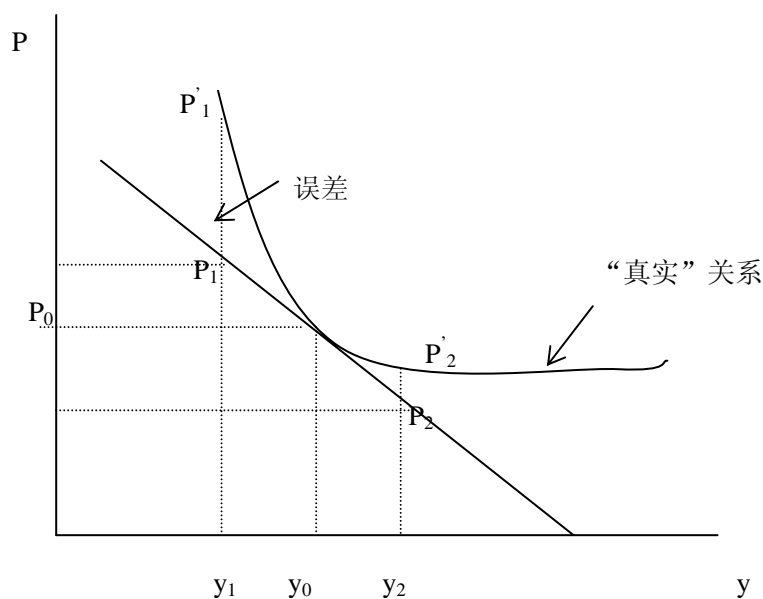


图 4-1 价格—收益率关系的凸性误差图解

<sup>①</sup> 凸性是指价格—收益率关系曲线的一般形状，凸性度量值简称凸度是指债券价格随利率变化而变动的数量大小。在实际使用中，有时两种提法也并不严格区分。

图 4-1 中, 当收益率从  $y_0$  变为  $y_1$  时, 利用久期估计的新价格为  $P_1$ ,  $P_1$  与实际价格  $P'_1$  间的距离  $P_1P'_1$  为估计误差。从这里可以看到, 当收益率降低时, 估算的价格变动小于实际的价格变动, 从而低估了实际价格; 另一方面, 从图 4-1 中可以看出, 当收益率从  $y_0$  变为  $y_2$ , 即收益率上升时, 债券价格下降, 估算的价格变动大于实际的价格变动, 从而也产生了一个低估的实际价格。这说明久期会导致对新价格的低估。价格—收益率曲线的弯曲程度越大, 收益率发生较大变化时, 用久期度量债券的利率风险所产生的误差也越大, 采取什么样的调整方法来减少这种误差呢? 数学中利用泰勒展开式进行近似的方法及曲率的概念为我们提供了解决问题的思路。

根据麦克劳林 (MacLaurin) 级数展开式:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)h}{1!} + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \Lambda + \frac{f^{(n)}(x)h^n}{n!} + \Lambda,$$

可得

$$dP = \frac{dP}{dy} \cdot dy + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2P}{dy^2} (dy)^2 + \text{误差} \quad (4-10) \text{①}$$

(4-10) 式子的两边同除以  $P$ , 得到

$$\frac{dP}{P} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{1}{P} \cdot dy + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2P}{dy^2} \cdot \frac{1}{P} (dy)^2 + \frac{\text{误差}}{P} \quad (4-11)$$

结合 (4-5) 式, (4-11) 式可以变为

$$\frac{dP}{P} = MD \cdot dy + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2P}{dy^2} \cdot \frac{1}{P} \cdot (dy)^2 + \frac{\text{误差}}{P} \quad (4-12)$$

公式 (4-12) 中的第一项是用修正久期来度量的价格变动百分比的近似值, 第二项就是价格收益率曲线的凸性关系所引起的价格变动百分比

① (4-10) 式之所以取到前二项, 是因为当  $\Delta y$  较小时,  $(\Delta y)^n$  ( $n > 2$ ) 会更小, 求近似值时, 后面的项可忽略不计。

的近似值。由凸性引起的价格变动百分比的一个度量值，简称为凸性度量值或凸度，即

$$\text{凸性度量值} = \frac{d^2P}{dy^2} \cdot \frac{1}{P}$$

则凸性引起的价格变化百分比可表示为

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{2}(\text{凸性度量值})(dy)^2 \quad (4-13)$$

(4-12) 式可以近似表示为

$$\frac{\Delta P}{P} \approx MD \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \cdot \text{凸性度量值} \cdot (\Delta y)^2 \quad (4-14)$$

由 (4-1) 式可以得到

$$\frac{d^2P}{dy^2} = \sum_{t=1}^n \frac{t(t+1)}{(1+y)^{t+2}} + \frac{n(n+1)M}{(1+y)^{n+2}} \quad (4-15)$$

用 EXCEL 软件根据公式 (4-15) 计算出价格对收益率的二阶导数，再除以价格，就可以得到凸性度量值。另外，债券的凸性值还可以用下面的近似公式<sup>①</sup>来估算：

$$\text{凸性度量值} \approx \frac{P_- + P_+ - 2P_0}{P_0(\Delta y)^2} \quad (4-16)$$

公式 (4-16) 中字母的含义与公式 (4-9) 中各字母的含义相同。

需要指出的是如果现金流一年发生  $m$  次，凸度被调整为年度数值的公式如下：

$$\text{凸性年度值} = \frac{\text{每年}m\text{期内的凸性值}}{m^2} \quad (4-17)$$

债券投资组合的凸度的值就是投资组合中每只债券凸度的加权平均数，权重是每只债券的市值占组合总市值的比例。

<sup>①</sup> 当公式中的价格是由随收益率变动而变动的现金流推导出时，得到的凸度是有效凸度，该指标是对嵌有期权的债券的价格的敏感性的二阶度量。



## 二、久期和凸性测量值估计价格变动百分比近似值的比较

债券价格的实际变动是久期、凸性和误差的函数。式子(4-14)右边的第一项是债券修正久期得出的价格变动百分比，第二项是由凸度得出的价格变动百分比。要估计由久期和凸度所造成的债券价格的变化百分比，可以对两者加总。例如有一债券，面值为100元，期限为15年，年息票率为8%，初始收益率为10%，半年付息一次，它的久期是8.45年（以半年计是16.8989，以年计是8.45），修正久期是 $\frac{8.45}{1.05} = 8.05$ 年，凸度是94.36。

若初始收益率为10%，价格为84.678元，现在收益率上升到13%，则价格下降为67.353元，价格实际下降幅度为20.64%。根据久期计算出的价格变化的百分比是： $-8.05 \times (0.03) = -0.2415 = -24.15\%$ 。由凸性引起的价格变化的百分比是： $0.5 \times 94.36 \times 0.03^2 = -0.0425 = 4.25\%$ 。由久期和凸性估计出的价格变化幅度合计为-19.90%，与实际的价格变化幅度20.64%之间的误差为0.74%；与仅由久期估计出的价格变化幅度之间的误差为3.51%。

见表4-4。

表4-4 收益率上升300bp时久期和凸性估计出的价格变化

债券价格变化基础	价格变化的估计百分比(%)
久期	-24.15
凸性	+4.25
合计	-19.90

若收益率下降到7%，价格上升为109.196元，实际的价格变化为28.95%。表4-5反映的是收益率从10%降为7%的情形。这里由修正久期和凸性估计出的价格变化幅度合计为28.40%，与实际的价格变化幅度28.95%之间的误差为0.55%；仅由修正久期估计出的价格变化幅度为24.15%，与实际的价格变化幅度28.95%之间的误差为4.80%。

表 4-5 收益率下降 300bp 时用久期和凸性估计出的价格变化

债券价格变化基础	价格变化的估计百分比 (%)
久期	+24.15
凸性	+4.25
合计	+28.40

在前文中，用图 4-3 直观地解释了仅用久期度量债券价格对利率变动的敏感性，会低估债券的价格。这里，通过表 4-4 和表 4-5 的计算结果与实际价格变化的百分比对照，进一步地说明，对于大幅度的收益率变化，只用久期对债券的新价格进行估计，会产生太大的误差，也就是说，这种估计方法在收益率变化幅度较大时是失效的。当收益率发生较大变化时，债券价格的变化幅度通过加总久期和凸性导致的价格变化的两个部分可以得到一个较为准确的估计。在该例中，收益率上升 3% 时，价格下降 20.64%，而收益率下降 3% 时，价格上升 28.95%，这又一次验证了前面讨论的债券价格变化的特征，即债券到期收益率的上升导致其价格下降的幅度小于收益率等规模降低相对应的价格上升的幅度，换句话说就是由相同幅度的到期收益率的绝对变化带来的价格变化是非对称的。

### 三、凸性的特征及其应用

根据凸度的计算公式，可以得出未附选择权的债券的凸性具有如下特征：市场收益率上升，凸性下降；市场收益率下降，凸性上升，这一特征被称为正凸性。从数学角度讲，凸性是价格对利率的二阶导数，是衡量价格曲线的斜率本身因收益率变动而产生的变动。斜率的变动是衡量价格曲线的弯曲程度的<sup>①</sup>。

从图 4-1 中可以看到，收益率上升时，曲线的切线较为平缓，而收益

<sup>①</sup> 对于久期和凸度，金融界和物理界还存在一个有趣的对比。久期在价格/收益空间正好与速度在时间/位移空间中类比。久期是价格对收益的导数，速度是位移对时间的导数。久期是价格对于收益率变化的导数，凸度正好类比于加速度。

率下降时，曲线的切线较为陡峭。这表明，利率下降时，债券价格将以加速度上升；当利率上升时，债券价格将以减速度下降。这样无论在利率上升还是下降的环境中对投资者来说都有好处。

债券的凸性特征会影响投资者的行为。两个具有相同久期和相等的到期收益率的债券，凸性较大的债券投资绩效更优，正的凸性表示你会赢而赢得的量将大于你会输而输掉的量，但市场通常会因为较大的凸性而索取高价。投资者是否愿意以高成本投资于凸性大的债券，这取决于其对市场利率波动幅度的预期。

债券价格与利率关系的弯曲度—凸性将随着期限的增长而增长。短期债券表现出适度的凸性，长期债券凸性较大。凸性将随着票息降低而增大，随着票息上升而降低。债券价格与利率关系的曲线在低利率部分更加弯曲，即低利率水平下的凸性大于高利率水平下的凸性，因此，基于久期的估计在高利率环境下都要比低利率环境下更好。当利率变化很小时（一般认为， $\Delta y \leq 100bp$ ），基于久期的估计对各种条件下的债券价格变化都很有效，事实上短期内（通常指的是1个月内）利率的变化几乎总是小于100个基点。

