

学校编码: 10384

分类号_____密级_____

学号: 15620061151040

UDC _____

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

模型风险及其对衍生品定价的影响

Model Risk and Its Impacts on Pricing Derivatives

刘杨树

指导教师姓名: 郑振龙 教授

专 业 名 称: 金融工程

论文提交日期:

论文答辩时间:

学位授予日期:

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2009 年 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果,均在文中以适当方式明确标明,并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范(试行)》。

另外,该学位论文为()课题(组)的研究成果,获得()课题(组)经费或实验室的资助,在()实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称,未有此项声明内容的,可以不作特别声明。)

声明人(签名):

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（ ） 1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，
于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。

（ ） 2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年 月 日

摘 要

在金融的理论和实务中，各种数理模型已经得到了广泛的应用,但是大部分基于数理模型的研究都是在假设某个模型为真实模型之后，给出其定价方法和相应的复制策略。遗憾的是我们很难知道真实模型，因此本文在假设真实模型未知的情况下，研究衍生品进行定价和相应复制策略的问题。

首先，本文指出了以往对于模型不确定性与模型风险的研究框架的不足，在更加贴近市场操作的情况下研究模型风险给衍生品定价带来的影响。其次研究不同的复制策略，如参数复制策略和传统的 Delta 复制策略，其复制误差与模型选择、模型参数稳定性、真实测度的漂移项和真实状态变量等的关系。除此之外，本文还详细讨论了参数复制策略和 Delta 复制策略的优劣，以及这两种策略对模型风险的敏感度问题。最后，假设标的资产的真实过程是一个 SVJ 过程，分别用 GBM,Local,Heston-Nandi,以及 SABR 模型进行参数敏感度复制和传统的 Delta 复制，通过模拟发现，在真实模型未知的情况下，一个实际中好的模型并不一定是一个复杂的模型，而是在各种复制策略下的表现都很稳定的模型；简单模型的参数复制策略的稳定性远超复杂模型，并且不容易受到模型风险的影响。而复杂模型的 Delta 复制策略比它所对应的参数复制策略的稳定性要高，但还是不如简单模型的 Delta 复制策略。由于模拟假设了标的资产的真实过程，因此本文的一些模拟结果可能受此影响，但并不妨碍最后的总体结论。

关键词：模型风险；参数复制策略；复制误差

ABSTRACT

In both academic researches and practical operations, various mathematical models have been applied to solve finance problems. Most of the researches suggest pricing rule and hedge strategy consistent with a pre-assumed “true model” which hardly could be reached.. , causing misleadings in practical tradings. This paper, on the contrary, studies pricing and hedge without any assumption of true model.

Firstly, this paper argues against former researches in the framework of model uncertainty. Secondly, the paper studies the impacts on hedge errors resulted from model selection, parameter stability, drift in the real world measure and the frustration of state variables given by different hedge strategies including parameter hedge and delta hedge. Besides, a comparison between parameter hedge and delta hedge containing their sensitivity to model risk is discussed. At last, by simulation, a test is provided by assuming SVJ as true model, while GBM, Local, Heston-Nandi and SABR are employed for parameter hedge and delta hedge. The final result shows that a good model might not be a complex one given no information on true model. A simple model may generate a robust hedge strategy under most frustrations, meaning that a simple one is much less sensitive than its counterpart exposed to model risk. And delta hedge implied by complex models is more stable than parameter hedge by complex models, but still behaves worse than delta hedge implied by simple models. General conclusions of this paper are conceivable, although some consequences of simulation might be affected by the assumption of true process.

Key words: model risk; parameter hedge; hedge error

目录

第一章 绪论	1
第二章 模型不确定性与模型风险	5
第一节 模型不确定性与模型风险	5
(一) 不确定性的研究.....	6
(二) 不确定框架下的最差情况方法.....	6
(三) 不确定框架下研究方法的缺陷.....	7
第二节 模型风险的来源以及相关研究	10
(一) 模型风险的来源.....	10
(二) 其他与模型风险相关的研究.....	12
第三节 模型风险的度量方法	14
(一) 贝耶斯模型平均.....	14
(二) 贝耶斯模型平均与期望损失.....	15
第三章 模型风险与复制误差	17
第一节 模型风险对复制误差以及衍生品定价的影响	17
第二节 复制策略	19
(一) 参数的重复校准.....	19
(二) 参数复制策略.....	20
(三) 参数复制的必要性.....	23
(四) 参数复制策略的缺陷.....	24
(五) 模型风险对标的资产 Delta 复制策略的影响.....	27
(六) 不完全市场中模型风险对复制策略的影响.....	28
第三节 真实模型未知情况下影响复制误差的因素	31
第四章 数值模拟	33
第一节 模拟所使用的模型	33
(一) BS 模型.....	33

(二) 局部波动率模型.....	34
(三) Heston-Nandi 模型.....	34
(四) SABR 模型.....	35
(五) 随机波动率跳跃模型.....	36
第二节 离散化模拟	38
第三节 参数敏感度复制与 Delta 复制	40
(一) 两种策略的复制误差的统计比较.....	40
(二) 参数敏感度复制策略对不同复制工具的敏感度.....	42
第四节 两种复制策略对模型风险的敏感度	44
(一) 现实测度对复制误差的影响.....	44
(二) 波动率的变化对复制误差的影响.....	46
(三) 跳跃频率的变化对不同复制策略复制误差的影响.....	47
(四) 不同模型与复制策略复制误差的路径.....	49
第五章 结论.....	51
(一) 本文的贡献.....	51
(二) 本文的缺陷以及未来的发展.....	52
附录.....	54
参考文献.....	57
致谢.....	60

Content

Chapter1 Introduction	1
Chapter2 Model Uncertainty and Model Risk	5
2.1 Model Uncertainty and Model Risk	5
2.1.1 Studies on uncertainty	6
2.1.2 Worst case approach	6
2.1.3 Defect of uncertainty research on pricing derivatives	7
2.2 Source of Model Risk and Relative Research	10
2.2.1 Source of Model Risk	10
2.2.2 Other studies	12
2.3 Method to measure model risk	14
2.3.1 Bayesian Model Average	14
2.3.2 Bayesian Model Average and Expected Shortfall.....	15
Chapter3 Model Risk and Hedge Error	17
3.1 Model Risk's Influence on Hedge Error and Derivative Pricing	17
3.2 Hedge Strategy	19
3.2.1 Recalibration Parameters	19
3.2.2 Hedge Parameters	20
3.2.3 .Nesessity of Hedge Parameters.....	23
3.2.4 Defect of Hedge Parameters	24
3.2.5 Model risk's Influence on Delta Hedge	27
3.2.6 Model risk's Influence Hedge Strategy in an Incomplete Market	28
3.3 Factors' Impact on Hedge Error	31
Chapter4 Simulation	33
4.1 Models in Simulation	33
4.1.1 BS Model	33

4.1.2 Local Volatility Model	34
4.1.3 Heston-Nandi Model.....	34
4.1.4 SABRmodel	35
4.1.5 SVJ Model	36
4.2 Discretization.....	38
4.3 Delta Hedge and Parameters Hedge	40
4.3.1 Hedge Errors Compared by Delta Hedge and Parameters Hedge	40
4.3.2 Sensitivity of Parameters Hedge to Different Hedge Tools	42
4.4 Robust comparison of Delta Hedge and Parameters Hedge.....	44
4.4.1 Impact of real measure on Hedge Error	44
4.4.2 Impact of Various Volatility on Hedge Error	46
4.4.3 Impact of Jump Frequency on Hedge Error.....	47
4.4.4 Path of Hedge Error by different models	49
Chapter5 Summary	51
5.1 Contribution	51
5.2 Further Research	52
Appendix	54
Reference.....	58
Postscript.....	60

第一章 绪论

从上个世纪 70 年代开始，以 BS 模型(Black and Scholes, 1973)为代表，金融衍生产品的定价和相应的复制策略就成为金融理论发展中最重要内容之一。在 BS 期权定价模型之后，不少学者又给出了对 BS 模型的扩展以及许多更加复杂的期权定价模型。这些模型主要从两个方面来改进期权定价的精确度：一方面是放松 BS 模型中的假设条件；另一方面是找到能够描述资产价格动态过程的更好的模型。但是并非越复杂的模型在实际使用时效果越好，复杂的模型相对于简单的模型在实际应用中有其无法忽视的缺点。本文试图通过建立一个在真实模型未知情况下的衍生品定价框架来发掘不同模型的模型风险以及信息的敏感度对衍生品定价的影响。除此之外，本文将运用模拟来说明如何运用新的框架来得出模型风险和敏感度的信息。这种方法对市场上的衍生品发行者，特别是有套期保值需要的衍生品空头具有较为重要的意义。并且，本文的结论暗示了为什么即使是最精确的模型，其作用也是非常有限的；市场上的众多未被模型考虑到的因素包括真实测度下的资产漂移率、标的资产的路径、以及模型参数的波动率等都会影响实际定价的结果。这也对市场上近来越来越数量化的金融衍生品分析和以此为基础的投资行为（如 LTCM，次贷危机等）可能导致的巨额亏损作出了一定的解释。另外，尤其重要的是本文的方法可以应用到所有的衍生品定价模型，包括未来可能出现的新模型上。以下本文将从衍生产品交易员实际操作的角度来阐述为什么对模型风险和敏感性的研究是重要的。

对于市场上的交易员来说，模型的用途主要包括两个方面：a.用模型来定所要出售的衍生品的价格。b.用定价模型所对应的复制策略进行动态复制或者对冲衍生品空方所带来的风险。在用模型算出衍生品的价格后，交易员将以此作为参考，把衍生品出售给对手(counterpart)；在之后的产品存续期内，交易员为了规避衍生品空头的风险而根据模型对衍生品进行对冲所付出的费用即是交易员为了复制这个衍生产品所花费的成本。在对衍生品价格建模时，模型设定本身都假设风险源遵循的随机过程，并且模型中的参数为定价期初给定。但实际上市场中

资产价格的真实过程是任何人都无法得知的，这意味着某个模型的参数在未来的产品存续期内可能和在期初给衍生品进行定价时完全不同。从而用某个模型在期初给衍生品定价时，交易员并无法知道之后的复制成本是多少，因此交易员不可能完全按照模型给出的价格出售衍生品。任何交易员都必须评估未来复制的成本，所以市场上的衍生品卖价（尤其是 OTC 市场）除了包括在风险中性世界中用不同的模型定出的价格外，还必须包括对未来复制成本和模型定出价格差异的估计。相对于简单模型来说，复杂模型在实际运用中将可能隐含以下两种风险。

第一，在进行参数校准时，复杂模型的风险较大，常常会遇到病态(ill-posed)的优化问题而使得参数极不稳定。由于未来是未知的，任何交易员都不可能准确估计未来的复制成本，因此他们一般通过连续校准模型参数来时刻保持自己的复制策略与市场当前的情况一致¹。比如在用简单的 BS 期权定价模型对衍生品进行对冲时，隐含波动率是唯一的一个未知参数，并且隐含波动率还是普通香草期权价格的单调函数。因此在实际中运用市场上的普通香草期权(plain vanilla option)对该模型进行参数校准时，交易员能够很快得到这些期权的隐含波动率，并使用校准出来的参数对其他相同标的的衍生产品进行定价。但使用一个复杂的模型进行校准参数时，需要通过非线性优化来获得参数，常常可能只取到局部最优值，从而带来较大的校准风险。并且交易员用这些“局部最优参数”复制衍生品时将可能得到一个非最优的复制策略。即使交易员能够保证优化过程的全局最优，复杂模型本身的特点也可能导致校准结果出现问题。因为简单的模型比如 BS 模型的隐含波动率本身往往波动较小，并且和市场的情况有一一对应的关系。但复杂的模型由于参数较多，在市场上信息不够时（比如用来校准的衍生品的流动性较差或数量不够），将可能出现多组参数都满足当前市场的无套利限制。因此复杂的模型虽然能够更好的拟合普通香草期权的波动率曲面并且得到一个比简单模型更加合理的价格，但是复杂模型所隐含的复制策略将可能比简单模型有更大的风险。