### § 4-3 对久期的再讨论

在收益率曲线是平行移动的假设条件下，久期作为价格敏感性的衡量指标有其局限性，若使用收益率平行移动之外的假设，便可以提高久期作为利率风险度量方法的潜力。如果利率的期限结构不是水平的，且利率的变化是其期限结构形状的变化，久期的计算公式又是怎样的呢？下面就来讨论利率变动为随机过程时的久期计算公式。

#### 一、利率为随机过程下的久期<sup>[33]</sup>

设利率可以用随机过程  $f(\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_n, t)$  来表示，其中  $\theta_j$  表示第  $j$  个随机变量，且它不能被其它  $n-1$  个随机变量  $\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \Lambda, \theta_n$  线性表示。如

果以利率发生变化的时刻为 0 时刻,那么变化前的利率的期限结构为:

$$h_0(0,t) = f(\theta_{10}, \theta_{20}, \Lambda, \theta_{n0}, t) \quad (4-18)$$

它是一个样本函数,唯一依赖于  $t$ ,即在  $\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{n0}$  取定情况下,利率仅随期限  $t$  的变化而变化。相应的变化后的利率期限结构为:

$$h(0,t) = f(\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_n, t)$$

于是发生随机变动后的债券的价格为:

$$V(\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_n) = \sum_{t=1}^T F_t [1 + h(0,t)]^{-t} = \sum_{t=1}^T F_t [1 + f(\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_n, t)]^{-t} \quad (4-19)$$

其中  $F_t$  是债券第  $t$  年的收入,  $T$  是债券的期限。

久期是用来度量债券价格相对于利率变动的敏感性的,按照这个思路,在 (4-19) 式两边求全微分有:

$$dV(\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_n) = \frac{\partial V}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial V}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial V}{\partial \Lambda} d\Lambda + \frac{\partial V}{\partial \theta_n} d\theta_n \quad (4-20)$$

又

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_j} = - \sum_{t=1}^T t \cdot F_t \cdot [1 + f(\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_n, t)]^{-t-1} \cdot f_j$$

$$\text{其中 } f_j = \frac{\partial f}{\partial \theta_j}$$

于是 (4-20) 式可以表示为:

$$dV(\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_n) = - \sum_{t=1}^T \{ t \cdot F_t \cdot [1 + f(\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_n, t)]^{-t-1} \cdot \sum_{j=1}^n f_j \cdot d\theta_j \}$$

如果令

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_n), \theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \Lambda, \theta_{n0}), \text{定义 } f_{j0} = f_j \Big|_{\theta=\theta_0}, \text{ 则有}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV(\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_n)}{V(\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_n)} \Big|_{\theta=\theta_0} &= \frac{\sum_{t=1}^T \{ t F_t [1 + f(\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_n, t)]^{-t-1} \sum_{j=1}^n f_j d\theta_j \}}{V(\theta_1, \theta_2, \Lambda, \theta_n)} \Big|_{\theta=\theta_0} \\ &= - \sum_{t=1}^T \{ t F_t \frac{[1 + h_0(0,t)]^{-t-1}}{V(\theta_{10}, \theta_{20}, \Lambda, \theta_{n0})} \sum_{j=1}^n f_j \cdot d\theta_j \} \end{aligned}$$

又假定

$$f_j^* = f_j(\theta_{10}, \theta_{20}, \Lambda, \theta_{n0}, D_j), \quad (4-21)$$

这里  $D_j$  为第  $j$  个随机变量对应的久期，令其满足下式：

$$\frac{f_j^* D_j}{1+h_0(0, D_j)} = \frac{\sum_{t=1}^T t \cdot F_t [1+h(0, t)]^{-t-1} \cdot f_{j0}}{V(\theta_{10}, \theta_{20}, \Lambda, \theta_{n0})} \quad (4-22)$$

那么有

$$\left. \frac{dv}{v} \right|_{\theta=\theta_0} = - \sum_{j=1}^n \frac{f_j^* D_j d\theta_j}{1+h_0(0, D_j)} \quad (4-23)$$

通常就是按照 (4-22) 式来计算利率为随机过程下的久期的。

利用  $\Delta V \approx dV, d\theta_j \approx \theta_j - \theta_{j0}$ ,

注意到债券的原价  $V_0 = V(\theta_{10}, \theta_{20}, \Lambda, \theta_{n0})$ ，则有

$$\Delta V \approx -V_0 \sum_{j=1}^n \frac{f_j^* D_j (\theta_j - \theta_{j0})}{1+h_0(0, D_j)} \quad (4-24)$$

若给出利率的随机过程，就可以由 (4-24) 式来预测随机变量  $\theta$  的颤动所引起的债券价格的变动情况。

## 二、常见的利率随机过程<sup>[34]</sup>

### (一) 平行过程

当利率是平行变动时，收益率曲线的形状并没有改变，如图 4-2 所示。

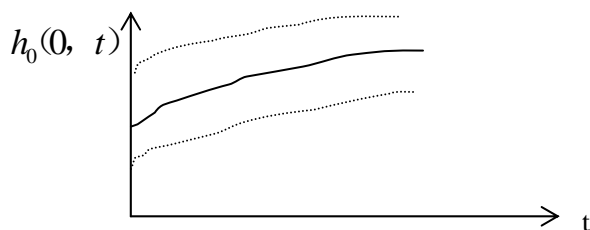


图 4-2 利率变动的平行过程

利率平行变动的过程可以用数学式子表示如下： $h(0,t) = h_0(0,t) + \theta$ ，

$\theta$  是个随机变量。根据 (4-18) 式，有  $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 1$ ，于是  $\theta = 0$  处，该随机过程

下的久期由下式给出：

$$\frac{D_A}{1+h(0,D_A)} = \frac{\sum_{t=1}^T t \cdot F_t [1+h_0(0,t)]^{-t-1}}{V_0}$$

其中  $V_0$  表示债券的原价。根据 (4-24) 式，有

$$\Delta V \approx -V_0 \cdot \frac{D_A}{1+h_0(0,D_A)}$$

## (二) 乘数过程

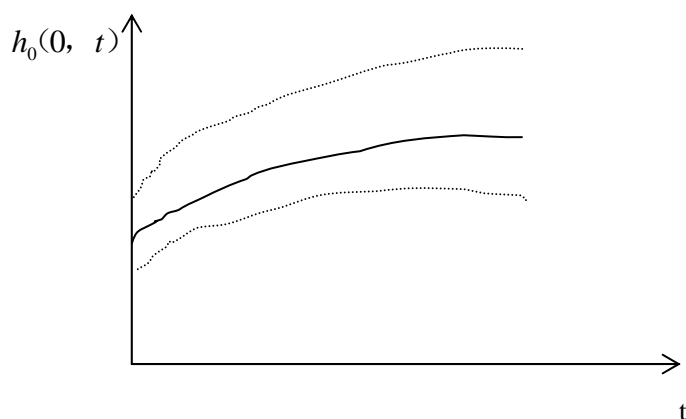


图 4-3 利率变动的乘数过程

利率变动的乘数过程是假设长期利率的变化幅度大于短期利率的变化幅度，如图 4-3 所示。它的数学表达式为： $h(0,t) = \theta \cdot h_0(0,t)$

根据 (4-18) 式，有  $\frac{\partial f}{\partial \theta} = h_0(0,t)$ ，由 (4-21) 式，得  $f_{\theta}^* = h_0(0,D_M)$ 。

这里  $D_M$  是表示在  $\theta = 1$  处，该随机过程下的久期，它由下式给出：

$$\frac{D_M h_0(0, D_M)}{1 + h_0(0, D_M)} = \frac{\sum_{t=1}^T \{t \cdot F_t [1 + h_0(0, t)]^{-t-1} h_0(0, t)\}}{V_0}$$

于是由 (4-24) 式, 利率变动为乘数过程下的债券的价格变化是

$$\Delta V \approx -V_0 \frac{D_M h_0(0, D_M)}{1 + h_0(0, D_M)} (\theta - 1)$$

### (三) 对数—平移过程

设短期利率的变化幅度总是大于长期利率的变化幅度, 如图 4—4 表示。

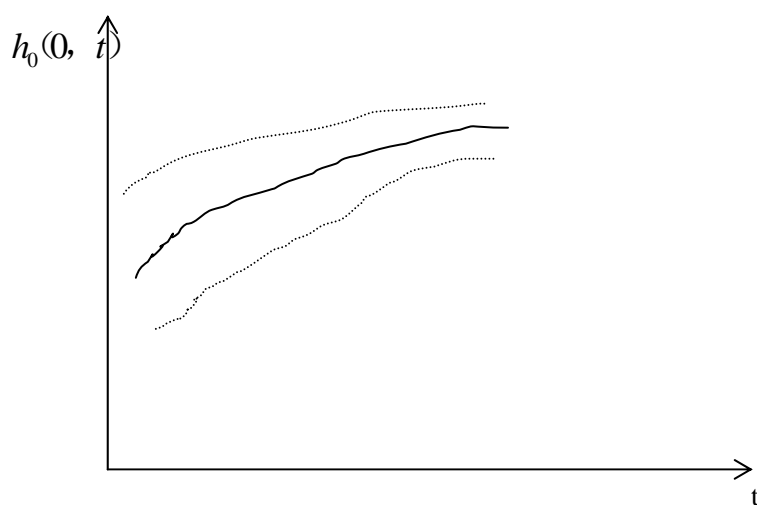


图 4—4 利率变动的对数平移过程

利率变动的对数—平移过程可以表示为:

$$h(0, t) = h_0(0, t) + \frac{\theta \ln(1 + \alpha t)}{\alpha}, \text{ 其中 } \alpha > 0 \text{ 代表短期利率改变量与长期利}$$

率改变量的比率, 由 (4-18) 式, 得  $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\ln(1 + \alpha t)}{\alpha}$ , 由 (4-21) 式, 得

$f_{\theta}^* = \frac{\ln(1 + \alpha D_L)}{\alpha D_L}$ 。这里  $D_L$  是表示  $\theta = 0$  处, 该随机过程下的久期, 由下列

表达式给出:

$$\frac{\ln(1 + \alpha D_L)}{1 + h_0(0, D_L)} = \frac{\sum_{t=1}^T \{t \cdot F_t [1 + h_0(0, t)]^{-t-1} \ln(1 + \alpha \cdot t)\}}{V_0}$$

根据 (4-24) 式, 得  $\Delta V \approx -V_0 \frac{\ln(1 + \alpha D_L)}{\alpha [1 + h_0(0, D_L)]} \theta$

#### (四) 费雪—威尔 (Fisher-Weil) 过程

这个过程是费雪—威尔 (Fisher-Weil) 于 1971 年研究利率随机过程下债券的风险规避问题时提出的<sup>[35]</sup>, 表达式如下:

$$h(0, t) = \theta - 1 + \theta \cdot h_0(0, t)$$

根据 (4-18) 式, 在  $\theta = 1$  处有  $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 1 + h_0(0, t)$ 。

根据 (4-21) 式, 有  $f_{\theta}^* = 1 + h_0(0, D_{FW})$ , 则  $D_{FW} = \frac{\sum_{t=1}^T t \cdot F_t [1 + h_0(0, t)]^{-t}}{V_0}$

从而  $\Delta V \approx -V_0 \cdot D_{FW} (\theta - 1)$ 。

以上的讨论中除了 Fisher-Weil 过程外, 其它的随机过程下的债券的久期都是由一个隐函数给出的。

在这里虽然无法详尽无遗地描述利率变化的所有过程, 但给出的几种利率随机变动情形, 却是现实世界中常见的也是比较合理的利率变化形式。

就第一种情形而言, 不管利率的期限结构呈现什么样的形状, 只要其变动是平行式的移动, 该法都适用于衡量债券价格对利率变动的敏感度, 在这里对利率变动的假设条件还是比较苛刻。从理论角度而言, 其它的利率随机模型给出的利率变动过程虽然比较切合实际利率变动的假设, 用这些模型计算出的久期来度量债券价格对利率的敏感性会更精确, 但在实际应用方面, Lan (1983) 证明<sup>①</sup>, 麦考莱久期不但使用简单, 成本低, 而且效果与用其它模型的效果几乎相同。考虑到在精确性与方便性之间取得均

<sup>①</sup> Lau, P.W.P. A Empirical Examination of Alternative Interest Rate Risk Immunization Strategies[D]. unpublished Ph.D. dissertation, University of Wisconsin, Madison, 1983.



衡，麦考莱久期法被广泛用于实务中。

#### § 4-4 我国国债价格的敏感性分析

我国新发行的国债的收益率一般以银行存款利率作参考，同时参考二级市场上剩余年限相同的国债的收益率。存款利率的数次调整，对国债的价格变动造成了一定的影响。1996年到2002年一年期个人人民币存款利率的调整如表2-6。

现选取上海证券交易所上市的国债11种，分析2002年2月21日的降息对国债价格变动的影响。此次降息发生在春节停市期间，节前最后一个交易日为2002年2月8日，节后的第一个交易日为2002年2月25日。考虑到资本市场的调整，证券价格会在短时间内对利率调整作出反映，可以认为25日开市时国债市场已经对21日的降息有了比较充分的信息反馈。

表4-6给出了11种国债价格的实际变化率，表4-7给出了国债000696久期的计算过程（类似地，可以计算出其他债券的麦考莱久期和修正久期），表4-8给出了根据久期公式得到的国债价格的理论变化率。

通过计算2002年2月25日至2002年2月8日这期间债券价格的实际变化率，并将它与用久期公式计算出的理论变化率进行比较，可以看出我国国债市场上价格对利率变动的敏感性的一些特点。

表 4-6 国债价格的实际变化率

代码	票面利率 (%)	计息日	到期日	2002.2.8 收盘价	2002.2.25 收盘价	价格变化率 (%)
000696	11.83	1996.06.14	2006.06.14	144.50	145.12	0.43
000896	8.56	1996.11.01	2003.11.01	112.50	112.79	0.26
009704	9.78	1997.09.05	2007.09.05	139.50	139.8	0.22
009905	3.28	1999.08.20	2007.08.20	104.01	104.24	0.22
009908	3.30	1999.09.23	2009.09.23	103.83	103.94	0.11
010004	2.60	2000.05.23	2010.05.23	102.43	102.52	0.09
010010	2.63	2000.11.14	2007.11.14	100.36	100.37	0.01
010103	3.27	2001.04.24	2008.04.24	104.74	104.78	0.04
010110	2.95	2001.09.25	2011.09.25	101.30	101.41	0.11
010112	3.05	2001.10.30	2011.10.30	101.90	101.96	0.05
010115	3.00	2001.12.18	2008.12.18	101.30	101.31	0.01

根据国泰君安证券 <http://www.gtja.com.cn> 和上海证券交易所: <http://www.sse.com.cn> 的资料计算而得

表 4-7 国债 000696 久期的计算

付息日期	现金流	距付息日的 天数	按天数折算的 1 元现金流 <sup>①</sup>	全部现金流 折现	时间×折现现金流 <sup>②</sup>
2002.6.14	11.83	126	0.99226	11.73847	4.05219
2003.6.14	11.83	491	0.97019	11.47732	15.43935
2004.6.14	11.83	857	0.94854	11.22128	26.27495
2005.6.14	11.83	1222	0.92744	10.97162	36.73239
2006.6.14	111.83	1587	0.90681	101.40820	440.91736
合计	-	-	-	146.81690	523.41624
麦考莱久期 D	-	-	-	-	3.5651 年
修正久期 MD	-	-	-	-	3.48665 年

说明:

① 一年按 365 天计, 一元现金流的折现值为:  $\frac{1}{1+2.25\%/365} = 0.99994$ , 则期限为 n 天的

一元现金流折现值为:  $\frac{1}{(1+2.25\%/365)^n}$ 。

② 时间与现金流相乘一列的计算公式为: 天数/365×全部现金流折现。遇到闰年, 365 改为 366。

表 4-8 国债价格的理论变化率

代码	D (年)	MD (年)	价格变化率 (%) MD×0.27%
000696	3.56510	3.48665	0.94
000896	1.65140	1.61506	0.44
009704	4.59141	4.49038	1.21
009905	5.08877	4.97679	1.34
009908	6.82137	6.67126	1.80
010004	7.44224	7.27848	1.97
010010	5.39955	5.28073	1.43
010103	5.58771	5.46475	1.48
010110	8.47671	8.29019	2.24
010112	8.54331	8.35531	2.26
010115	6.29485	5.13866	1.39

国债价格的实际变化率和理论变化率的对比见图 4-5。

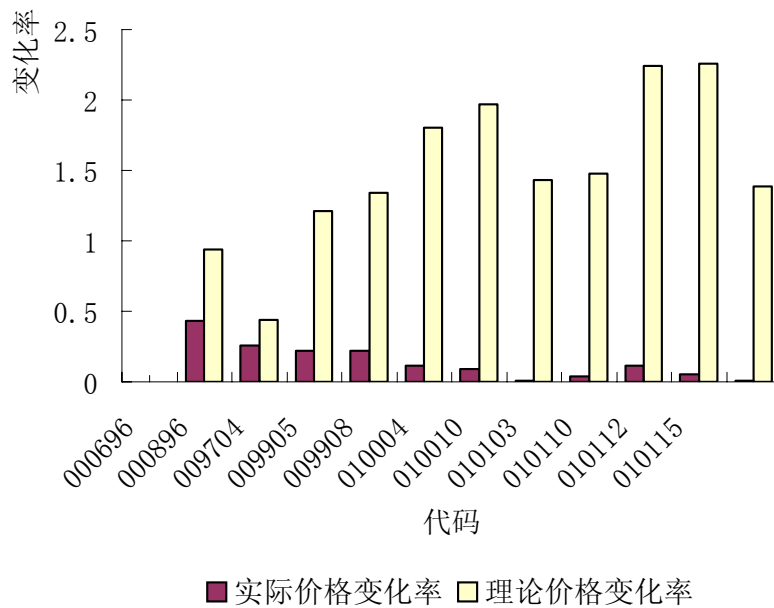


图 4-5 国债价格变动率

表 4-6 表明, 利率下调对所有的国债价格都有影响, 这表现为所有的国

债价格都上升了，从而验证了债券价格和利率变动之间的反向关系。

图 4-5 反映出国债价格的实际变动率和理论变动率之间的差比较大，利率下降 270bp，对债券价格的实际作用十分有限。修正久期值很大的国债 010110 和 010112，其价格的实际变动并不明显；而修正久期不大的 000696 其价格的实际变动是所有国债中最显著的。这说明我国还未完全实现利率市场化，利率的期限结构不尽合理，导致理论上的变动率与实际的变动率差距显著。当然，其他因素对债券价格变动的影响也是存在的，如宏观经济形式状况，人们对未来市场的预期，市场上资金供求状况等等。在这里，还没有考虑凸性对价格变动的影响，如果加上凸性调整，实际价格变动和理论价格变动间的差会更大。

## 附录 4A 久期可加性的证明

久期的可加性：对于一个由  $M$  种债券构成的债券组合， $w_j$  表示第  $j$  种债券的市值占组合总市值的比例， $D_j$  表示第  $j$  种债券的久期，则组合的久期  $D_p$  为

$$D_p = \sum_{j=1}^M w_j D_j$$

证明<sup>[36]</sup>：设债券组合的现值为  $V = \sum_{j=1}^M V_j$ ，第  $j$  种债券所有现金流的

现值和为

$$V_j = \sum_{t=1}^N \frac{C_t^{(j)}}{[1+r^{(j)}]^t}, \text{ 其久期为 } D_j = \frac{1}{V_j} \sum_{t=1}^N \left[ \frac{C_t^{(j)}}{(1+r^{(j)})^t} \right] \cdot t, \text{ 每种债券在组}$$

合中的权重为  $w_j = \frac{V_j}{V}$ ，则组合的现值可以表示为

$$V = \sum_{j=1}^M V_j = \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^N \frac{C_t^{(j)}}{(1+r^{(j)})^t} = \sum_{t=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{C_t^{(j)}}{(1+r^{(j)})^t}, \text{ 从而组合的久期就是}$$

$$D = \frac{1}{V} \sum_{t=1}^N \left[ \sum_{j=1}^M \frac{C_t^{(j)}}{(1+r^{(j)})^t} \right] \cdot t = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^N w_j \cdot \frac{V}{V_j} \cdot \frac{t \cdot C_t^{(j)}}{(1+r^{(j)})^t} = \sum_{j=1}^M w_j \left\{ \frac{1}{V_j} \sum_{t=1}^N \left[ \frac{C_t^{(j)}}{(1+r^{(j)})^t} \right] \cdot t \right\} = \sum_{j=1}^M w_j D_j$$