第二，在运用参数复制策略对复杂模型的参数变动进行对冲的时候，参数的稳定程度将影响复制效果的好坏。在交易员连续校准的时候，模型参数将随着市

¹ 即保持和市场无套利

场变动而变动(parameter update), 此时交易员可以通过在市场上进行交易来对冲参数变动风险。由于 BS 模型只有波动率一个未知参数, 因此对于 BS 模型来说这种风险就被称为"vega risk"¹。为了对冲"vega risk", 交易员将要用到除了标的资产以外的衍生品; 而对于其他复杂的模型, 交易员必须要用到更多的交易工具来对冲敞口的风险。这就意味着更大的风险, 而这种风险正是由使用复杂的模型带来的。因此在市场上, 并非越复杂, 历史拟合效果越好的模型就越受到交易员的青睐。甚至很多交易员往往用最简单的 BS 模型来捕捉市场上的信息并为衍生品进行定价。

有学者定义过对于使用不同模型的所带来的风险。Rebonato(2003)指出市场上对模型风险的定义有两种: a.在当前金融市场的信息基础上, 用不同的模型对复杂的衍生产品定价所产生的差异。b.当交易员用不同的模型定价并进行动态复制对冲风险后, 所能得到的收益的差别。这两种定义和之前模型的两个用途相对应, 实际上就是指在使用模型时, 因为模型的差异所可能导致交易员在同样路径下的真实盈利情况不同的风险。不少学者(Schoutens et al. 2005, Longstaff et al. 2001, Hull et al. 2002)都关注过定价中使用不同的模型所造成初始定价的差异; 而对用不同模型进行复制而导致的差异的研究较少。但在市场上, 大多数交易员在使用模型时都非常重视不同模型所带来的复制差异, 这种差异有很大一部分由未来的信息冲击所决定, 因此在期初进行定价时很难预测其合理数值。如果在同样一条路径上不同的模型使用会造成初始定价和复制差异的双重风险, 即 Rebonato 所指出的模型风险的两层定义, 那么把这双重风险量化并建立它们和衍生品价格之间的关系, 将会使衍生品的定价更加合理。

本文将讨论模型风险对复制误差以及衍生品定价的影响。其中初始定价误差代表模型风险, 而之后的复制误差可以看成是一种信息敏感度。这样的区分是由于二者具有的不同信息集, 模型风险是基于定价时所有的信息; 而信息敏感度是由定价之后的信息冲击所导致的。由于信息集的差异, 在参数给定的情况下, 初始定价更容易影响衍生品的初始报价, 而复制误差则很大一部分依赖于交易员对未来的判断和复制中的各种细节, 从而最终影响到衍生品到期后交易员的损益。

¹ 价格对隐含波动率求偏导

但信息敏感度并非和模型无关，恰恰相反，本文将证明复制误差将在很大程度受到模型的影响。除了模型之外，信息敏感度的决定还包括很多其他因素，比如衍生品本身的性质——一个普通期权和一个高阶矩的奇异期权的价值对市场冲击的敏感度可能有很大差异。另外不同的市场状况也可能导致复制误差的差异，本文将在之后的论述中详细讨论这个问题。

值得注意的是，不少学者(Routledge and Zin, 2001)(Cont, 2006)认为此处的模型风险实际上为模型不确定性。这点牵涉到风险与不确定性的定义，本文将阐述这个问题的本质与其分析方法与传统不确定性研究的差异，并指出之前的学者在这个问题上的错误。在此基础上本文的研究方法仍然沿用基于风险的分析方法，因此本文依然将这种由模型不同带来的差异称为模型风险。

本文的主要结构如下：第一章为绪论。第二章回顾了有关模型风险与模型不确定性的文献，指出模型不确定性研究方法的不足，讨论了模型风险的来源，并基于风险和不确定性的定义讨论模型风险和模型不确定性的度量。第三章从理论上讨论了在真实模型未知的情况下，使用近似模型时模型风险对参数复制策略和传统的 Delta 复制策略的影响，以及二者的缺陷。第四章通过模拟说明了模型风险对复制误差的影响。第五章是全文的总结。

第二章 模型不确定性与模型风险

虽然在 BS 模型之后金融衍生品的定价理论已经发展了三十多年,新的模型对市场的解释能力也逐步加强,但是学术界对模型风险的相关研究在上个世纪 90 年代才由 Derman(1996)提出,而且具有很大的分歧。不少统计学家运用统计学的方法对模型风险进行研究(Hoeting et al., 1999, Clyde and George, 2004),但由于在衍生品定价理论和实际操作中模型的复制策略具有内在一致性,因此在金融衍生品定价中模型风险的影响将不同于大部分其他学科中的模型风险的影响。另外的学者倾向于把模型风险归结为模型不确定性,在不确定性的框架下进行研究。本章将回顾以往学者对模型风险的研究,并且讨论这些研究的合理性以及缺陷。

第一节 模型不确定性与模型风险

本节将讨论模型不确定性和模型风险两种说法的差异。关于风险的研究是基于 Savage(Savage, 1954)的经典框架,在这个框架中决策者以贝耶斯法则进行决策。不确定性的研究是基于 Knight(Knight, 1921)的理论框架,在不确定性的世界中各个事件的发生概率是未知的,决策者将不再遵循贝耶斯法则进行决策。在模型使用的选择上,我们实际上面临的是不确定性问题。因为一个模型实际上代表着一种分布,但我们并不知道这个分布是否正确,或者正确的概率是多少。虽然模型不确定的确存在,但是这种不确定性和传统的不确定性的研究并不相容,因为在大部分衍生品定价上,模型不确定性并不会影响该衍生品的价格,以下本文将要通过论述和相关的例子证明这一点。

不少学者(如 Routledge and Zin, 2001, Cont,2006)都系统的研究了模型的不确定性,并倾向于使用不确定性框架下的最差情况方法(worst-case approach)来刻画模型不确定性。在此为了能够更好的阐述传统的不确定性框架不适合描述衍生品定价中的模型不确定性,有必要回顾不确定性的研究历史。

(一) 不确定性的研究

Ellsberg(Ellsberg, 1961)在实验中发现了违反萨维奇公理(Savage axiom)的现象, 并称为 Ellsberg 悖论。Ellsberg 悖论主要描述了在客观概率未知时, 决策者的行为将违背客观概率已知时的贝耶斯法则, 学者们认为此时决策者的决策将在不确定性的理论框架下进行。实际上, Ellsberg 悖论表明决策者对未知客观概率下的选择存在对不确定性的厌恶(ambiguity aversion)(Gilboa and Schmeidler, 1989)。对此, Gilboa et al(1989)提出了最大化最小期望效用函数(maxmin utility function)。最差情况方法实际上意味着衍生品的交易者效用函数为最大化最小期望效用函数, 因此他们会在无法确定正确模型的情况下做最坏的打算, 即选择表现最差的模型对衍生品进行定价, 从而得到一个产品最保守的价格。

(二) 不确定框架下的最差情况方法

Cont(2006)在 Gilboa(1989)的最大化最小期望效用函数的框架下给出了度量模型不确定性的一致风险度量(coherent risk measure), 即该度量满足: 单调性、额外的现金受益不改变原资产风险、次可加性、齐次性¹。 $\mu_Q(X)$ 表示对模型不确定性程度的度量:

$$\mu_Q(X) = \bar{\pi}(X) - \underline{\pi}(X) \quad (2.1.2)$$

其中 $\bar{\pi}(X)$ 表示衍生品定价的上限, $\underline{\pi}(X)$ 表示衍生品定价的下限, 它们的表达式如下:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(X) &= \sup_{M_i \in M} E^{M_i}(X) \\ \underline{\pi}(X) &= \inf_{M_j \in M} E^{M_j}(X) (= -\bar{\pi}(-X)) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

(2.1.3) 中的两个式子都具有很强的经济含义, 如果 X 是一个衍生品多头的回报 (假设不小于零), 那么 $-X$ 即为衍生品空头的回报。 $\bar{\pi}(X)$ 则表示衍生品多头所

¹ 详见 CONT, R. (2006) Model uncertainty and its impact on the pricing of derivative instruments. *Mathematical Finance*, 16, 519-547.

可能达到的最高定价为使得回报为 X 的衍生品价格最高的模型所给出价格, 这个价格是在 M 这个模型集中多方的最差选择。 $-\bar{\pi}(-X)$ 则表示站在空方立场进行定价, $-\bar{\pi}(-X)$ 指对空方而言这个产品的最差价格。因为对空方而言回报为 $-X$ 的产品必然使得空方定出的价格也为负数, 即必须收到 $-\bar{\pi}(-X)$ 的价格, 而某个使得 $\bar{\pi}(-X)$ 最大的模型必然使得 $-\bar{\pi}(-X)$ 最小。因此 $\mu_Q(X)$ 实际上为在模型集 M 中, 一个完全根据模型进行定价的多方的最高可能出价和一个完全根据模型进行定价的空方的最低可能卖价之间的差额。Cont(2006)根据此得出一个模型不确定性的相对指标

$$MR(X) = \frac{\mu_Q(X)}{\pi_m(X)} \quad (2.1.4)$$

其中 $\pi_m(X)$ 为 $\bar{\pi}(X)$ 与 $\underline{\pi}(X)$ 的中值, $MR(X)$ 则代表了模型不确定性在模型定价中所占的比例。

除此之外 Cont(2006)还给出了模型风险的凸度量, 即

$$\mu_*(X) = \pi^*(X) - \pi_*(X) \quad (2.1.5)$$

其中

$$\begin{aligned} \pi^*(X) &= \sup_{M_i \in M} \{E^{M_i}(X) - \|C^* - E^{M_i}[H]\|\} \\ \pi_*(X) &= -\pi^*(-X) = \inf_{M_i \in M} \{E^{M_i}(X) + \|C^* - E^{M_i}[H]\|\} \end{aligned}$$

这里 C^* 和 H 分别代表市场上用来进行参数校准的衍生品和该衍生品的回报, $E^{M_i}[H]$ 代表按照某个模型算出来的该衍生品的价格, 而 $\|C^* - E^{M_i}[H]\|$ 为校准误差的范数。以校准的误差(calibration error)作为惩罚函数(penalty function), 使得该风险测度考虑了校准的准确性。

(三) 不确定框架下研究方法的缺陷

虽然, 最差情况方法所内含的风险度量方法已经被证明是一致风险度量, 并且 Cont 还给出了对应的凸度量; 但是实际上这种风险度量对衍生品定价的影响

仅仅对效用函数满足最大化最小期望效用函数的极度风险厌恶的投资者才适合。这意味着 Cont 给出的是最保守的风险度量，并且该度量对定价的影响是很难评估的，因为最差情况方法甚至可能给予一个普通衍生品非常低的价格。Branger (Branger and Schlag, 2004)认为：用最差情况方法来分析衍生品价格无异于给股票价格加上一个大于零的约束，在大部分时候是毫无意义的。Branger 还指出，由于无法得到所有的模型，最差情况方法所得到的风险度量仅仅是在某个备选集合中的最差情况的风险，而不是所有模型的最差情况；并且最差情况方法意味着决策者的风险厌恶系数为负无穷大。除了以上的理由，本文将给出另外两个原因，从理论上说明最差情况方法不适合用来研究衍生品。

首先，在不确定性能够被对冲的情况下模型的不确定性不要求溢价。这一点可以用 Ellsberg 的原始实验来说明。

Ellsberg 实验如下：

罐子 1 中有 50% 的红球和 50% 的黑球

赌局 A——若抽中罐子 1 中的红球，则得到 100 美元；

赌局 B——若抽中罐子 1 中的黑球，则得到 100 美元。

罐子 2 中有 $x\%$ 的红球和 $1-x\%$ 的黑球， x 为未知数

赌局 C——若抽中罐子 2 中的红球，则得到 100 美元；

赌局 D——若抽中罐子 2 中的黑球，则得到 100 美元。

Ellsberg 发现，人们愿意为赌局 A, B, C, D 所支付的价格呈现如下排序：

$$\text{赌局 A} \approx \text{赌局 B} > \text{赌局 C} \approx \text{赌局 D}$$

Gilboa et al(1989)认为这样的偏好暗示着赌博者更愿意为概率已知的赌局付费。但若这两个赌局都是可交易的，则 [赌局 A+赌局 B] 的价格必须等于赌局 C 加赌局 D 的价格。倘若这两者不同，比如按照 Ellsberg 实验的结果，[赌局 A+赌局 B] 更受到偏好，并且赌博者愿意付比[赌局 C+赌局 D]更多的钱。则市场上的套利者将买进 [赌局 C+赌局 D= m]并且卖出 [赌局 A+赌局 B= n]，这样这个套利者就能无风险的获得 $n-m$ 美元。除此之外，只要赌局 C 和赌局 D 都是可交易的，并且不存在交易费用，那么它们价格之和就必须是 100 美元。如果 Ellsberg 的实验成立那么意味着套利者可以分别买入[赌局 C+赌局 D] <100 美元，并立刻