久期的可加性由此得证。

凸性的可加性可以类似证明。

## 第五章 债券投资的免疫策略

本文在前面的几章里讨论了利率的非预期变动会造成债券投资组合总报酬率的波动。因利率非预期变动对总报酬率所造成的不确定变动（或风险），称之为利率风险。利率风险的表现形式有两种：第一是价格风险，它是因利率非预期变动所造成的债券出售价格的不确定性；第二是再投资风险，它是因利率非预期变动所造成的债券利息收入再投资的不确定性。若将债券持有到期，就消除了价格风险，因为在到期日债券的价格就是其面值，但再投资风险依然存在。可是，投资者往往因债券组合的重新调整或其他原因必须于债券到期前出售，这样就要承受价格风险。投资者投资债券的目的不同，所面临的利率风险的性质也会有差异，从而所采取的规避利率风险的策略也会有所差异。

### § 5.1 债券的投资策略

债券的投资策略主要可以分为积极型策略和消极型策略两种。这两种投资策略的不同之处是：前者重在获利，后者重在保值。积极性策略就是积极主动地在市场中寻找机会，发现那些被市场低估或高估的债券，对前者大量买入，等待上涨，对后者积极抛售，如果有卖空机制，还可借券来抛，用频繁的交易来获得超过市场平均水平的超额利润。在积极性管理策略下，债券市场是无效的。消极型的管理者通常把债券的市场价格当成是公平的价格，仅仅试图去控制他们持有的固定收入资产组合的风险，他们一般是把主要的精力投入到免疫技术的改良上。

积极型的债券管理包括利率预测技术和市场之间的利差分析。一种通常的分类方法把积极管理策略化分为替代互换、市场间价差互换和利率预

测互换<sup>①</sup>。消极型策略主要有债券指数化策略、买持策略、利率免疫策略。债券指数化方式是一种追求与预定基准业绩相匹配的策略。就债券组合指数而言，其基准是债券指数，但实际上它往往并不能满足出资机构的要求。买持策略是指投资者（一般是退休人员）购买长短期的不同债券，然后持有他们至到期日，便可获得固定的利息收入，并免除了债券的价格风险。利率免疫管理的目标是通过选择资产以使现金流可以等于客户的债务，建立一个零风险的资产组合。债券的免疫管理，就是根据久期的特性，通过调整债券资产组合的久期去避免利率波动的风险<sup>②</sup>，这种避免利率风险的技术被叫做免疫（immuunization）技术。免疫技术最早是由一个叫瑞丁唐<sup>③</sup>的寿险公司统计员提出的。免疫采取的形式或者是对资产组合净值或者是对资产组合的未来值进行利率风险免疫。首先应用这一技术的是商业银行和储蓄机构，他们利用这一技术进行资产负债管理以消除资产负债净值的利率风险，也被称作资产净值免疫；以后各种投资基金特别是养老基金和保险公司也开始运用这一技术，以保障未来支付日时的资产价值，他们所使用的是目标日期免疫。

债券投资的积极型策略和消极型策略，目前市场上都有人运用，说明每种策略都有自己的优势。80年代以后，西方较成熟市场的投资者越来越明显地感到，债券市场是效率较强的有效市场，一般人很难超过它，从长期来看，采取消极的投资策略收益更高。

我国的国债二级市场于1988年正式建立，还很不发达。市场交易者在信息的获得上相当不对称，特别是在利率变化的信息上，商业银行可以比普通投资者早些得到消息。另外，各投资者的资金实力相差悬殊，债券市场的规模又不够大，使得有些债券的价格会因大投资者的交易而变动。这

---

<sup>①</sup> 利率预测互换是钉住利率的走势。如果投资者相信利率会下降，他们会把久期较短的债券调换为久期较长的债券；相反，如果预测利率会上升，则把久期较长的债券调换为就为久期较短的债券。

<sup>②</sup> 费雪和威尔是对运用有效久期指标进行验证的先驱者。他们得出结论，依据久期概念有效地免除利率风险是可能的。

<sup>③</sup> F.M.Readington, Review of the principle of life-office valuations. Journal of the institute of actuaries,1952。该文是提出“免除风险”概念和使用这一概念的第一篇文章。

种情况下，运用积极性的投资策略获利的可能性就比较高。越是不发达的债券市场，越适于运用积极策略，而越是发达、成熟的债券市场，消极策略的推崇者就多。但随着我国利率市场化改革的不断深入，证券市场的逐步完善，大多数投资者会采用消极的管理策略。本章的附录中给出了债券投资组合的案例。

## § 5.2 久期免疫机理概述

债券投资的总报酬率主要来自三个项目：债券价格收益或损失，债券利息收入，以及再投资债券利息的收入或报酬。一般情况下，市场利率的变动对此三项中的债券价格所造成的冲击较大。当市场利率上升时，债券价格下降，长期债券的跌幅大于短期债券，中期债券的跌幅介于两者之间。另外，市场利率的变动对中长期债券利息收入的再投资也有很大的影响。当市场利率下降时，债券利息收入所能获得的再投资利率也随之下降。故市场利率的变动对债券投资的总报酬率有重要的影响，但市场利率的变动对债券价格的影响和利息收入再投资的影响是此消彼长的。

债券投资管理的目标之一就是如何消除利率变动的风险，即利率风险免疫。免疫依赖于久期<sup>①</sup>的概念，是为了确保投资组合是如此结构以致任何时候由利率变化引起的资本损失（或利得）能被再投资回报的得到（或失去）所弥补。久期（duration）是使价格效应和再投资效应达到平衡时的持有期<sup>[4]</sup>。假设没有违约风险，不含有选择权的债券投资未来的现金流是确定的，债券的价值仅与利率有关。当投资者投资了一个债券组合后，市场利率不会受单个投资者控制，投资者能做的就是调整手中持有的组合的时间，即投资计划期的长短。如果投资者选择债券组合的久期作为其投资计划期，则该组合不会因为利率波动而贬值。这一结论被称之为屏蔽定理<sup>[33]</sup>。

<sup>①</sup> 尽管久期的概念早在 1938 年就由麦考莱提出，但在很长时间内并没有引起人们的重视。直到 20 世纪七八十年代，随着市场利率的频繁波动，利率风险凸显，组合投资概念日益流行，更适合准确反映复杂的固定收益组合利率风险的久期才成为银行和组合投资管理者管理利率风险的一种现代方法。如果将债券的投资管理者比喻为剑客的话，那么久期分析工具就是他们手中的一把利剑。



现在运用方差分析的方法,通过具体的数字计算直观地来看一下利率变化是如何影响债券的价格和再投资收益的。

表 5-1 给出了假设的三种债券 A、B、C 的有关参数;表 5-2 以债券 B 为例,给出了当利率下降 3%时,该债券的收益率的计算过程;表 5-3 给出了在不同的到期收益率下,三种债券持有期内的每年收益率;表 5-4 给出了年收益率的均值和方差<sup>①</sup>。

**表 5-1 债券 A、B、C 的有关参数**

三种半年付息、无违约风险、面值 100 元的债券的参数					
债券	票面利率 (%)	到期收益率 (%)	期限 (年)	市场价格 (元)	久期 (年)
A	9.00	9.00	1	100	0.98
B	10.68	10.68	5	100	4.00
C	11.00	11.00	10	100	6.30

**表 5-2 当利率下降 3%时债券 B 的收益率**

利息及其再投资收入			出售债券的收入 (元)		
付息时间 (年)	利息 (元)	利息的终值(元) (4 年末)	收到现金流的时间 (年)	现金流 (元)	现金流的现值 (元)
0.5	5.34	6.95175	4.5	5.34	5.14253
1	5.34	6.69467	5	105.34	97.69311
1.5	5.34	6.44710			总计: 102.83564
2	5.34	6.20869			
2.5	5.34	5.97909			总收入: 151.76
3	5.34	5.75799			
3.5	5.34	5.54506			
4	5.34	5.34000			
		总计: 48.92435			

说明: 表 5-2 分为两部分。第一部分计算前 4 年利息及其再投资的收入,第二部分计算在第 4 年末出售债券时的收入。

利息的再投资率为  $10.68\% - 3\% = 7.68\%$ , 半年期利率为  $3.84\%$ 。

4 年末投资债券的总价值为 151.76 元。半年期收益率为

$(151.76/100)^{1/8} - 1 = 0.0535$ , 则年收益率为  $0.0535 \times 2 = 0.1070 = 10.70\%$ 。

<sup>①</sup> 表 5-1 至表 5-4 的资料来源: (美)汉姆·列维(Haim Levy)著;任淮秀等译 《投资学》[M] 北京:北京大学出版社; 2000, P542-543。

表 5-3 以年计算的持有期内每年收益率

到期收益率	持有期			
	债券	1 年 (%)	4 年 (%)	7 年 (%)
下降 3%	A	8.94	6.73	6.42
	B	20.05	10.705	9.40
	C	28.22	12.88	10.77
保持不变	A	9.00	9.00	9.00
	B	10.68	10.68	10.68
	C	11.00	11.00	11.00
上升 3%	A	9.06	11.26	11.58
	B	2.02	10.701	11.97
	C	-3.74	9.42	11.37

表 5-4 年收益率的均值和标准差

债券		持有期		
		1 年 (%)	4 年 (%)	7 年 (%)
均值	A	9.00	9.00	9.00
	B	10.92	10.70	10.69
	C	11.83	11.10	11.05
标准差	A	0.05	1.85	2.11
	B	7.36	0.01	1.05
	C	13.06	1.41	0.25

说明：持有期为 1 年时，债券 A 收益率的均值是  $\frac{1}{3}(8.94\% + 9.00\% + 9.06\%) = 9.00\%$ ，方差为

$$\frac{1}{3}[(8.94 - 9.00)^2 + (9.00 - 9.00)^2 + (9.06 - 9.00)^2] = 0.0024, \text{ 则标准差为 } 0.0024^{\frac{1}{2}} \approx 0.05。$$

将以上的计算结果进行比较可以看出，当收益率发生变动时，若债券的持有期为 4 年，三种情况下，只有 B 债券的收益率几乎一直保持在 10.7% 左右，其标准差在 4 年持有期时最小，近似为零。产生这种结果的原因是 B 债券的到期期限为 5 年，久期是 4 年，在 4 年持有期内，价格效应和再投资效应刚好抵消。

### § 5.3 水平收益率曲线平行移动下的免疫机理

假设现有一个债券或其组合，其收入的序列为  $F_1, F_2, \dots, F_T$ ，其中  $T$  是该投资组合的到期期限。如果现在的市场利率是  $i$ ，那么投资组合

$$\text{的现值为} \quad V_i = \sum_{t=1}^T F_t (1+i)^{-t} \quad (5-1)$$

不妨设投资计划期为  $q$ ，如现在的市场利率为  $i_0$ ，组合的价值为  $V_0$ ，经过  $q$  期后，组合的价值

$$V_q(i_0) = V_0(1+i_0)^q \quad (5-2)$$

如果投资者一投资后，市场利率即刻由  $i_0$  变为  $i$ ，那么组合的价值就由  $V(i_0)$  变为  $V(i)$ ，利率为  $i$  经过  $q$  期后组合的价值是

$$V_q(i) = V(i)(1+i)^q \quad (5-3)$$

所谓利率风险规避，也就是要寻找一个合适的投资计划期，使得利率不论是上升还是下降，都能使

$$V_q(i) \geq V_q(i_0) \quad (5-4)$$

(5-4) 式的数学意义是，对于某个  $q$ ， $i=i_0$  时函数  $V_q(i)$  取得极小值，下面就来寻找符合条件的  $q$  的计算式。

在 (5-3) 式两边对  $i$  求导，得

$$V'_q(i) = V'(i)(1+i)^q + qV(i)(1+i)^{q-1} \quad (5-5)$$

选择  $q$ ，使得  $i=i_0$  成为函数  $V_q(i)$  取得极小值的驻点，即

$$V'(i_0)(1+i_0)^q + qV(i_0)(1+i_0)^{q-1} = 0$$

$$\text{从而得到} \quad q = -\frac{V'(i_0)}{V(i_0)}(1+i_0) \quad (5-6)$$

为了使  $q$  的取值，保证 (5-4) 成立，还需要  $V''_q(i_0) > 0$ 。

在 (5-1) 式两边对  $i$  求导，得到

$$V'(i) = \sum_{t=1}^T F_t(-t)(1+i)^{-t-1} \quad (5-7)$$

在(5-7)式两边对*i*求导, 得到

$$V''(i) = \sum_{t=1}^T F_t \cdot t \cdot (t+1)(1+i)^{-t-2} \quad (5-8)$$

在(5-5)式两边对*i*求导, 得

$$V_q''(i) = (1+i)^q V''(i) + q(1+i)^{q-1} V'(i) + qV'(i)(1+i)^{q-1} + q(q-1)V(i)(1+i)^{q-2} \quad (5-9)$$

当*i*=*i*<sub>0</sub>时,

$$\begin{aligned} V_q''(i_0) &= (1+i_0)^q V''(i_0) + q(1+i_0)^{q-1} V'(i_0) + qV'(i_0)(1+i_0)^{q-1} + q(q-1)V(i_0)(1+i_0)^{q-2} \\ &= (1+i_0)^q \sum_{t=1}^T F_t \cdot t(t+1)(1+i_0)^{-t-2} + 2q(1+i_0)^{q-1} \sum_{t=1}^T F_t(-t)(1+i_0)^{-t-1} + q(q-1)(1+i_0)^{q-2} \sum_{t=1}^T F_t(1+i_0)^{-t} \\ &= \sum_{t=1}^T F_t t(t+1)(1+i_0)^{q-t-2} + \sum_{t=1}^T F_t q(q-1)(1+i_0)^{q-t-2} + \sum_{t=1}^T F_t(-2qt)(1+i_0)^{q-t-2} \\ &= \sum_{t=1}^T F_t (q-t-1)(q-t)(1+i_0)^{q-t-2} > 0 \end{aligned}$$

如果上式中

$$(q-t)(q-t-1) \leq 0$$

得到  $q=t$ , 或  $q=t+1$ , 从而  $V''(i_0)=0$ , 否则  $V''(i_0)>0$ 。

这说明除了如下形式的收入序列组合:

$$0, 0, \Lambda, F_{q-1}, F_q, 0, 0, \Lambda, 0 \quad (5-10)$$

其他任何组合均有  $V''(i_0) > 0$

于是可以得出, 只要按(5-6)式来选取投资计划期, 则投资者手中持有的投资组合就不会因利率波动而贬值。将(5-6)式和(4-3)式进行对比, 不难发现这里有  $q=D$

以上的数学论证说明了, 如果投资者选择一个债券组合的久期作为自己的投资计划期, 则其手中持有的组合就可以避开利率波动的风险。换句话说, 把投资组合的久期作为投资计划期, 这就相当于建立了一个屏蔽机制, 使得利率波动不会影响被屏蔽的组的价值。

在推导上述结论时，是假设债券投资后利率立即发生变化，而后一直不变，这与利率的实际变动情况一般是不相符合的，但这并不影响此投资策略的正确性。只要调整债券组合的构成，使得其久期<sup>①</sup>等于投资计划期就可以了。比如说，投资一期后，利率发生了变化，由于此时的计划期为  $q-1$ ，则可以通过买卖某些债券，改变投资组合中成分债券的比例，使得组合的久期也为  $q-1$ 。每次调整是有交易成本的，在实际操作时，要进行成本收益分析，权衡利弊，作出决策<sup>[33]</sup>。

### § 5.4 随机利率下的免疫机理

麦考莱久期和修正久期解决了水平收益率曲线平行移动下的利率风险免疫问题。但从历史上来看，短期利率的变动往往较长期利率的变动幅度大<sup>②</sup>。当利率的期限结构不是平坦的，而且变动也不是水平的，即收益率曲线的变化可能还有形状的变化时，屏蔽定理仍然成立。

为了使叙说简单，不妨设市场利率服从的随机过程为  $f(\theta, t)$ ，这里的  $\theta$  是随机变量，反映了所有的随机因素。如同第四章第三节所述， $f(\theta_0, 0) = h_0(0, t)$  和  $f(\theta, t) = h(0, t)$  分别表示发生随机扰动前后的利率的期限结构。

设债券或其组合第  $t$  期的现金流为  $F_t$ ，则其现值为

$$V_0 = V(\theta_0) = \sum_t F_t [1 + f(\theta_0, t)]^{-t} = \sum_t F_t [1 + h_0(0, t)]^{-t}$$

在债券投资后，利率随即发生变化，则其现值为

$$V(\theta) = \sum_t F_t [1 + h(\theta, t)]^{-t}$$

设投资计划期为  $q$ ，债券或其组合在  $q$  期后的值为

<sup>①</sup> 这时的久期也被称为免疫久期 (immunization duration or ID)。见 G. O. Bierwa., George G. Kaufman, Robert Schweitzer, Alden Toevs, "The art of risk management in bond portfolios", The Journal of Portfolio Management, spring, 1981, p. 28。

<sup>②</sup> 例如，我国 1998 年 3 月 25 日的储蓄存款利率调整就有这种情况，3 年期和 5 年期的利率没有改变，而 1 年期的利率由 5.67% 降为 5.22%，2 年期的利率由 5.94% 降为 5.88%。

$$V_q(\theta) = [1 + f(\theta, q)]^q \sum_t F_t [1 + f(\theta, t)]^{-t} \quad (5-11)$$

在 (5-11) 两边对  $\theta$  求导, 有

$$\frac{dV_q(\theta)}{d\theta} = qf'_\theta(\theta, q)[1 + f(\theta, q)]^{q-1} \sum_t F_t [1 + f(\theta, t)]^{-t} - [1 + f(\theta, q)]^q \sum_t tF_t [1 + f(\theta, t)]^{-t-1} f'_\theta(\theta, t)$$

设  $\left. \frac{dV_q(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0$ , 即

$$\begin{aligned} & qf'_\theta(\theta_0, q)[1 + h_0(0, q)]^{q-1} \sum_t F_t [1 + h_0(0, t)]^{-t} - [1 + h_0(0, q)]^q \sum_t tF_t [1 + h_0(0, t)]^{-t-1} f'_\theta(\theta_0, t) \\ &= [1 + h_0(0, q)]^q V_0 \left\{ \frac{qf'_\theta(\theta_0, q)}{1 + h_0(0, q)} - \frac{\sum_t tF_t [1 + h_0(0, t)]^{-t-1} f'_\theta(\theta_0, t)}{V_0} \right\} \end{aligned} \quad (5-12)$$

根据 (4-22) 式, 设该债券在  $\theta = \theta_0$  处的久期为  $D$ , 它可由下式确定:

$$\frac{Df'_\theta(\theta_0, D)}{1 + h_0(0, D)} = \frac{\sum_t tF_t [1 + h_0(0, t)]^{-t-1} f'_\theta(\theta_0, t)}{V_0} \quad (5-13)$$

将 (5-13) 代入 (5-12), 得

$$[1 + h_0(0, q)]^q V_0 \left[ \frac{qf'_\theta(\theta_0, q)}{1 + h_0(0, q)} - \frac{Df'_\theta(\theta_0, D)}{1 + h_0(0, D)} \right] = 0 \quad (5-14)$$

不难看出, 当  $q = D$  时,  $V_q(\theta)$  在  $\theta = \theta_0$  处取得极值。所以, 利率变动为随机过程时, 免疫理论也是成立的。

## § 5.5 免疫技术的局限性

利率免疫法是建立某个适当敏感度的债券组合, 使其能锁定某一利率, 以复利累积资金达到所预定的目标金额 (或目标报酬率)。利率免疫法不但能消除价格风险, 也能中和再投资风险。但利用利率免疫方法避免利率变动的风险是有局限性的。首先, 由于债券的收益率和价格之间的非线性关系, 即凸性的影响, 具有相同久期的投资组合并不能产生相同的免疫效果。其次, 每当利率有所变动时, 就需要再次调整债券组合, 重复利率免疫的