在两个赌局开始赌博获得 100 美元。因此在不确定性可以被对冲的时候（如用赌局 D 对冲赌局 C），不确定性将不能够索取溢价。

同样的事情将发生在衍生品市场上。例如回报为现金的两值期权，对于看涨的两值期权来说，股票在行权时价格超过执行价格，则持有者将能够获得 x ，否则收益为零；对于看跌的两值期权，行权时价格低于执行价格的，则持有者将能够获得 x ，否则收益为零。这样一个看涨和一个看跌的两值期权相加，其价格就必须等于 x 。而在单独分析看涨或看跌两值期权的时候，由于股票的真实分布无法得知，因此它们的定价将同样存在着不确定性，但此时不确定性在无套利的假设下无法要求溢价。这样的分析也可以用于回报为资产的两值期权(asset or nothing)，而普通的香草期权(plain vanilla option)，无论是看涨还是看跌都可以由两值期权组成，这意味着普通的香草期权也不可能对不确定性支付溢价。以此类推，许多衍生品都不可能为不确定性支付溢价，否则就可能导致市场上的套利行为。

其次，衍生品市场是一个零和的市场。即有多头一定有空头，有人赚钱一定也有人亏钱。在不确定性问题，如果买方要求不确定性的溢价，则卖方就要做出相应的让步；而同时，卖方也面临着不确定性，卖方同样也会要求不确定性的溢价。因此在一个 OTC 市场上，买卖双方的成交价格就完全取决于他们的议价能力。而最差情况方法显然在此刻是无意义的，如果买卖中的一方用最差情况法定价并进行风险度量，那么他所能接受的报价一定是另一方所不能接受的。所以即使面临着未知的股票分布带来的严重的不确定性，我们也不可能对这样的不确定性要求过高的溢价，而最差情况方法无疑是一种仅考虑单方拥有最大化最小效用函数的方法，而非买卖双方博弈的最终均衡价格。同时这也说明拥有这类效用函数的个人在实际中是无法接受市场上报价的；同样，衍生品的价格也不会受到这类人的影响。基于以上两点考虑本文将继续沿用模型风险而非模型不确定性的说法。

另外，除了最差情况方法本身的缺陷外，Cont 的文章没有将复制误差纳入他的风险度量体系。Cont 认为在最差情况方法下，复制误差的衡量仅需要做情景分析，如压力测试和 VaR 来评估。然而，本文认为复制误差所带来的风险甚

至可能比初始定价所带来的风险更为重要。首先复制误差直接关系到交易员的损益；其次，复制误差可以作为判断模型好坏的重要标准。一个准确定价并且捕捉住大部分风险因子正确过程的模型，它的复制误差的期望值将接近 0，复制误差的波动率也将减小。因此本文把复制误差与初始定价风险纳入同一个框架，研究它们的影响。

第二节 模型风险的来源以及相关研究

二十一世纪以来，对模型风险（包括模型不确定性）的研究得到了学术界的重视。除了上一节提到的 Routledge and Zin（2001）和 Cont(2006)外，不少学者研究了模型风险或者影响模型风险的某个因素(Derman, 1996, Green and Figlewski, 1999, Frey, 2000, Longstaff et al., 2001, Hull and Suo, 2002, Rebonato, 2003, Schoutens et al., 2005, Cont, 2006, Detlefsen and H?rdle, 2007)。本节将着重回顾这方面的文献。

（一）模型风险的来源

在金融领域，模型风险的研究从 1996 年开始（Derman,1996）。Derman 指出在金融中，模型作为一种“高级玩具”只能描述现象而非问题的本质，一个模型它的错误可能来自多个方面：

1. 漏掉一些有解释力的因子
2. 将原本是随机的数假设成确定的数
3. 可能对某个因子假设了一个错误的动态过程
4. 做了错误的假设
5. 模型适用于某个时期，但不适用于其它时候
6. 在理想的世界适用，但是在现实有摩擦的世界不适用
7. 原理上正确，但在每个极短时间内不可能和现实相符
8. 模型正确，但模型的输入变量估计错误

9. 模型本身是理性的，但是真实世界是不理性的

这些都是模型风险的来源，虽然许多模型都在尽力放松模型的相关假设并且力图更加完美地刻画现实世界。但在金融领域，无论多复杂的模型也无法精确的预测未来，这和其它的学科，比如物理，对模型的使用差别很大。正是因为这个原因，模型以及模型风险的研究在金融中才显得尤其重要。

Cont(2006)更加全面地阐述了模型不确定性的性质、度量、及其对定价的影响。他列出了影响模型不确定性的相关因素以及管理模型不确定性的相应对策：

- a. 在一个流动性很好的期权市场上，模型不确定性几乎是不存在的。
- b. 模型不确定性的测度需要一个和模型无关的对冲策略来衡量。如果某种金融工具可以通过与模型无关的方法进行复制，则这种金融工具就不会有模型不确定性；如果能够部分的由模型无关的方法进行复制，那么对这个金融工具进行定价的模型不确定性就可以减小。
- c. 若某些衍生品在市场上具有较大的流动性，则它们可以被用来复制更复杂的衍生品。典型的例子是普通期权作为奇异期权的对冲工具。（如障碍期权的静态复制）
- d. 模型不确定性的度量必须通过对模型得出的价格和市场价格进行比较得出。
- e. 流动性好的金融工具越多，对复杂的金融产品进行静态复制的可能性就越大，因此模型不确定性就越小。

以上各点比 Derman 的观点更加详细的论述了在市场上，模型不确定性的特点。其中 c 和 e 实际上意味着，我们能够找到一些静态复制策略来确定模型不确定性的边界，尤其是在给奇异期权定价时。然而 d 的说法还有待商榷，因为市场上模型不确定性最大的产品一般是流动性较差的产品或者是 OTC 产品，而这些产品的市场价格恰恰是最缺乏有效性的，这也是不能用这类产品进行模型的参数校准的原因之一。因此，通过与市场上的价格比较来得出流动性较差的衍生品的模型不确定性的做法本身就是一个悖论。本文将通过把初始价格与其后的复制成本相比较所得到的复制误差作为衡量模型风险的标准。对于一个风险中性的交易员来说，一个产品的初始价格就是他初始收取期权费的基准，对应着交易员账户的收

入，而之后的复制成本正好是收入所对应的成本。二者相减就得到了复制误差，即交易员的净损益。

Derman 和 Cont 的研究为模型风险以及复制过程中可能产生误差的原因提供了很好的直觉性描述。他们的研究表明模型风险和复制误差的来源大多是学术上过于严格的假设，或者是忽略具体市场微观结构方面的细节。学术上常常为了能够得到一个具有良好性质的解析解，而忽略对这类问题的研究。但在真实的交易中往往是这些市场摩擦以及严格的假设导致理论模型的实际效果大打折扣。

（二）其他与模型风险相关的研究

另外有不少学者在风险的框架上对模型风险进行了研究。他们的研究包括了模型设定误差带来的风险，参数估计错误带来的风险，以及模型本身的差异对奇异期权的影响等。

其中 Green and Figlewski (1999)指出在用 B-S 模型给期权定价时，波动率的变动反映了 BS 模型的模型风险。他们研究了用历史波动率来预测 BS 的隐含波动率时，不同期限的历史波动率和不同的波动率模型的选择对各种金融衍生品定价带来的模型风险。Hull and Suo(2002) 指出为了描述市场上的模型风险，在对模型进行校准时必须使用和交易员一样的连续校准(continual recalibration)的方式来对冲期权。他们检验了在股票的真实过程是随机波动率模型下时，运用 IVF (Dupire, 1994)模型和运用 BS 模型对奇异期权进行定价，二者所产生的差别。他们发现在对复合期权和障碍期权的定价上，IVF 模型都要优于 BS 模型。但在障碍期权的定价上，IVF 模型的误差仍然很大，而在复合期权的定价上 IVF 模型的定价误差较小，这是由于 IVF 模型能够在一个时点上较为精确的定价，但是无法捕捉波动率的动态过程。Longstaff et al(2001)认为如果用的模型是错误的。那么即使市场上交易员用的是每日校准模型的方法来设定模型的参数，模型设定的偏误的同样会带来很大的定价误差。他们将多因子的利率市场模型 (LMM) 作为基准，模拟市场数据，然后运用单因子模型通过每日校准来进行动态复制并对美式互换期权 (American style swaption) 进行定价。结果表明，单因子模型的每日校准无法弥补动态利率模型的设定偏误。以上学者的研究都证明了，模型的

错误设定对定价的影响是不可忽略的；即使模型使用的参数随着信息量的增加而不断更新，错误模型的定价效果也无法很好的逼近真实模型。

Schoutens et al.(2005)比较了标的资产服从随机波动率模型，随机波动率跳跃模型,BNS, VG(Variance Gamma), NIG(normal inverse gaussian)这几种过程时，收益与标的资产的 k 阶矩相关的 $(\sum_{i=1}^n (\log(S_i / S_{i-1}))^k - K)^+$ 的衍生品定价。他们发现假设标的资产的不同过程，将导致收益为标的资产高阶矩的衍生品定价的极大差异。Schoutens et al.认为这揭示了为什么很多期权模型刻画出的普通期权 (vanilla option) 的价格都很相近，但是在为奇异期权定价的时候却产生了极大的差异。他的研究为不同模型之间的定价差异提供了最直接的证据，并且发现模型风险是和产品本身的属性有极大关系的，简单的产品使用不同的模型进行定价差异较小，而复杂的产品使用不同模型进行定价差异则较大。产生这种现象的原因在于：1. 简单产品常常在市场上的流动性较大，因此可以作为校准的对象，而校准的目标函数本身就要求模型的定价误差较小。2. 简单产品的回报常常仅与标的资产到期时刻的分布相关。这意味着一个模型即使无法很好的刻画标的资产在不同时点边缘分布之间的相关关系或者标的高阶矩的特点，但只要它能够近似描述出到期时点的标的分布，就能够较为准确的定价；但这样的模型显然无法精确的给复杂衍生品，如路径依赖或高阶矩衍生品定价。3. 复杂的产品价格对未来信息的冲击更加敏感，这意味着模型的参数变化将可能过于频繁；并且路径依赖产品的价格受市场噪音的影响将更严重，这同样意味着模型风险对复杂产品的影响要比对简单产品的影响更大。

Frey(2000)认为在对衍生品进行复制的时候，流动性导致的复制偏差是导致模型风险的一个重要原因。因此 Frey 在假设了对冲行为会对标的价格产生影响后，在 BS 模型的基础上发展出了考虑流动性因素后的期权定价模型。在考虑了流动性的影响后，期权的价格满足一个非线性偏微分方程。Frey 的研究表明，真实市场和理想市场的差异将导致模型的差异。同样市场上不可忽略的交易费用 (Leland, 1985)，以及无法实现的时间无限可分和交易带来的时滞等都有可能导致理想市场中的理论模型在真实市场中不适用从而带来模型风险。

Detlefsen and Härdle(2007)通过对期权校准的不同最小化校准函数的比较,发现不同校准函数会对定价产生较大的影响。最小化相对隐含波动率误差所得到的价格在其他指标下(最小化绝对价格误差,最小化相对价格误差,最小化绝对隐含波动率误差)表现都相对良好并且比较稳定,因此他们认为最小化相对隐含波动率误差具有较小的校准风险(calibration risk)。但是,最小化相对隐含波动率误差将导致不同模型间的定价差别加大,具有较大的模型风险。而最小化绝对价格误差具有最小的模型风险,但是有最大的校准风险,因此市场上的交易员必须在模型风险和校准风险之间进行抉择来选择校准函数。Detlefsen (2007)的研究表明了,在面对同样的市场数据时,优化目标函数的不同,误差函数的权重的差别等都可能会导致同样的模型在实际复制时出现较大差异。

这些研究大都从某个细节入手,间接地证明了与模型风险以及复制误差相关的要素。在下一章中,本文将归纳这些影响因素并通过讨论它们对复制误差的影响将其纳入衍生品定价的框架中。

第三节 模型风险的度量方法

风险度量指标包括方差、离差、期望损失、在险价值等。在对模型风险的度量上以往的学者曾经使用贝耶斯方法,包括期望价值来度量模型的风险。本节主要介绍贝耶斯模型平均的方法,并指出它的缺陷。