工作，这需要交易成本。因此，免疫方法的实际实施可能比所说明的要复杂，但有电脑软件程序的辅助，应是比较容易实现再平衡过程的。第三，尽管免疫是一个相当优雅的并吸引人的方法，但它只对那些在严格限定的到期日需支付一个确定的基金数额的方案比较有用，而对于那些支付或终止期不能确定的投资项目则并不适合，甚至是次优。最后也是最不能忽视的一个局限，即在免疫策略中，一些为使问题简化的假设可能会被违背，特殊的收益曲线移动（平行移动）并不代表实际中遇到的各种各样的移动。对于收益率曲线的形状和围绕预期的利率变化的方向和大小所做的不同假设，将导致不同的免疫期限。为免除这些其他的移动，需要许多其他的未讨论的改进方法。

如果我们能够对支配利率行为的随机过程建立精确的模型，就可以设计出一种完全免除风险的投资策略。已有研究者用较复杂的方法勾画了利率行为的随机过程（如在前文中讨论的几种情形），借此希望更好地进行利率风险管理。但是只有现实发生的利率变化与所假设的随机过程一致，才能实现有效免除风险的目标。这一点取决于一定时间内随机过程的稳定性。对于更复杂的多因素模型的验证表明，虽然有些模型比简单的麦考莱久期指标在免除风险方面效果更好，但优势并不大。随机模型的优势在于它们能够处理有期权特征的债券。随机模型的局限是由于规范利率行为的随机过程在整个时间内不稳定或不能保持一致。这使得过去的系列行为在预测未来的有用性时事与愿违<sup>[5]</sup>。

当收益率曲线有倾斜和扭曲的形状改变时，在免除利率风险方面，麦考莱久期之外还有许多相应策略可以取得更好的效果，但它们的基本原理是一样的，具体的内容将在第六章中给出。

## 附录 5A 债券投资组合的案例

本文以在上海证券交易所交易上市的 7 种国债为例,它们是 2004-08-01 至 2004-09-01 按换手率排序,居前七位的债券活跃品种。

表 5A-1 七种国债的基本数据

代码	名称	发行/上市日期	发行量(亿元)	期限(年)	到期日期	付息方式	票面利率
010004	20 国债 4	2000-6-2	140	10	2010-5-23	按年付息	2.6
010115	21 国债 15	2002-1-4	200	7	2008-12-18	按年付息	3
010210	02 国债 10	2002-9-2	200	7	2009-8-16	按年付息	2.39
010214	02 国债 14	2002-11-1	224	5	2007-10-24	按年付息	2.65
010301	03 国债(1)	2003-2-26	350	7	2010-2-19	按年付息	2.66
010401	04 国债(1)	2004-3-24	381.6	1	2005-3-15	贴现	0
010405	04 国债(5)	2004-6-25	332.3	2	2006-6-15	贴现	0

资料来源:根据 <http://www.chinafir.org/Bmarket> 提供的数据整理而成。

表 5A-2: 2004 年 9 月 1 日七种国债的主要指标

交易代码	简称	收盘全价	收盘净价	应计利息	收盘收益率	修正久期	剩余年限
010004	20 国债(4)	94.80	95.52	0.7194521	0.0362	0.7007	5.726
010115	21 国债(15)	93.84	95.95	2.1123288	0.0461	3.8271	4.299
010210	02 国债(10)	89.94	90.04	0.1047671	0.0471	4.5040	4.959
010214	02 国债(14)	95.41	97.68	2.2652055	0.0423	2.8690	3.148
010301	03 国债(1)	90.30	91.71	1.4138082	0.0471	4.8422	5.471
010401	04 国债(1)	98.72	98.72	0	0.0243	0.5243	0.537
010405	04 国债(5)	94.50	94.50	0	0.0321	1.7334	1.789

资料来源: <http://finance.sina.com.cn/stock/bond/>

假设有资金 1 亿元。根据备选的国债品种和当前的宏观经济环境提出如下几种投资组合方案:

方案一 将 1 亿元平均来购买上表中的 7 种国债,其组合的修正久期



为 2.71 年，平均到期收益率为 3.93%。<sup>①</sup>

方案二 按七种国债的发行规模来构造投资组合，每种国债的分配权重=该种债券的发行额/七种国债的发行总额，其组合的修正久期为 2.67 年，平均到期收益率为 3.81%。

方案三 采用买入并持有策略。买入 04 国债（1），其修正久期为 0.52 年，到期收益率为 2.43%。当 04 国债（1）到期后，若利率上调，则所获得的资金可用于高利率下的再投资。

方案四 若有一笔现值为 1 亿元，时间是 1 年期的负债，采用免疫技术，构造一个投资组合，使其修正久期为 1 年。用 0.607 亿元来买 04 国债（1），0.393 亿元买 04 国债（5）。其平均到期收益率为 2.74%。

债券投资管理可以说是一种投资艺术。因利率的不确定变动，债券投资管理不是一件容易的工作。要建立良好的债券投资管理策略，首先必须了解投资组合对利率变动的敏感度量，而后进行利率免疫工作。不同的投资组合管理技术，在不同的时期、不同的环境中所达到的效果是不一样的，制定投资组合方案要结合投资者的自身情况和外部经济运行情况综合考虑。运用久期技术控制利率风险，如利率的变化不确定时，要缩短资产组合的久期；在利率大幅度变化的情况下，若预期利率会下降，则要拉长组合的久期，反之，要缩短组合的久期。不管哪一种情况，要设立一个止损点的利率。就我国的债券市场来说，在当前经济高速增长背景下，应将控制中长期利率风险作为投资的首要目标，以短期债券和浮动利率债券为主要投资对象，降低长期债的持仓比例，严格控制久期，坚持短久期的投资策略，优化投资组合。在这里，方案三和方案四是两种相对灵活的组合选择。若投资者有 3 年期的负债，则可以考虑方案一和方案二。

---

<sup>①</sup> 这里为了方便计算，采用了加权平均的方法。

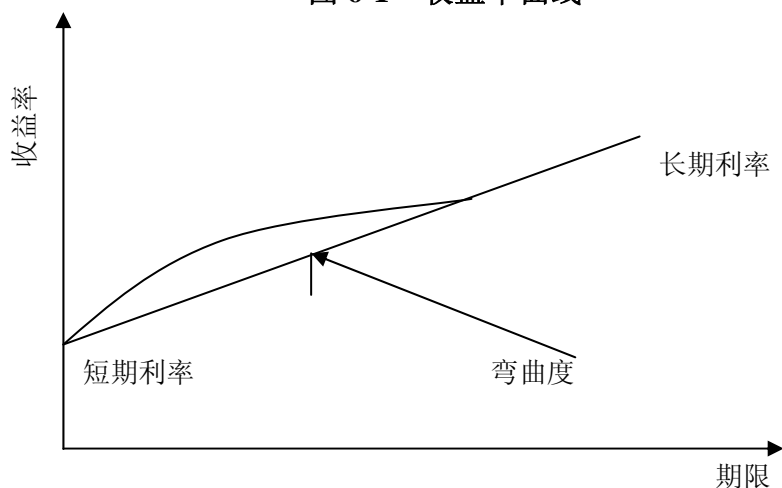
## 第六章 利率风险的进一步分析

作为传统的固定收益分析工具，久期和凸性以简洁的方式度量了债券价格波动的敏感性，然而这种方法发挥作用的重要前提是利率期限结构的平行移动。在实际的市场操作中，短、中、长期债券收益率的变化是不同的，收益率曲线在平行移动的同时还会发生旋转。当收益率曲线平行移动这一条件不被满足时，久期和凸性就不能提供充分的利率风险暴露信息，因为假定不同期限的债券利率发生平行移动或存在某种明确的关系，这就忽视了收益率曲线形状发生变动的影响。这种由收益率曲线的形状发生变动所带来的风险称为收益率曲线风险。

### § 6.1 收益率曲线风险

收益率曲线的形状由它的属性来决定，其属性主要有：水平高低，可以用图 6-1 中的短期利率高低所表示；倾斜度，可以用图 6-1 中短期利率与长期利率的利差所表示；弯曲度，即图 6-1 中曲线的凸度。

图 6-1 收益率曲线



资料来源：小詹姆斯 L. 法雷尔. 投资组合管理理论及应用. 北京：机械工业出版社，2000：P. 362.

收益率曲线的三种属性对应着下面的三种风险因素：第一种因素是用来衡量债券对平行移动的风险暴露程度，即久期（ $d_1$ ）。第二种因素（ $d_2$ ）衡量的是债券对旋转的风险暴露程度，即债券价格对利率期限结构倾斜度变化的敏感性。第三种因素（ $d_3$ ）是债券价格对利率期限结构弯曲度变化的敏感性。现用一个例子来说明收益率曲线形状的改变对债券投资回报率的影响。

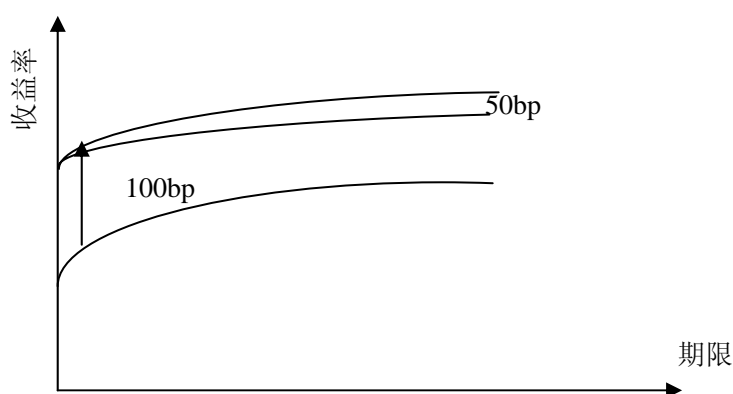


图 6-2 向上倾斜并变平缓的曲线

图 6-2 中的收益曲线是向右上方倾斜的，并逐渐变平缓。正常情况下，短期利率的波动程度高于长期利率的波动，设图中的收益曲线向上平移了 100 个基点，而曲线的倾斜度下降了 50 个基点。表 6-1 的数据说明了在假设的利率变动下，三种因素对某个债券的回报率的影响。由计算结果可以知道，若仅考虑曲线平行移动对回报率的影响，估计值的误差会很大，从而影响投资决策的绩效。

评价和度量投资组合对收益率曲线形状变化的反应方式是避险和资产负债管理中不可忽视的环节。捕捉影响利率曲线变化的风险因素的常用技术是主成分分析法，它可为债券投资组合风险管理提供参考。在收益率曲线形状发生变化时，衡量债券价格的敏感性，可以通过建立多重因子模型来实现，其中比较有代表性的是关键利率久期模型（将在下一节中进行讨论）。

表 6-1 三种因素的影响

变化原因	久期值	收益率变化	回报率变化
久期 $d_1$	4	+1.0%	-4.0%
倾斜度 $d_2$	3	-0.5%	+1.5%
弯曲度 $d_3$	3	-	-
合计			-2.5%

资料来源：小詹姆斯 L. 法雷尔. 投资组合管理理论及应用. 北京：机械工业出版社，2000，p. 363.