(一) 贝耶斯模型平均

传统的贝耶斯方法经常用在模型的选择上,通过贝耶斯公式得出的概率加权模型,这就是所谓的贝耶斯模型平均的方法。它经常被用在各个领域来判断模型风险,其基本思想是建立在贝耶斯公式的基础上的:

$$P(M_i | I) = \frac{p(I | M_i)P(M_i)}{\sum_{k=1}^n p(I | M_k)P(M_k)}$$

上述式子的左边 $P(M_i | I)$ 代表在信息集(数据) I 下,模型 M_i 是真实模型的概率(模型成立的后验概率)可以通过贝耶斯法则得出,其中 M_i 的边际似然率即

式子右边的 $p(I|M_i)$ (即在模型 M_i 成立时产生数据符合信息集 I 的概率) 为

$$p(I|M_i) = \int p(I|\theta_i, M_i) p(\theta_i|M_i) d\theta_i$$

其中 θ_i 为模型 M_i 的参数。

在得到 $P(M_i|I)$ 后, 衍生品的价格就可以用该权重对不同模型所得到的衍生品价格的期望进行加权得到

$$\hat{E}(X|I) = \sum_{i=1}^n E(X|I, M_i) P(M_i|I)$$

其中 $\hat{E}(X|I)$ 即表示在信息集 I 下, 衍生品价格的期望值, $E(X|I, M_i)$ 则表示在用模型 M_i 时计算出衍生品价格。除了衍生品价格的期望外, 模型风险也可以由不同模型的离散程度即方差表示出来

$$\hat{D}(X|I) = \sum_{i=1}^n \{E(X|I, M_i) - E(X|I)\}^2 P(M_i|I)$$

其中 $\hat{D}(X|I)$ 即为在信息集 I 下, 衍生品价格的方差。

然而, 以上的贝耶斯模型平均存在一个缺点, 即它完全从统计学原理上考虑各个模型的权重和离散程度, 并没有考虑在整个衍生品存续期内, 模型所建议的对冲策略能否在理论上复制衍生品。因此它脱离了金融衍生品定价的基本思路, 即无套利思想。并且, 这种方法所计算出的权重对于不同市场环境的稳定性值得怀疑。然而, 贝耶斯模型平均的方法在直觉上为我们提供了一些避免模型风险思路, 即利用现有模型的某种加权, 来逼近真实模型。

(二) 贝耶斯模型平均与期望损失

Branger(2004)在贝耶斯模型平均的框架下把对模型风险的衡量纳入风险管理的框架下。他的复制策略和风险度量指标表明, 考虑了模型风险后复制策略效果要比不考虑模型风险的复制策略更加稳健, 其风险指标为期望损失(expected shortfall)。但其仅给出了简单的单期离散的复制策略, 并且用期望损失来测量单

期复制策略的优劣，却没有讨论复制策略是否合理的问题。而一个在存续期内各个模型的权重以及参数完全由贝耶斯方法所得到的复制策略在金融理论上无法完全复制衍生品，则无套利原理无法实现，那么它无法为衍生品进行定价。

第三章 模型风险与复制误差

在这一章内，本文通过假设真实模型未知情况下的衍生品定价来探讨模型风险以及由其导致的复制误差对衍生品定价的影响。

第一节 模型风险对复制误差以及衍生品定价的影响

本节将提出一个能够包含初始定价误差和复制误差的框架，并以此探讨这两个因素对衍生品定价的影响。

这个框架的假设前提有两个：

1. 对于某个资产存在一个真实的模型，但是没有人能够在给其衍生品定价时得到这个模型。
2. 交易员用一个近似的模型对衍生品进行定价和相应的套期保值。

在第一个假设中，一个真实的模型表示，用这个模型对衍生品进行复制将不存在复制误差。这样的假设并不会特别严格。因为对于历史数据，只要模型设定足够复杂，我们常常能够得到非常精确的模型。但是这样的模型在事前是无法得到的。另外，对于第二个假设，本文将在下一节给出具体的复制策略。

根据以上假设，在真实模型下复制误差总是为零；而在一个近似的模型下，复制误差将为一个随机数。我们把实际定价和复制过程用两个等式来表示：

$$P^t(T, S_t, \chi_t, X) = f_t^{TM}(S, X, T, \chi_t | \theta) \quad (3.1.1)$$

$$P_{t_0}(T, S_{t_0}, \chi_{t_0}, X) = f_{t_0}^{M_i}(S, X, T | \phi_{t_0}) + \xi_{t_0}^{M_i} \quad (3.1.2)$$

(3.1.1)中 $P^t(T, S_t, \chi_t, X)$ 代表在任一时刻 t （以角标表示）衍生品的真实价值，它由到期时间 T ，状态变量 χ_t ，以及回报 X 所决定。而 $f_t^{TM}(S, X, T, \chi_t | \theta)$ 代表在一个真实的模型下，通过真实模型所得出的衍生品价格，它等于衍生品的真实价值， θ 为模型的参数。 $f_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)$ 则表示在使用 M_i 这个近似模型时的衍生品的价格。在初始定价时刻，近似模型和真实模型之间的差异为 $\xi_{M_i}^{t_0}$ 。式子(3.1.2)仅

在初始定价时成立，随着时间的推移，(3.1.2)左边所代表的衍生品价值将发生变化；此时等式右边代表交易员用近似模型进行复制所带来的复制误差再加上初始定价，即

$$\xi_t^{M_i} = \{f_{t_0}^{TM}(\bullet) - f_{t_0}^{M_i}(\bullet)\} + HE_t^{M_i} \quad (3.1.3)$$

其中 $HE_{M_i}^t$ 代表时间 t_i 时刻模型 M_i 的复制误差， $HE_{M_i}^t$ 可以通过复制成本减去初始价格到，即

$$HE_t^{M_i} = HC_t^{M_i} - f_{t_0}^{M_i}(\bullet) \quad (3.1.4)$$

此处 $HC_{M_i}^t$ 为 t_i 时刻模型 M_i 的复制成本，包括当前持有资产的价值加上在复制过程中所买卖资产的价值总和，其复制方法的详细讨论见本章第二节。由于我们无法知道真实模型，所以必须通过复制误差来衡量模型的好坏。而一个真实模型将使得复制误差在任何时刻总是为零。因此如果一个近似模型所隐含的复制策略的复制误差的波动越小，那么说明这个模型所隐含的复制策略越接近真实模型。但复制策略接近真实模型并不意味着模型本身就越接近真实模型，这点同样将在本章第二节详细说明。

同时值得注意的是(3.1.4)实际上就是交易员交易账户的净盈亏。从(3.1.4)中我们可以发现 $HC_{M_i}^t$ 是交易员为了复制衍生品而付出的资金， $f_{M_i}^0(\bullet)$ 是交易员作为衍生品空头而收取的费用。在我们无法获得真实模型的情况下， $f_{M_i}^0(\bullet)$ 并不能作为初始定价的所有依据，因为 $f_{M_i}^0(\bullet)$ 本身可能是由一个错误的模型所得到的，甚至没人能够判断它的错误程度有多大。因此，在 $f_{M_i}^0(\bullet)$ 下对复制误差的估计将是交易员所不可避免的。这点表明了现实中，衍生品市场尤其是 OTC 市场的定价很大程度上和双方的预期有关，并且下文将从理论上证明标的资产的漂移率 μ 将能够影响复制误差，从而将成为真实世界中定价所必须考虑的参数之一。第四章的模拟也证明了这一点，对风险中性定价在现实世界的应用提出了质疑。

第二节 复制策略

本节将详细介绍在真实模型未知的假设下，使用近似模型进行复制的复制策略，以及不同模型下该复制可能带来的问题。本节的复制策略除了传统的参数不变的复制策略外，主要讨论了对冲参数变动的复制策略。这种复制策略保证了在真实模型未知情况下，近似模型与市场之间的无套利。

(一) 参数的重复校准

在金融衍生品定价中，往往假设标的资产以及其它相关的状态变量服从某个过程，在此基础上构建自融资组合，对衍生品进行复制，从而获得衍生品的无套利价格。但是在真实世界中标的资产和状态变量的过程往往和模型的假设有一定的差异，资产收益率常常呈现出短暂记忆性、尖峰厚尾、跳跃、长期周期性等一系列的特征。虽然学者们在不断完善模型来尽可能的刻画资产的运动过程，但任何模型和真实模型都会有一定的差距。在真实模型无法得到的情况下，用近似模型来对衍生品进行定价就必须使模型的参数与市场保持无套利。因此，对于市场上的套期保值者，他们的复制策略所采用的模型，其参数必须是时变的，以保证在当前信息下复制策略满足市场的无套利要求。

由于参数必须随着信息而时变，因此我们必须经常对参数进行重复校准 (Hull et al(2002))，校准函数一般可以表示为(Li, 1999):

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \arg \min_{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)} \left(\sum_{i=1}^n w_i g(l_i(M_i) - l_i(\text{Market})) \right) \quad (3.2.1)$$

其中 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ 为待估参数， w_i 为每个产品误差的权重， g 为非负凸函数并且 $g(0) = 0$ ， l_i 为某一单调函数。实质上参数的校准就是获得使模型所得的价格和市场上产品的价格以某种方式加权最小化的一组参数。

在参数的校准中权重 w_i 的选择(Cont and Tankov, 2004)、 l_i 函数的选择 (Detlefsen and Härdle, 2007)、以及 g 函数的选择都将影响参数的数值。对于不同

产品，校准的标准可能不同。 w_i 经常为相关的流动性指标，比如买卖价差，交易量等。流动性越好的产品其所包含的信息含量越可靠，因此常常给流动性好的产品较高的权重。除了校准函数的选择外，在校准过程中模型的性质也将影响校准的好坏。C.He (He et al., 2006)证明了加跳跃的随机波动率模型的部分参数对期权价格非常不敏感，从而导致校准的目标函数在一个较大范围内几乎相等，这样的模型在复制中将严重影响复制策略的稳定性。

由以上的研究我们可以看出，校准的精确度和校准函数的选择，参数的稳定程度等细节都会引起复制误差大小的差异。

(二) 参数复制策略

在实际中，模型的参数需要进行每日校准来满足市场的无套利要求，但参数的变动导致通常的复制策略无法对冲参数变动所带来风险。在一个真实模型未知的情况下，如果近似模型没有很好的刻画真实模型各个状态变量，则近似模型的参数将是这些状态变量的函数，也是一个随机过程。因此，我们将考虑对参数变动的风险也进行对冲的复制策略。

Buhler(Buhler et al., 2005)给出了对参数进行对冲的方法，实际上就是用不同的衍生品来对冲被复制产品对于参数的敏感性。在BS模型中，对冲参数敏感性的方法是用一个衍生品来对冲波动率变动的风险(vega risk)。以下将简要的描述参数对冲的方法。

假设需要被复制的衍生品 F 价格由 M_i 模型近似计算得出：

$$F_{t_0}^{M_i} = f_{t_0}^{M_i}(S, X, T | \phi_t) \approx P_{t_0}(T, S_{t_0}, \chi_{t_0}, X)$$

其中 ϕ_t 为 M_i 的参数列向量，令列向量 $Delta_t$ 为被复制衍生品对 M_i 中各个参数 ϕ_t^k 的敏感度

$$Delta_t^{M_i} = \frac{\partial F_t^{M_i}}{\partial \phi_t} = \frac{\partial f_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t} = \left[\frac{\partial f_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^1}, \dots, \frac{\partial f_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^k} \right]^T$$

由于 M_i 中包含了 k 个参数，因此需要 k 种衍生品来进行对冲。并且由于真实模

型未知,所以我们在实际操作时无法得到真实敏感度而只能得到针对某个模型的参数敏感度(实际上根据假设真实模型的参数不变因此也不存在敏感度问题)。

另外在市场上的用来作为复制工具的衍生品有 k 个,用 k 个衍生品 C'_k 组成的行向量 C' 来表示,即

$$C' = [c'_1, c'_2, \dots, c'_k]$$

这些衍生品关于某个模型 M_i 参数的敏感度同样可以通过对参数求偏导得到,即

$$\frac{\partial C_t^{M_i}}{\partial \phi_t} = \frac{\partial C_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t} = \left[\frac{\partial C_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^1}, \dots, \frac{\partial C_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^k} \right]$$

令矩阵 Y (k 行, k 列) 代表复制工具对参数的敏感度

$$\begin{aligned} [Y_t]' &= \frac{\partial C_t^{M_i}}{\partial \phi_t} = \left[\frac{\partial C_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t}, \dots, \frac{\partial C_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t} \right] \\ &= \left[\frac{\partial c_t^1(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^1}, \dots, \frac{\partial c_t^1(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^k} \right. \\ &\quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ &\quad \left. \frac{\partial c_t^k(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^1}, \dots, \frac{\partial c_t^k(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^k} \right] \end{aligned}$$

要使得被复制的衍生品对于参数的瞬时敏感度为零则必须构建一个衍生品的组合来对冲被复制产品对于参数的敏感性,组合中各种衍生品的权重 W_t 必须满足:

$$Y_t W_t - \text{Delta}_t^{M_i} = 0$$

其中 W_t

$$W_t = [w_t^1, \dots, w_t^k]'$$

w^i 为 i 个衍生品在组合中所占的权重,由上式可得

$$W_t = Y_t^{-1} \text{Delta}_t^{M_i} \quad (3.2.2)$$

因此 $W_t^T C$ 即为使得被复制的衍生品在 t 时刻的瞬时参数敏感度为 0 的组合。在对冲了对参数的敏感度后,还需要用标的资产对冲剩余的关于标的资产的敏感度。为了使得对冲组合关于资产的瞬时敏感度也为零,我们要求在 t 时刻所拥有的标

的资产数量 Δ_t 满足：

$$\Delta_t S_t + W_t \frac{\partial C_t^{M_i}}{\partial S_t} = \frac{\partial F_t^{M_i}}{\partial S_t} \quad (3.2.3)$$

上式的右边代表一份被复制产品的空头头寸，左边代表复制工具的组合，包括标的资产和其他衍生品。综合(3.2.2)和(3.2.3)两个式子我们可以发现要解出标的资产和复制工具的权重，我们必须解方程组：

$$\begin{cases} \Delta_t S_t + W_t \frac{\partial C_t^{M_i}}{\partial S_t} = \frac{\partial F_t^{M_i}}{\partial S_t} \\ W_t = Y_t^{-1} \Delta_t^{M_i} \end{cases}$$

由于 Δ_t 和 W_t 分别为 t 时刻所持有的标的资产和复制工具的总量。将 Δ_t 和 W_t 对 t 求偏导，我们就可以得出资产与复制工具的瞬时变化，这和复制策略所导致的头寸净变动的交易行为相对应。在复制策略已经由 Δ_t 和 W_t 给出后，我们就可以计算出在 T 时刻用该复制策略购买资产所需要借来的资金（或债券空头）为：

$$\begin{aligned} HC_T^{cash} &= \int_0^T e^{r(T-t)} S_t d\Delta_t + \int_0^T e^{r(T-t)} C_t dW_t \\ &= \int_0^T e^{r(T-t)} (S_t d\Delta_t + C_t dW_t) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

而此时我们所拥有的资产头寸的价值为：

$$HC_T^{asset} = \Delta_T S_T + W_T C_T - F_T \quad (3.2.5)$$

T 时刻的总复制成本为

$$HC_T = HC_T^{cash} - HC_T^{asset} \quad (3.2.6)$$

根据式子 3.1.4，此时用 M_i 模型所隐含的复制策略进行对冲的复制误差就为

$$HE_T = HC_T - F_{t_0} \quad (3.2.7)$$

由于现实中复制无法做到时间的无限可分，因此我们在实际中可以把等式(3.2.4)离散化分成 n 个复制区间得到

$$\begin{aligned}
 HC_T^{cash} &= \int_0^T e^{r(T-t)} (S_t d\Delta_t + C_t dW_t) \\
 &= \sum_{t=0}^T e^{r(T-t)} [(\Delta_{t+1} - \Delta_t) S_t + (W_{t+1} - W_t) C_t]
 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

在每个小区间内，标的资产与复制工具的头寸分别增加 $\Delta_{t+1} - \Delta_t$ 和 $W_{t+1} - W_t$ ；借来的资金（或债券空头）为 $(\Delta_{t+1} - \Delta_t) S_t + (W_{t+1} - W_t) C_t$ 。按照这样的离散复制策略我们就可以得到实际中复制误差的大小。

由于 T 时刻的复制误差又代表了交易员在 T 时刻的交易账户的损益，因此研究复制误差究竟受到什么因素的影响对真实模型未知时的衍生品定价有非常重要的意义。

（三）参数复制的必要性

假设真实模型是一个包含许多状态变量的模型，而我们在建模时总是无法很好的捕捉真实状态变量，或者即使能够考虑到真实状态变量也无法完美的刻画出其运动的过程。此时我们会发现，近似模型中的参数实际上是各个状态变量的函数，只要状态变量是随机的，那么模型的参数也是一个随机过程。

下面将以 BS 模型为例子，说明参数的变动情况。在真实模型下，如(3.1.1):

$$P^i(T, S_t, \chi_t, X) = f_t^{TM}(S, X, T, \chi_t | \theta)$$

我们用几何布朗运动来对衍生品进行定价：

$$P(t, T, S_t, \chi_t, K) = GBM(S_t, K, r, t, T | \sigma_t) \tag{3.2.9}$$

此时模型中唯一的参数 σ_t 可以与衍生品价格一一对应，并且 σ_t 的变动对单个产品来说实际上包含了所有的模型错误所导致的误差，因此：

$$\sigma_t = \sigma(S_t, K, r, t, T, \chi_t) \tag{3.2.10}$$

(3.2.10)表明了由于 BS 模型本身没有考虑到其他状态变量的过程，因此其他状态变量对衍生品价格的影响将全部包含在对波动率 σ_t 的影响中。对(3.2.10)式使用伊藤引理我们可以得到：

$$d\sigma_t = \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} dt + \frac{\partial \sigma_t}{\partial X_t} \nabla X_t + \nabla X_t' \frac{\partial^2 \sigma_t}{\partial X_t^2} \nabla X_t \quad (3.2.11)$$

其中

$$\nabla X_t = (dS_t, d\chi_t^1, \dots, d\chi_t^n)'$$

理论上在有些模型的假设下，如局部波动率或 SABR 等，BS 隐含波动率可以求出解析解(SABR 下为近似解析解)。求出的这个解析解就可以理解为真实模型是局部波动率或 SABR 时，BS 的隐含波动率和其他状态变量以及参数之间的关系。

由(3.2.11)我们可以得出 BS 波动率与状态变量的关系，当状态变量存在跳跃的时候，(3.2.11)式的积分形式将变为：

$$\begin{aligned} \sigma(t, X(t)) = & \sigma_0 + \int_0^t \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} ds + \int_0^t \frac{\partial \sigma_s}{\partial X_s} \nabla X_s \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \nabla X_s' \frac{\partial^2 \sigma_s}{\partial X_s^2} \nabla X_s + \sum_{0 < s < t} (\sigma_s(X(s)) - \sigma_s(X(s-))) \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

由(3.2.12)可以看出，BS 模型的隐含波动率所服从的过程和未被 BS 模型描述的状态变量过程¹，以及状态变量对隐含波动率的影响程度²有关。

以上对 BS 模型的参数隐含波动率的分析完全可以适用于其他模型，但由于其他模型的参数不止一个，因此各个参数可能受到同样的几个状态变量的影响，也可能受到不同的状态变量的影响。无论参数如何受到状态变量的影响，在各个参数都为随机过程的情况下，对参数的复制就是合理的。并且这种复制在期权价格的回报是路径依赖的或是受到某些参数的直接（比如 Variance Swap option）影响时将更为有效。

（四）参数复制策略的缺陷

参数复制策略复制了参数的一阶敏感性，但这种复制策略假设了不同产品的参数是水平变动的。而实际上在真实模型未知的情况下，在用一个近似模型的定价时不同产品的参数变动可能是不一致的。由(3.2.12)我们可以看出模型参数的

¹ 在(3.1.12)中即状态向量 ∇X_s 的过程

² 在(3.1.12)中即 $\frac{\partial \sigma_s}{\partial s}$ 与 $\sigma_s(X(t))$ 的形式

变化过程是由产品本身与状态变量之间的真实关系所决定的。对于不同产品而言，状态变量对其影响可能不同，这将导致被复制产品与复制工具的近似模型的参数在真实模型下的变化幅度不同。所以即使我们用重复校准的方法来保证使用某个模型时该模型的参数时刻与市场保持无套利，我们也无法无限的逼近真实模型的效果，这点在之前就曾经有学者提出（Longstaff,2002）。

比如在 BS 模型下，对冲参数的方法实际上是试图把被复制产品的 vega^1 ，用其他产品的 vega 对冲。但这种对冲方法只有在被复制产品的 $\Delta\sigma_i$ 和用来复制的衍生产品的 $\Delta\sigma_j$ 平行移动时才能完全对冲掉状态变量的风险。在真实模型下波动率服从(3.2.12)，此时不同产品的隐含波动率对状态变量的敏感度不同，而状态变量的变动将可能导致被复制产品与复制工具的隐含波动率的变化出现差异。因此即使暂时对冲了对隐含波动率的敏感性，但由于无法知道隐含波动率对状态变量的敏感度，我们仍然没有办法对冲掉真实状态变量的风险。所以复制误差的大小还和实际中选取的复制工具有关：用来对冲某个衍生产品的好的复制工具必须是能够使得参数对真实状态变量的敏感度与被复制产品相似的衍生工具。这点将在第四章由模拟详细说明。

由于市场上状态变量的变化加剧的时候，参数的变化也将加剧。而参数敏感度复制策略只复制参数的一阶敏感性，这种复制思想只在参数变化很小时有效。如对近似模型做泰勒展开：

$$\begin{aligned} \Delta F(S, \theta, t, T) = & \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial F}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \Delta S^2 + \frac{\partial F}{\partial \theta} \Delta \theta \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \Delta \theta^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial \theta} \Delta S \Delta \theta \end{aligned}$$

由于前面已经推导过参数也是一个随机过程，因此当参数的变化幅度较大时，根据泰勒展开式，参数变化的高阶项将不可忽略。这点在不完全市场中尤为重要，跳跃项将导致参数经常有较大幅度的变动。为了解决参数的敏感性问题，我们往往牺牲部分的校准精确度来获得参数的稳定性，具体做法是在校准函数后加上表

¹ 即 $\frac{\partial f_{GBM}}{\partial \sigma_{imp}}$

示距离的惩罚项(Cont and Tankov, 2004)¹, 这种方法又被称为 Tikhonov 正交 (Tikhonov Regularization)。

除了同一模型的参数对不同产品可能不是平行变动外, 参数复制的策略还存在对微小的计算误差十分敏感的特点。它并不区分参数敏感度对衍生品价格影响程度的大小, (3.2.2)式展示了权重计算的方式

$$W_t = Y_t^{-1} \text{Delta}_t^{M_i}$$

我们假设一组数据, 比如真实数据为:

$$Y_t = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.02 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad \text{Delta}_t^{M_i} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.03 \end{bmatrix}, \quad W_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

但如果在计算过程中 x_t 的数值由于计算误差或离散化, 求偏导的误差变为

$$\text{Delta}_t^{M_i} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.04 \end{bmatrix}, \quad W_t = \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

但是倘若误差使得

$$\text{Delta}_t^{M_i} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.03 \end{bmatrix}, \quad W_t = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

由以上两个例子可以发现, 当基数很小时被复制产品参数敏感度的微小变化将导致计算出的权重出现很大的差异, 但实际上这样的计算误差对复制并没有很大的影响, 因为其参数的敏感度很小。相反当基数较大时, 被复制产品参数敏感度的变化对最终的对冲权重的影响将降低, 但是实际上此时的计算误差对复制的影响要大得多。正是基于这个原因, 本文并未将关于资产 **Gamma** 复制和参数的二阶项复制作为比较的复制策略之一²; 因为 **Gamma** 以及其他参数的二阶项常常具有很小的值但却有非常剧烈的变化率。

¹ 详细请参照“Financial modeling with Jump process” Chapter 13

² 经模拟检验, 若加入 **Gamma** 和参数的二阶项作为待解方程时, 累积复制误差的大都呈现扩散的现象。

(五) 模型风险对标的资产 Delta 复制策略¹的影响

一个完全市场中，在真实模型未知的情况下，仅用标的资产进行 Delta 复制策略由一个近似模型给出。由于模型的差异，每次进行 Delta 复制都将产生细小的误差，而这样的误差使得传统的风险中性定价在实际运用时由于模型风险的影响无法得到准确的结果。如果假设真实模型下衍生品价格对标的资产的敏感度为

$\frac{\partial P_t}{\partial S_t}$ ，在近似模型下衍生品价格对标的资产的敏感度为 $\frac{\partial f_t^{M_i}}{\partial S_t}$ ，二者之差意味着每