针对不同形式的曲线变动，投资者可以采用不同的投资组合来规避风险。动态的套期保值很大程度上取决于对这些风险因素的分解。债券投资组合的久期是组成该投资组合的各成分债券久期的简单加权平均，同样地，也可以用简单加权平均的方法由单个债券对倾斜度和弯曲度的敏感性计算出投资组合对这些因素的敏感性。计算出所持有的债券投资组合对综合风险因素的敏感性后，将其与市场组合<sup>①</sup>的综合风险因素暴露程度进行比较，再利用利率期限结构对利率变化趋势和利率变化程度的预测，投资者就可以改变组合的构成，从而实现投资目标。

## § 6.2 关键利率久期

在前文分析利率的变动问题时，是假定不同期限的利率发生平行的移动或存在某种明确的关系，利用这种假定条件，进行债券价格关于利率变动的敏感性的分析结果，去考虑避险或者是资产负债管理的决策时，可能造成相当大的危险，因为收益率曲线上不同点的波动率是不同的，即不同期限的利率应该有不同波动率，比如短期利率的波动程度高于长期利率的

<sup>①</sup> 通常，以债券指数来代表市场组合或某类债券的总体。债券指数对各种因素暴露程度的计算同投资组合因素暴露程度的计算相同。我国自 1997 年全国银行间债券市场建立并开通以来，债券市场步入了规范发展的新阶段。蓬勃发展的中国债券市场需要一个反映我国债券价格总水平、波动幅度和变动趋势的指标工具，为宏观决策，基金管理人及各类投资人债券组合管理业绩评估提供服务。在这一背景下，中央结算公司在有关部门的大力协助下，完成了“中国债券指数”的编制工作，于 2002 年 12 月 31 日发布试用。有关中国债券指数的详细内容可参阅中国债券信息网上的《中国债券指数编制研究大纲》。

波动。一般来说，可以建立多重因子模型来克服上述问题。例如，以一个短期利率和一个长期利率建立两因子模型。在衡量价格敏感性时，还有许多种方法可以建立多重因子模型。现在着重讨论何氏（Thoms Ho）提出的关键利率久期<sup>[37]</sup>，它可以用来测度债券或债券组合相对于收益率曲线变化的风险暴露状况。

假设在其他期限的收益率不变的情况下，当特定期限的收益率变化时，所引起的价值变化对利率的特定变化的比值叫做利率久期。在收益率曲线上的每一点都有一个利率久期，形成一个久期向量，根据久期向量就可以衡量单个证券或是组合的利率敏感性如何。如果所有到期日的利率都变动相同的幅度，就是前文所讨论的情形。关键利率久期的计算步骤主要是：

第一步选择数个关键的利率。在何氏（Thoms Ho）的论文中，他建议根据每一期发行的公债选择一个利率。在这里，为讨论问题的方便，不妨仅考虑三种关键利率：6个月、10年和30年期利率<sup>[23]</sup>。

第二步是设定其他利率如何随着关键利率而变动。关键利率模型假定关键利率对于其他利率的影响，是一种线性下降的关系，这种影响到达邻近的关键利率时为0。例如10年期利率上升10bp，它对于右侧利率的影响将以每 $10/20=0.5$ bp的速度下降，即10年期利率上升10bp，11年期利率将上升9.5bp，12年期利率将上升9.0bp，依此类推，30年期利率不受影响，因为 $10-20\times 0.5=0$ 。当然，上述的计算也可用6个月为单位期限，即10年期利率上升10bp，它对于右侧利率的影响是每半年 $10/40=0.25$ bp。一般地，当10年期利率发生变动时，也会影响10年期以下的利率。因为10年期关键利率与左侧的6个月期关键利率相隔9.5年，所以当10年期利率上升10bp时，左侧的各期限利率将以每年 $10/9.5=1.0526$ bp的速度下降。依此类推。若6个月与30年期的利率发生变动时，其影响也是以相同的方法计算。图6-3分别给出了三种关键利率上升10bp时对其邻近利率所造成

的影响。斜线的部分是代表邻近利率上升的基点。这些变动量加上原来的水准，就是变动后的利率。

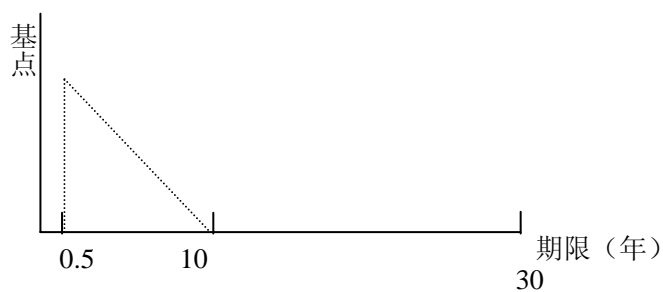


图 6-3 (a) 6 个月利率的变动对邻近利率的影响

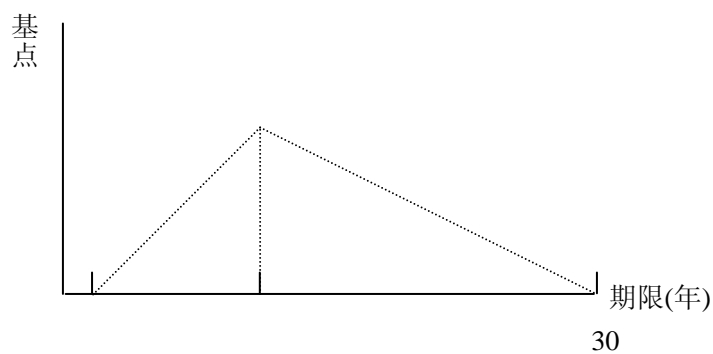


图 6-3 (b) 10 年期利率的变动对邻近利率的影响

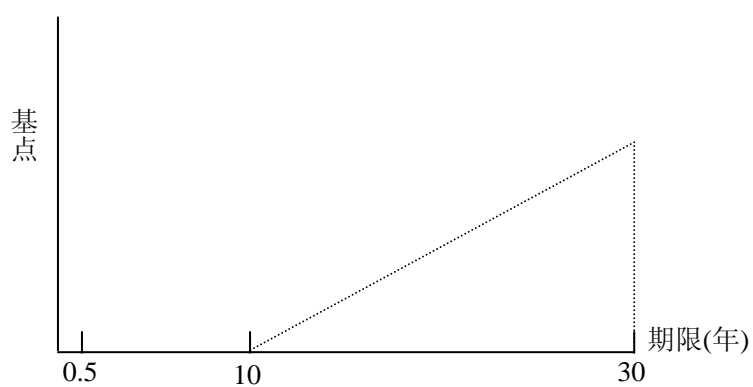


图 6-3 (c) 30 年期的利率变动对邻近利率的影响

第三步，根据新的即期利率曲线，计算出债券的新价格，这里的价格

公式是

$$P = \sum_{i=1}^t C_i (1 + y_i)^{-i}。$$

第四步，利用公式（4-9）就可以计算出关键利率久期。

关键利率的久期总和，并不会恰巧等于修正久期。虽然关键利率的久期计算是以最初的利率期限结构为起点，但它的计算过程采用数个利率的基点，期限结构并不是水平状，而修正久期是假定水平状的利率期限结构。关键利率久期的总和相当于是修正久期，这个直观的观念很有用。关键利率久期可以看作是修正久期的构成分子，它们分别代表债券价格对于收益率曲线上各部分利率的敏感程度。比如，一个债券投资组合的修正久期为  $D$ ，它可以被分为三个部分：短期利率的风险为  $D_1$ ，中期利率的风险为  $D_2$ ，长期利率的风险为  $D_3$ 。这对于债券投资中利率风险的规避有特殊的意义，债券投资的管理者注意收益率曲线上各个位置的风险程度是很有必要的。

关键利率久期度量利率风险相比于其它类型的久期度量方法有以下的优点：首先关键利率久期能说明一种债券对收益曲线的每一部分的价格敏感性；其次，关键利率久期承认收益率曲线变动是由多个市场因素引起的，它的有效性并不依赖于任何收益曲线变动的平衡模型。关键利率久期在一个很大范围的收益率曲线变动上也是可以得到应用的。

利用关键利率的历史数据可以得到他们的方差和协方差，通过分析方差-协方差的特征向量，可以得出收益率曲线的变动主要有三种形式，即水平移动、倾斜变化和扭曲。收益率曲线的水平移动就是所有的关键利率变化相同的数量。倾斜变化一般是短期利率的变化幅度大于长期利率。扭曲变化表明短期利率下降而长期利率上升。若把特征向量和关键利率久期这两个工具结合，那么债券相对于收益率曲线变化的价格敏感性就可以得到比较准确的量化，这有助于有效地实施利率风险免疫策略，达到债券投资的预期目标。

### § 6.3 最小化风险免疫策略

用麦考莱久期作为债券投资利率风险的度量，其前提条件是收益率曲线平直且收益率曲线的变动也是平行的，即任何期限的利率上升和下降的基本点数相同。在这一假设条件下，债券资产组合的麦考莱久期与投资期的长度相等时，该组合能在利率变动中被免疫，但在现实世界中，从利率期限结构来看，不同到期时间的即期利率大小、变化程度都不一样，若仍然使用麦考莱久期作为债券投资风险的度量，则必然会因实际的利率期限结构与麦考莱久期的基本假设不符而产生另外一种风险，即所谓的随机过程风险。那么如何来规避随机过程风险呢？可以运用免疫理论建立一个使利率风险最小化的组合。

Fong 和 Vasicek<sup>①</sup>提出了一种衡量风险最小化的标准。他们证明如果收益率曲线有任意移动，组合价值的相对变化主要依赖于两个因素。第一个因素是组合中资产的特性，第二个因素是收益率曲线变化的特性，而第二个因素是个随机变量，无法由单个投资者控制。但是第一个因素仅依赖组合的构成，可以通过建立免疫组合来控制，这样第一个因素就成为免疫组合的风险衡量，它可以用下式来表达：

$$M^2 = \frac{CF_1(1-H)^2}{(1+y)^1} + \frac{CF_2(2-H)^2}{(1+y)^2} + L + \frac{CF_n(n-H)^n}{(1+y)^n}$$