一步 Delta 对冲策略的误差：

$$\text{DeltaError}_t = \left(\frac{\partial P_t}{\partial S_t} - \frac{\partial f_t^{M_i}}{\partial S_t} \right) dS_t \quad (3.2.13)$$

因此在 Delta 复制策略中，只要 $\frac{\partial P_t}{\partial S_t} - \frac{\partial f_t^{M_i}}{\partial S_t}$ 不为零，则 Delta 策略就无法完全对冲

标的资产的风险源。同时这还意味着标的资产的漂移率将会影响到复制误差，这些复制误差完全由模型风险导致，即使加上 Gamma 对冲和参数对冲的策略也无法避免。

对于不同模型而言， $\frac{\partial f_t^{M_i}}{\partial S_t}$ 的值不同，因此相应的 Delta 复制误差也不同。由

于在一段时间内 Delta 复制的误差项为 $\int_0^t \left(\frac{\partial P_t}{\partial S_t} - \frac{\partial f_t^{M_i}}{\partial S_t} \right) dS_t$ ，那么要检验模型好坏的

其中一个办法就是检验在不同的时间段内 $\frac{\partial P_t}{\partial S_t} - \frac{\partial f_t^{M_i}}{\partial S_t}$ 的性质，包括其期望以及离

散程度等等。由于真实的模型无法得知，因此无法直接算出 $\frac{\partial P_t}{\partial S_t} - \frac{\partial f_t^{M_i}}{\partial S_t}$ 的期望和

方差等统计特征。但 Delta 误差会造成复制误差中含有标的资产的风险源，所以在模拟或实际世界中，标的资产的真实漂移项 μ 的变动对 Delta 复制的复制误差

¹ 也有学者把隐含状态变量的一阶复制统称为 Delta 复制策略 BAKSHI, G., CAO, C. & CHEN, Z. (1997)。但为了与参数复制策略区分，本文全文将最传统的仅用标的资产进行一阶复制的复制策略称为 Delta 复制策略。

的影响可以在一定程度上反映模型对模拟的数据或者真实的数据的拟合程度。

值得注意的是，除了标的资产以外，其他状态变量也可能和标的资产在现实测度中的过程相关，因此进行 Delta 复制后的复制误差与标的资产的相关性不能认为是完全由模型风险造成的，还可能与标的资产相关的其他状态变量所导致。特殊情况下，如在状态变量相同的两个模型中，Delta 复制后的复制误差与标的资产的相关程度的差异就可以被看作是两个模型模型风险的差异。

除了 Delta 误差之外，真实世界中漂移的变化还将确定性¹地影响模型未知时 Delta 复制策略的复制误差。这种确定性的误差来自复制的策略的高阶残余项，如 Gamma，具体说明将在第四章的模拟部分给出。

在市场存在跳跃的情况下，跳跃风险是 Delta 复制无法对冲的风险。即使用来计算 Delta 复制策略的模型是正确的，其复制策略也将导致一定的复制误差。所以在不完全市场的情况下，就应当综合其他的复制策略一起考虑。

(六) 不完全市场中模型风险对复制策略的影响

在不完全市场中，不存在完全复制策略。此时就必须寻找其他的复制策略。首先，在不完全市场下，对衍生品的定价思路有默顿方法、效用无差异定价等。复制思路主要有三种(Cont and Tankov, 2004)²：1. 默顿方法；2. 超复制；3. 误差最小化复制。

默顿的方法认为，跳跃风险不是系统性风险，是不需要被定价的。因此默顿方法在不完全市场下的复制策略和完全市场下的复制策略一样，只对冲连续的扩散过程，而不对冲跳跃所带来的风险。但实证证明，即使是指数也有明显的跳跃现象，这表明跳跃风险并不能被资产组合很好的对冲，因此这种复制策略将面临着系统性的跳跃风险。超复制对一个看涨期权的最优复制策略被证明是一直持有一份标的资产多头，因此超复制策略所花费的成本太大，无法给出一个合理的市场价格。

效用无差异方法的思想是基于期望效用最大化的定价方法，它对投资者的主

¹ Delta 误差本身是不确定的，因为我们无法知道某个模型的 Delta 策略是不是高于或低于真实模型的 Delta 策略。

²详细请参照“Financial modeling with Jump process”

观效用函数较为敏感，并且大部分效用函数都不满足线性定价法则，因此并不能很好的应用在实际市场上。在效用无差异的框架下设定具体的效用函数将使得问题被简化，如当效用函数为指数效用函数时，投资者将选择众多风险中性测度中的最小熵测度¹。另一个更为直观的效用函数是，当效用函数为 $U(x) = -x^2$ 时，效用无差异定价将满足线性定价法则。此时，效用无差异定价就简化为最小化二次变差定价，其基本思想就是使得不完全市场下复制策略的复制误差的平方的期望最小。在纯跳跃的过程中，对冲跳跃风险必须持有一份标的资产，而在纯扩散过程中对冲标的连续变动只需要持有部分资产，二者的复制策略是不相容的。因此在最小化复制误差平方的期望的复制策略下，为了对冲标的资产的连续变动与跳跃的风险，我们必须在连续变动和跳跃风险之间进行权衡，以获得最优的复制比例。

$$\Delta(t, S) = \frac{\sigma^2 \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} + \frac{1}{S} \int v_z(dy) z [C(t, S(1+z)) - C(t, S)]}{\sigma^2 + \int z^2 v_z(dy)} \quad (3.2.14)$$

然而这个复制比例同样是在模型参数不变的情况下用标的资产对衍生品进行复制。若要求模型参数时刻与市场保持无套利状态，则需要考虑到模型参数变动的风险。

在有跳跃情况下，跳跃本身的参数变动是不可对冲的。但从实际中离散的复制策略来看，即使是扩散过程，其模型参数也总是表现出小幅跳跃，在参数变动很小的时候，参数对冲的方法能够对冲掉部分的参数敏感度。唯一的不同在于当市场上真正的跳跃发生的时候，扩散过程的模型参数将发生较大的跳跃，此时在前一时刻进行的参数对冲不能很好的对冲掉参数大幅变动，从而产生较大的复制误差。

本文后面的模拟中并不考虑用近似的不完全市场模型来进行检验模型风险，这样做的原因在于：运用不完全市场模型所隐含的最小复制误差策略本身由于市场不完全所导致的复制误差与模型风险所导致的复制误差无法分辨，因此无法判断模型风险对复制误差的影响。但这并不意味着这方面的研究是无意义的，相反

¹详细请参照“Financial modeling with Jump process”, Chapter 10

这方面的深入研究将进一步扩展复制策略并更加贴近市场。

第三节 真实模型未知情况下影响复制误差的因素

根据以上几节的论述，我们可以发现影响复制误差的因素众多，本节将影响复制误差的各个因素放入定价和复制的流程图中：

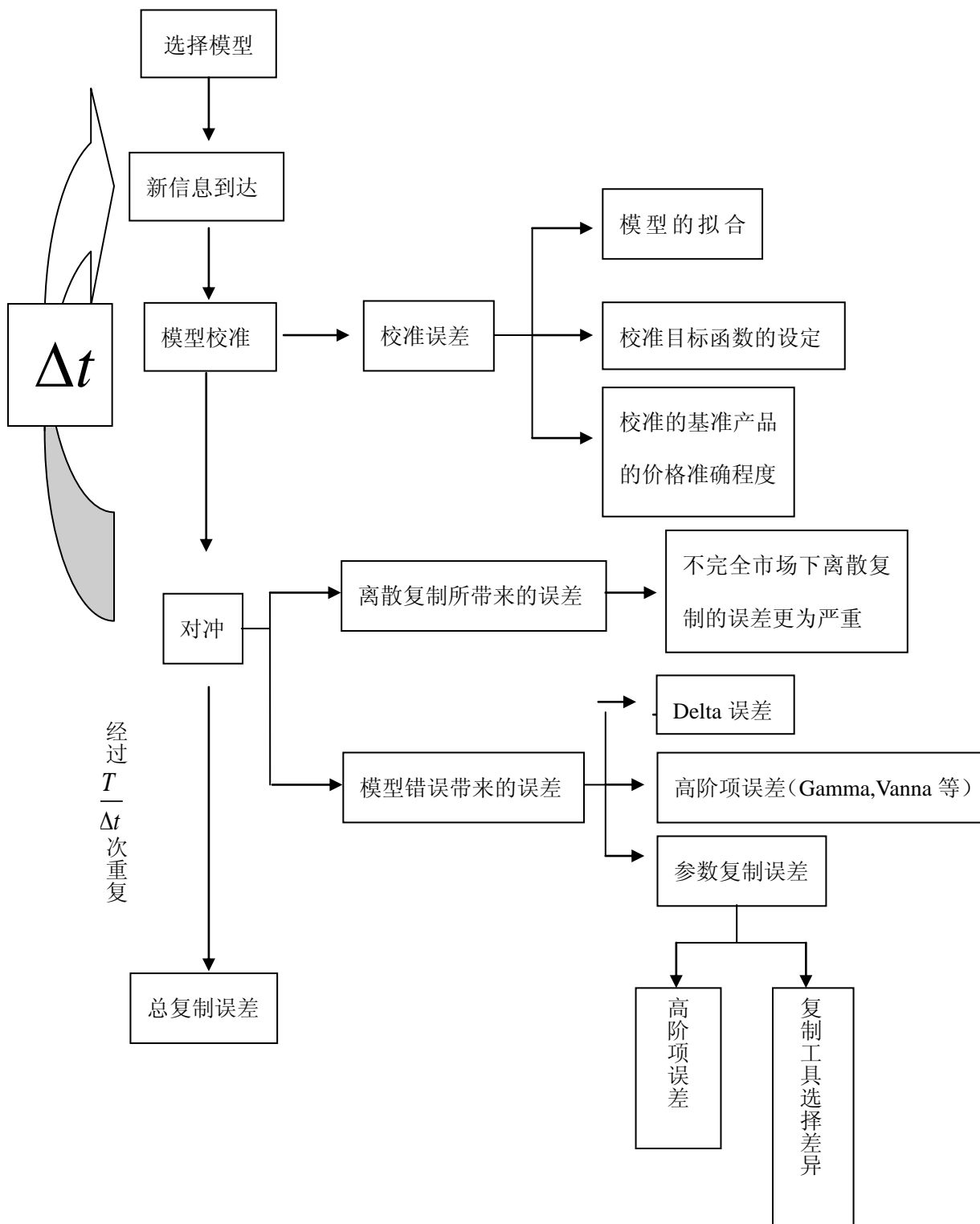


图 3.1: 衍生品复制流程与复制误差的影响因素

由上图我们可以发现，影响复制误差的因素可能出现在复制的任何一个部分，并且这些因素对总复制误差的影响大都是非线性的，还有不少是以隐函数形式来影响复制误差。因此，在第四章我们将运用模拟来获得这些影响因素对复制误差的敏感度。

第四章 数值模拟

对于模型风险的研究来说,使用真实数据的好处在于得到的结论可以直接揭示在市场上各种模型的好坏,亦可以比较不同的复制方法对真实数据的实用性。然而使用真实数据也会带来一些无法弥补的缺点,比如数据的不可控性,这导致我们很难一一对应的研究何种因素将导致复制误差的变动。并且真实世界中状态变量只有一条路径,这将使得模型风险的研究结果的稳定性受到样本偏差的质疑。因此在这章,我们将用模拟的数据来研究模型风险和复制误差。

第一节 模拟所使用的模型

在本节中,我们将先介绍本文模拟所使用的模型。本文假设随机波动率跳跃模型为真实模型,用几何布朗运动、Heston-Nandi 模型、局部波动率模型以及 SABR 模型作为定价和复制所使用的模型。

(一) BS 模型

几何布朗运动是 BS 框架中用来描述股票价格运动最简单的过程之一,在风险中性定价中几何布朗运动的未知参数仅有波动率一个,这使得它在参数校准上非常方便。在风险中性世界,该模型可表示为:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

在几何布朗运动的框架下,看涨期权的价格为:

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (4.1.1)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

(二) 局部波动率模型

Dupire(1994)推导出局部波动率模型, 在风险中性世界下, 该模型可表示为:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dW_t \\ \sigma_{loc}^2 &= \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \\ \sigma_{imp}^2 T &= \int_0^T \sigma_{loc}^2(t) dt \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

该模型的好处在于可以较好的拟合整个波动率曲面, 并且可以较为自由的选择所需的局部波动率函数。大部分研究认为局部波动率是时间和相对价值(moneyness)的函数。