其中  $CF_t$  = 在时期  $t$  产生的现金流

$H$  = 投资期的长度（以年计）

$Y$  = 组合的收益率

$N$  = 收到最后一笔现金流的时间

<sup>①</sup> 参见 H.Gifford Fong 与 Oldrich Vasicek 的“A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization”，*Journal of Finance*，1984年12月，第1541-1546。



为了使利率风险最小化，组合管理者选择可以根据以下的数学规划形式：

$$\begin{aligned} & \min M^2 \\ & \text{s. t. } D=H \end{aligned}$$

在基于简单久期模型免疫的基础上，通过调整债券组合中的债券类型和比例来改变债券组合的内部结构，实现一个使目标函数最优的组合。

容易看出，若所有的现金流都是在投资期末收到的，则  $M^2=0$ ，但是在现实中很难去寻找存在的债券来建立这种理想的组合，切实可行的做法就是建立一个使免疫风险最小的组合。

## 结 束 语

利率是债券的灵魂。利率风险是债券投资中最重要、最基本的风险。市场风险的显现,有利于投资者走向成熟并引导债券合理定价,同时债市风险的加剧,使债券的投资者产生了对风险控制手段的需求,并积极努力探讨控制风险的各种方法。

利率的变化决定了债券价格的变化,投资者对债券投资的风险管理主要就是对利率风险的管理,怎样刻画利率风险是投资者所关心的一个问题。利率风险的表现形式为价格风险和再投资风险。对于无违约风险、现金流确定的不含权债券来说,影响其价格的基本因素是债券的期限、息票利率和市场利率,在这几个因素中,不确定因素是市场利率。本文围绕债券的价格和市场利率的关系这条线展开,以债券的定价模型为基础,讨论了债券的期限、息票率、市场利率对债券价格的影响;探讨了利率变动的几种常见形式;文章对久期理论及其免疫策略在利率风险管理中的应用机理进行了系统的阐述。久期能反映债券价格对利率的弹性,并具有可加性,它是债券组合管理者衡量和管理利率风险的重要工具。久期模型虽然存在着一些局限性,但与其它更复杂的利率风险管理模型相比较,它具有操作简单和成本低的优势。

久期模型已被成熟的金融市场证明是一种有效的管理利率风险的重要工具。他山之石,可以攻玉,借鉴和学习别人的知识,可以使我们少走弯路,开阔视野,从而成长得更快。实证研究得出,我国的利率期限结构是一条稍微向上的曲线,而且曲线的变动也主要是水平移动。这表明,在我国的债券市场上,使用久期匹配策略就可以较好地实现套期保值目标。但鉴于中国债券市场的特殊性,国外成熟的组合管理方法和工具必须经过一个本土化的过程,才能真正发挥其指导作用,这是一个充满挑战的任务,

需要业内各方人士的协同努力，才可能取得成功。

从现阶段看，在我国债券市场运用免疫技术进行利率风险管理还面临着一些需要解决的问题。第一，贴现率和利率期限结构的确定。计算久期所需要的一个重要数据就是在用贴现法计算各期现金流量的现值时所使用的利率水平，即以政府债券到期收益率曲线表示的收益率曲线。在西方发达的金融体系下，用作贴现率和代表市场利率水平的收益率曲线可以通过观察活跃的国债市场求得。但是，我国的国债市场现在还很不发达，品种少，交易量不大，这在很大程度上制约了国债收益率曲线的使用。同时，我国目前利率还没有完全市场化，因此，要确定一个合理的贴现率水平来计算固定收益资产或负债的久期并不是一件容易的事情。第二，对久期进行调整的途径。当利率有所变动时，就需要再次调整债券组合，重复利率免疫的工作。理论上的一个办法是通过债券的买卖来调节，这种操作是

有一个发达的债券市场为前提条件的，而我国目前债券市场流通的债券品种远远难以满足金融机构调节资产组合的需求。因此，我国必须大力发展债券市场，尤其是各种期限的政府债券市场。

随着我国利率市场化程度的深入，债券市场的逐步成熟，债券品种的不断增多，利率风险管理的复杂程度也必然地会同时提高，这就要求积极寻求适当的其它利率风险管理模型。未 ，方能 主动权。市场是 的，成功永远属于有备而来者<sup>①</sup>。我们期待着中国债券市场尽快发展成熟，也期待着更多的适合中国金融市场的利率风险管理工具和产品的出现。

---

<sup>①</sup> 的是业界已经开始重视利率风险。2004年4月24-25日，首届债券投资风险管理国际论 在北京举办。会议的主 是就国内外债券投资风险管理交流经验，相互探讨，以促进中国债券市场的规范发展，提高投资人理性投资的水平。

## 参考文献

- [1] (美)安东尼·M. 托 罗、(美) 维·F. 贝尔著; 斌译.《金融市场、工具与机构》[M]. 大连: 东北财经大学出版社, 2000, p.96.
- [2] (美)安东尼·G.科因等著; 唐旭等译.《利率风险的控制与管理》[M]. 北京: 经济科学出版社, 1999, p.51, 444.
- [3] 路 编; 等译.《金融 生工具导论》[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001, p.34.
- [4] (美)汉姆·列维著; 任淮秀等译.《投资学》[M]. 北京: 北京大学出版社 2000, p.529, 542-545.
- [5] (美) 詹姆斯 C.范霍恩著; 文等译.《金融市场利率与流量》[M]. 大连: 东北财经大学出版社, 2000, p.127-129.
- [6] (英) 伦 ·格利 著; 唐旭等译.《金融工程学: 管理金融风险的工具和技巧》[M]. (修订版) 北京: 经济科学出版社, 2002.
- [7] (美) 维·博 ,罗 特·C· 著.《金融学》[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2001, p.248.
- [8] 大 等著.《国债利率管理》[M]. 上海: 上海财经大学出版社出版, 1999.
- [9] (美) 维·博 等著; 朱 等译.《投资学》[M] (第五版). 北京: 机械工业出版社, 2002, p.446.
- [10] 日明, 一军, 平著.《债券价格计算理论与实务》[M]. 北京: 经济科学出版社, 2001.
- [11] (美)罗 特·齐普 著; 灵等译.《债券市场运作》[M] (第二版). 北京: 清华大学出版社, 1998, p.11.
- [12] (美) 威 ·F. 普等著; 军.等译.《投资学》(上)[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1998, p.105.
- [13] 弗兰克·J·法博 著; 东译.《债券市场: 分析和策略》[M] (第四版). 上海: 百家出版社, 2002.
- [14] (美)小詹姆斯 L.法雷尔, 尔特 J.雷 特著, 齐 峰等译.《投资组合管理理论及应用》 [M] (第二版). 北京: 机械工业出版社, 2000.
- [15] (美)约翰· 尔著, 张 译.《期权、期货和 生证券》[M]. 北京: 华 出版

- 社, 1997.
- [16] 张 春, 郑振龙主编. 《金融市场学》 M (第二版). 北京: 高等 育出版社, 2003.
- [17] (美)弗兰克.J.法博齐著, 周刚, 化斌译. 《投资管理学》[M]. 北京: 经济科学出版社, 1999.
- [18] Burton G. Malkiel. Expectations, Bond Prices, and the Term Structure of Interest Rates, [J]. Quarterly Journal of Economics, May 1962, p.197-218.
- [19] 生 等编著. 《利息理论及其应用》[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2001.
- [20] (英)希克斯著; 译. 《价值与资本: 对经济理论某些基本原理的探讨》[M]. 北京: 商务 书 , 1982.
- [21] Franco Modigliani and Richard Sutch. Innovation in Interest Rate Policy[J] . American Economic Review, May 1966., p.178-197.
- [22] (美) 维·博 等著, 露译. 《投资学精要》[M](第四版) . 北京: 中国人民大学出版社, 2003.
- [23] (美)布鲁斯·塔克曼著; 黄嘉斌译. 《固定收益证券》[M]. 北京: 宇航出版社, 1999, p.105, 192-194.
- [24] 郑振龙主编. 《金融工程》[M]. 北京: 高等 育出版社, 2003, p.116.
- [25] John C.COX, Jonathan E. Ingersoll, JR., and Stephen. A.Ross. A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates [J]. The Journal of Finance, September 1981, p.769-797.
- [26] J.C.Cox, J.E.Ingersoll and S.A.Ross. A Theorem of the Term Structure of Interest Rate[J]. Econometrica, 1985, 53, pp.385-407.
- [27] Thomas S.Y.HO and Sang-bin Lee. Term Structure Movement and Pricing Interest Rate Contingent Claims[J]. Journal of Finance,V.41,December,1986, No.5, p.1011-1029.
- [28] 郑振龙、林海. 中国市场利率期限结构的静态估计[J], 武汉金融, 2003-3, p.33-37.
- [29] 朱峰. 零息国债收益率曲线变化特征的因素分析[C]. 武汉: 第二届中国 年经济学者论 , 2002.
- [30] 林海. 中国利率期限结构及应用研究[D], 2003, p.65.
- [31] 约翰·马歇尔等著, 明等译. 《金融工程》[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998, p.125.

- 
- [32] Frank J. Fabozzi. Duration, Convexity, and other Bond Risk Measures [M]. New Hope, Pa.: Frank J. Fabozzi Associates, 1999, p.38-39, 53-55, 101.
- [33] 程希 等编著.《金融投资数理分析》[M]. 合肥: 安徽科学技术出版社, 2001, p.217-221.
- [34] G. O Bierwa., George G. Kaufman, Robert Schweitzer, and Alden Toevs. The Art of Risk Management in Bond Portfolios [J]. The Journal of Portfolio Management, spring, 1981, p.36.
- [35] Lawrence Fisher and Roman L. Well. Coping With the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naïve and Optimal Strategies [J]. The Journal of Business, V.44, 1-4, 1971, p.408-431.
- [36] 明著.《金融工程—无套利均衡分析》[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999, p.203.
- [37] Thomas S. Y. Ho. Key Rate Duration: Measures of Interest Rate Risks [J]. Journal of Fixed Income, September, 1992, p.29-43.