(三) Heston-Nandi 模型

Heston-Nandi 模型(Heston and Nandi, 2000)是 Heston 模型的简化, 因此我们先来回顾 Heston 模型。Heston(Heston, 1993, Heston and Nandi, 2000))提出了随机波动率模型, 在风险中性世界中, 该模型可表示为:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{V_t}S_t dW_t^1 \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t)dt + \omega\sqrt{V_t}dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 &= \rho dt \end{aligned}$$

在随机波动率模型下, 波动率服从 CIR 过程, 具有均值回复的特性。标的资产和波动率之间的相关性为 ρ 。在风险中性世界中, 假设 Heston 模型波动率的价格为零时, 香草期权的价格必须通过傅立叶变换得到:

$$C = e^{-rT} \left[\frac{1}{2}(F - K) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (Ff_1 - Kf_2) du \right] \quad (4.1.3)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1 &= \text{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} \varphi(u-i)}{iuF} \right) \\ f_2 &= \text{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} \varphi(u)}{iu} \right) \end{aligned}$$

上式中 $\varphi(u)$ 为 $\ln S_T$ 的特征函数, F 为标的资产的远期:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= E(e^{iu \ln S_T}) = e^{C(\tau, u) + D(\tau, u)V_0 + iu \ln F} \\ C(\tau, u) &= \frac{\kappa \theta}{\omega^2} \left\{ (\kappa - \rho \omega u i + d(u))\tau - 2 \ln \left(\frac{c(u)e^{d(u)\tau} - 1}{c(u) - 1} \right) \right\} \\ D(\tau, u) &= \frac{\kappa - \rho \omega u i + d(u)}{\omega^2} \left\{ \frac{e^{d(u)\tau} - 1}{c(u)e^{d(u)\tau} - 1} \right\} \\ c(u) &= \frac{\kappa - \rho \omega u i + d(u)}{\kappa - \rho \omega u i - d(u)}, d(u) = \sqrt{(\rho \omega u i - \kappa)^2 + iu\omega^2 + \omega^2 u^2} \\ \tau &= T - t \\ F &= S_t e^{r(T-t)}\end{aligned}$$

在随机波动率模型下，波动率服从 CIR 过程，具有均值回复的特性。标的资产和波动率之间的相关性为 ρ 。而 Heston-Nandi 模型为 $\rho = -1$ 的 Heston 模型，这样假设的好处在于减少了风险源的个数，并且可以获得隐含波动率的近似解析解。

(四) SABR 模型

Hagan(Hagan et al., 2002)提出了 SABR¹模型，并且指出由于市场上存在的普通香草期权可以用于对冲波动率风险，因此随机波动率模型是一个完全市场模型。在风险中性世界下，该模型可表示为：

$$\begin{aligned}dF_t &= \alpha F_t^\beta dW_t^1 \\ d\alpha_t &= \nu \alpha dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 &= \rho dt\end{aligned}$$

该模型中 $F_t = S e^{rt}$ 。和随机波动率模型不同之处在于其股票价格服从一个 CEV 过程，而其波动率是一个维纳过程。通过奇异摄动(Singular perturbation)的方法，Hagan 获得了普通看涨期权隐含波动率的解：

$$\begin{aligned}C &= D(\tau) \{ fN(d_1) - KN(d_2) \} \\ d_{1,2} &= \frac{\ln(f/K) \pm \frac{1}{2} \sigma_{imp}^2 \tau}{\sigma_{imp} \sqrt{\tau}}\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

¹ SABR 是“Stochastic-AlphaBetaRho”的缩写

$$\sigma_{imp} = \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2} \left\{ 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \ln^2(f/K) + \frac{(1-\beta)^2}{1920} \ln^4(f/K) + \dots \right\}} \cdot \left(\frac{z}{x(z)} \right) \cdot \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{(fK)^{1-\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta v\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} v^2 \right] \tau + \dots \right\}$$

其中

$$z = \frac{v}{\alpha} (fK)^{(1-\beta)/2} \ln(f/K)$$

$$x(z) = \ln \left\{ \frac{\sqrt{1-2\rho z + z^2} + z - \rho}{1-\rho} \right\}$$

(五) 随机波动率跳跃模型

Bates(Bates, 1996)在随机波动率模型基础上发展了随机波动率跳跃模型:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^s + dZ_t$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \omega \sqrt{V_t} dW_t^v$$

$$dW_t^s dW_t^v = \rho dt$$

其中 Z_t 是一个密度为 λ 的复合泊松过程, 其每次跳跃 J 是各自独立的, 并且服从 $\ln(1+J) \sim N(\ln(1+\bar{k}) - \frac{1}{2}\delta^2, \delta^2)$ 的分布。由于假设真实过程是随机波动率跳跃模型, 因此我们实际上做了不完全市场的假设, 这比较符合现实情况。在随机波动率跳跃模型下, 欧式看涨期权的价格同样可以通过对其特征函数做傅立叶逆变换得到。由于跳跃过程和扩散过程之间相互独立, 因此在随机波动率跳跃模型中, 股票价格对数的特征函数等于扩散过程的特征函数乘以跳跃过程的特征函数。

$$C = e^{-rt} \left[\frac{1}{2}(F - K) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (Ff_1 - Kf_2) du \right] \quad (4.1.5)$$

其中

$$f_1 = \text{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} \varphi(u-i)}{iuF} \right)$$

$$f_2 = \text{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} \varphi(u)}{iu} \right)$$

$$\varphi(u) = E(e^{iu \ln S_T}) = e^{C(\tau,u)+D(\tau,u)V_0+iu \ln F} \bullet e^{t\lambda(e^{-\delta^2 u^2/2+i(\ln(1+\bar{k})-\frac{1}{2}\delta^2)z}-1)}$$

$$C(\tau,u) = \frac{\kappa\theta}{\omega^2} \left\{ (\kappa - \rho\omega ui + d(u))\tau - 2 \ln \left(\frac{c(u)e^{d(u)\tau} - 1}{c(u) - 1} \right) \right\}$$

$$D(\tau,u) = \frac{\kappa - \rho\omega ui + d(u)}{\omega^2} \left\{ \frac{e^{d(u)\tau} - 1}{c(u)e^{d(u)\tau} - 1} \right\}$$

$$c(u) = \frac{\kappa - \rho\omega ui + d(u)}{\kappa - \rho\omega ui - d(u)}, d(u) = \sqrt{(\rho\omega ui - \kappa)^2 + iu\omega^2 + \omega^2 u^2}$$

$$\tau = T - t$$

$$F = S_t e^{(r-\lambda\bar{k})(T-t)}$$

第二节 离散化模拟

本节将详细介绍模拟的方法以及相应的需检验的假设等。首先本文假设的真实模型是随机波动率跳跃模型，采用该假设是由于随机波动率跳跃模型含有跳跃，这可能能够部分模拟市场上的跳跃现象。离散化方法采用随机波动率模型与跳跃过程分别模拟然后相加，这样做是因为本文假设跳跃过程是独立于扩散过程的。

随机波动率的离散化方法本文用 IJK-IMM 方法(Lord et al., 2008)，即

$$\begin{aligned}
 V_{t+\Delta t} &= V_t - \kappa \Delta t (V_{t+\Delta t} - \theta) + \omega \sqrt{V_t} \cdot \Delta W_t^v + \frac{1}{4} \omega^2 \cdot (\Delta W_t^{v^2} - \Delta t) \\
 \ln S_{t+\Delta t} &= \ln S_t + \mu \Delta t - \frac{1}{4} \Delta t (V_t + V_{t+\Delta t}) + \rho \sqrt{V_t} \Delta W_t^v \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\sqrt{V_t} + \sqrt{V_{t+\Delta t}}) \cdot (\Delta W_t^S - \rho \Delta W_t^v) + \frac{1}{4} \omega \rho (\Delta W_t^{v^2} - \Delta t)
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

(4.2.1)中的参数与(4.1.5)中的参数涵义一致。

模拟跳跃过程的时候，由于本文假设跳跃的到来服从泊松分布，因此可以推导出跳跃时间的间隔服从指数分布。所以本文先用指数分布模拟出每次跳跃的间隔，累加即可得跳跃到达的时间，跳跃的幅度服从对数正态分布。将每次跳跃的幅度加到随机波动率模型的股票价格上，我们就得到了随机波动率跳跃模型假设下的股票价格序列。在此基础上，用随机波动率跳跃的期权定价模型给不同期限以及不同价值程度(moneyness)的普通欧式看涨期权进行定价，并以此假设为期权的真实价格作为校准的基准。

在模拟中本文选用的参数如下：无风险利率 $r = 0.02$ ，随机波动率跳跃模型中的波动率与标的资产的相关性 $\rho = -0.3$ ，标的资产初始价格为 12 元，执行价格 K 为 12 元，初始波动率为 0.0625，波动率的均值回复速度 $\kappa = 5$ ，波动率的波动率 $\omega = 0.25$ 动，长期均值为 $\theta = 0.0625$ 。跳跃过程的参数为，跳跃幅度服从 $\ln(1+J) \sim N((1+\bar{k}) - \delta^2, \delta)$ 的对数正态分布其中 $\bar{k} = -0.1$ ， $\delta = 0.1$ ，跳跃到达的泊松过程服从密度 $\lambda = 0.5$ 。

在有了市场的股票数据和期权数据后，我们分别用 BS 模型、局部波动率模

型、Heston-Nandi 随机波动率模型以及 SABR 模型来进行参数校准。参数校准后，我们分别运用 Delta 复制、参数敏感度复制以及修正的参数敏感度复制来对一个普通的欧式看涨期权进行复制。这样做的最重要的原因在于：普通的欧式期权在各个模型下有解析解。首先，我们通过解析解来求解期权能够避免数值算法本身所带来的误差干扰对模型风险大小的判断。其次，在模型进行参数敏感度复制时，数值方法算出的敏感度将极其不稳定，这种不稳定性会导致对数值敏感的参数复制策略完全失效。以上的两个因素都会造成复制误差中含有大量的数值计算所带来的偏误，这样我们就无法判断模型风险对复制误差的影响程度。但采用欧式期权作为被复制工具也存在着一定的问题：就是我们无法判断模型风险对奇异期权的影响，而这种影响往往是期权定价过程中最难被解释的。想要判断出模型风险对奇异期权的影响，我们必须找到一个非常稳定的数值算法，以保证其在计算价格和敏感度时候的误差和模型风险所带来的误差相比能够小到被忽略不计。然而从第三章参数复制策略的所受到的影响来看，使用符合这种要求的数值方法本身就是一个挑战。

第三节 参数敏感度复制与 Delta 复制

本节中，我们将用随机波动率跳跃模型模拟真实股票路径，并用前一章所给的公式得出衍生品的真实价格。然后用几何布朗运动、局部波动率模型、随机波动率模型以及 SABR 对模拟出的“真实”数据进行重复校准。在校准参数的基础上对一个普通的平价欧式期权进行参数敏感度复制和 Delta 复制，并分析两种复制方法复制后的复制误差。本节和第四节所用的模拟中的差异分析，全部都控制了其他可能影响复制的相关变量。¹

（一）两种策略的复制误差的统计比较

为了能够更好的比较参数敏感度复制策略和 Delta 复制策略，下文将参数敏感度复制策略的复制误差的相关统计指标（见附录：表 4.1）与 Delta 复制的相关统计指标（见附录表：4.2）进行了比较。下图展示了不同模型下，两种复制策略的统计图。

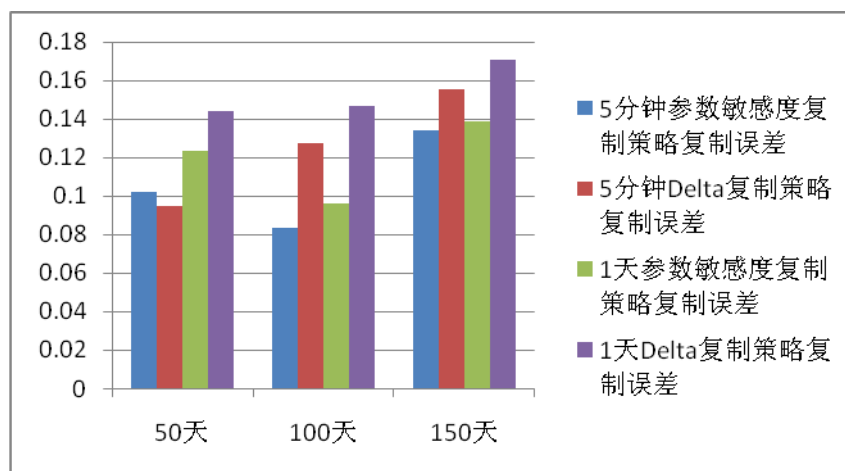


图 4.1:BS 模型参数敏感度复制与 Delta 复制标准差

¹ 包括随机数本身，即比较的几条路径的随机数序列是相同的

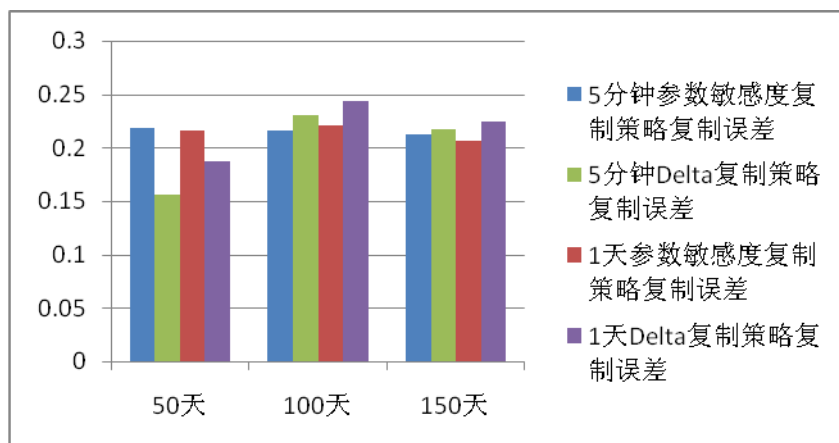


图 4.2:局部波动率模型参数敏感度复制策略与 Delta 复制标准差

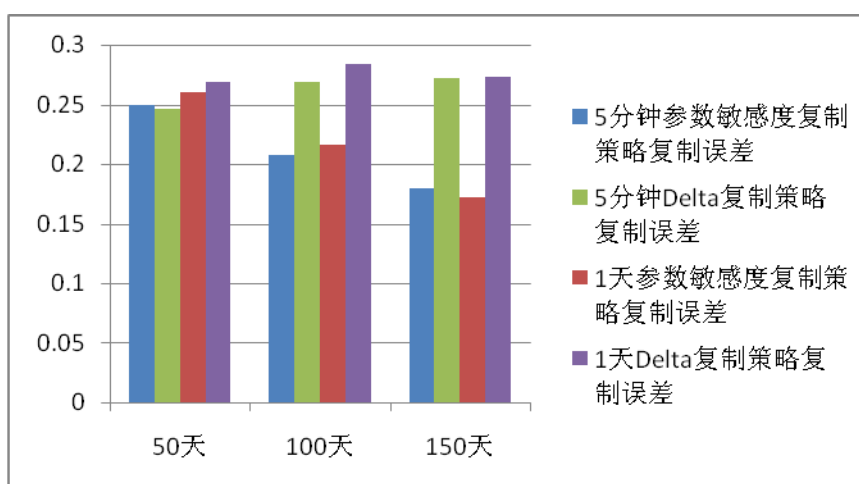


图 4.3:Heston-Nandi 模型参数敏感度复制策略与 Delta 复制标准差

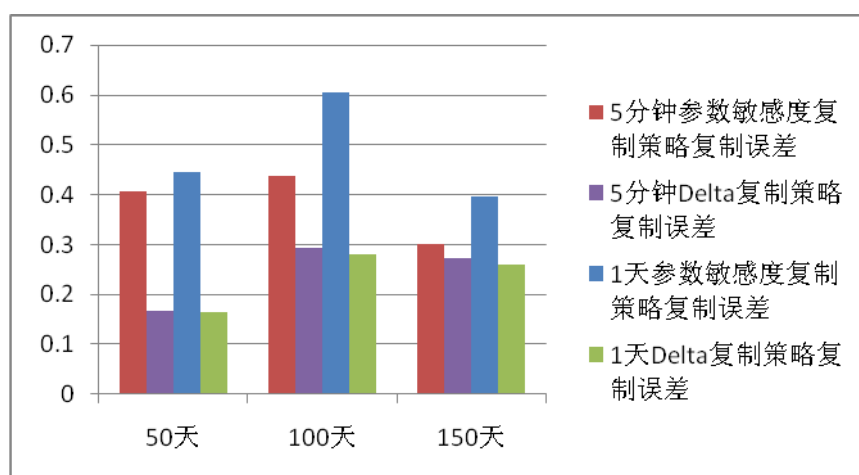


图 4.4: SABR 模型参数敏感度复制策略与 Delta 复制标准差

由上图可以看出，在不同的模型下参数敏感度复制策略和 Delta 复制策略各有优劣。参数敏感度复制策略在 BS 模型下表现最为稳定；在局部波动率模型下，

二者的稳定性差别不大；在 Heston-Nandi 模型下，参数敏感度复制策略表现得略优于 Delta 复制策略；但在 SABR 模型下却表现出很大的波动。

表 4.1 与表 4.2 中存在一个比较特别的现象，即各个模型的复制误差的均值都为正数，并且随着到期时间的增加而减小。这个数据现象主要是由随机波动率跳跃模型本身相对于其他模型的短期高估引起的，并且这个高估程度随着期权到期时间的增加而减小(Bakshi et al., 1997)。由于随机波动率跳跃模型对期权价格的短期高估，则用其他模型对其生成的期权价格序列进行校准就会使得用其他策略所购买的用于对冲被复制产品的头寸多于应该购买的数量。而模拟中股票本身存在向上的漂移，对冲看涨期权空头的头寸组合价格一定与标的资产价格是正相关的，因此多购买的那部分头寸就会复制误差均值为正。在表 4.1 与表 4.2 中的均值随着期限的增加而降低的现象也与高估程度的变化相吻合。

需要指出的是，由于假设的真实模型引起的相对高估或低估对本文的研究并没有影响。因为本文的研究目的并不在衡量绝对的模型风险¹，而在于比较各个模型之间的相对模型风险；即不同的状态变量特征如何影响各个模型的模型风险的情况，以及复制误差稳定性的变动。这一切都是假设真实模型未知时，从各个模型复制误差的比较中得到的相对变化。

（二）参数敏感度复制策略对不同复制工具的敏感度

第三章中曾经提到参数敏感度复制策略有对复制工具较为敏感的特点，因此我们用不同期限的看涨和看跌期权来进行参数敏感度复制，来分析复制工具不同时，复制参数敏感度的差别。

我们将复制工具分为三组，在其中每组分别选择了四个不同期限的平价看涨和看跌期权，其期限如下表：

表 4.3 复制工具及其期限

	Call1	Call2	Put1	Put2
复制组合 1	0.3	0.45	0.35	0.55
复制组合 2	0.5	0.8	0.7	1

¹ 绝对模型风险在实际中真实过程不知道的情况下是无法得到的。

复制组合 3	1	1.2	1.1	1.5
--------	---	-----	-----	-----

表 4.4 复制误差均值

使用模型	组合 1	组合 2	组合 3	Delta 复制
BS 模型	0.161735126	0.225972	0.259531	0.2098168
局部波动率模型	0.256278166	0.266254	0.163705	0.1508348
Heston-Nandi 模型	0.258054109	0.930457	57.26013	0.1603299
SABR 模型	0.421962647	0.661458	1.975343	0.2528109

表 4.5 复制误差标准差

使用模型	组合 1	组合 2	组合 3	Delta 复制
BS 模型	0.117177	0.161795	0.176207	0.170933
局部波动率模型	0.214634	0.204965	0.161702	0.196987
Heston-Nandi 模型	0.241985	0.895319	71.85336	0.275382
SABR 模型	0.495091	0.600607	2.54377	0.183322

由表 4.1 到表 4.3，我们可以发现，随着复制工具的期限与被复制工具的期限差距越来越大，Heston-Nandi 模型和 SABR 模型的参数复制策略都反映出他们不收敛的特点，而 BS 模型和局部波动率模型的参数敏感度复制策略则与复制工具的差异无太大关系。其原因可能在于本文使用 BS 模型和局部波动率模型做参数复制时都只引入一个衍生工具来对冲波动率的风险，但在使用 Heston-Nandi 和 SABR 模型时都引入了四个衍生工具来对冲参数风险。此时由于模型参数的真实过程难以判断，并且复杂模型的校准容易造成参数的跳动，因此参数复制策略将极不稳定。如表 4.4 与 4.5 所示，Heston-Nandi 和 SABR 在使用期限与被复制差异很大的组合作为复制工具时，它们的均值和方差出现了不收敛的特性。在实际使用参数复制策略的时候，交易员必须对某个所需工具的系数大于 1 的复制组合给予特别大的关注，模拟显示当所需对冲的头寸大于 1 的时候，复制策略很可能陷入一个正反馈的循环。

解决参数复制策略不稳定的办法除了尽量减少参数个数外，直觉上还可以通

过用仅含有单一参数风险的衍生品来进行对冲¹，比如用方差互换(variance swap)来专门规避波动率风险等。单一风险的衍生品作为对冲的工具稳定性比多参数风险的衍生品效果要好的多。但是并非所有的参数在市场上都能够找到专门针对参数的衍生品，因此如何用各种不同产品来对冲参数风险将是另一个值得研究的问题。

第四节 两种复制策略对模型风险的敏感度

在第三章我们从理论上分析了模型风险，以及外来的信息冲击对重复校准并在新的参数下进行复制的影响，本节就主要将模拟的结果用来表明状态变量的参数不同将如何影响复制结果。

(一) 现实测度对复制误差的影响

在错误的模型假定下，进行重复校准并且复制，并无法消除真实世界测度的影响。为了表明这一点，在模拟中我们用同样的随机数来生成真实的标的过程，但把标的漂移 μ 设置为不同的参数，以此来判断 μ 的变化即现实测度对错误模型假定下复制误差的影响。

表 4.6 现实测度改变对复制的影响（期限 50 天，模拟 20 条路径）

5 分钟参数敏感度复制策略				
$u=0.02=r$	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.117195	0.107644	0.051943	0.206689
误差标准差	0.060689	0.055813	0.048165	0.316914
$u=0.2$	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.10794	0.099356	0.043375	0.155183

¹ 本文的结果与 BAKSHI, G., CAO, C. & CHEN, Z. (1997) Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models. *JOURNAL OF FINANCE-NEW YORK*, 52, 2003-2050.的结果相对比大致可得出这样的结论

模型风险及其对衍生品定价的影响

误差标准差	0.065551	0.05879	0.052794	0.259393
u=0.5	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.174238	0.265094	0.047737	0.086918
误差标准差	0.116607	0.141831	0.121439	0.147966
5 分钟 Delta 复制策略				
u=0.02=r	GBM	local	Henton nandi	SABR
误差均值	0.184087	0.133136	0.140969	0.229727
误差标准差	0.086182	0.076308	0.083501	0.222092
u=0.2	GBM	local	Heston -Nandi	SABR
误差均值	0.173249	0.123832	0.128403	0.190042
误差标准差	0.087416	0.074752	0.080928	0.212525
u=0.5	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.168564	0.122233	0.085452	0.139519
误差标准差	0.126944	0.136932	0.181509	0.143135

显然由上表可以看出，不同的漂移对复制结果有一定的影响，Delta 复制的误差随着 u 的上升有略微的下降。这主要是由两方面原因引起，首先从本章第三节的结论可以得知，我们复制所用模型的 Delta 值实际上都过多的复制了标的资产，从而标的资产的一个正漂移将导致最后的复制误差为正，而这种误差将随着期限的增加而减小；此处我们用 50 天的短期期权作为被复制工具，将很明显的发生过多复制现象。但此处随着 u 的增大，Delta 复制策略的均值反而有所下降

和第一个原因相矛盾。这主要是因为第二个原因： Gamma^1 并没有被复制。对于一个看涨期权来说，它的 Gamma 是一个正数，并且 Gamma 值较大。当 u 较小的时候，由于每次复制的频率很短，所以股票的价格变动很小， Gamma 本身的作用也很小。但是当 u 增大的时候，如表中达到 0.2 与 0.5 时，股票本身就有一个很大的确定性变动，这个变动在经常比随机项带来的变动更大²。所以，漂移项 u 的变动实际上导致了 Gamma 的影响不可忽略，此处的看涨期权空头将导致复制者持有负 Gamma ，从使得收益降低；而两个影响相互抵消后，使得最后对复制误差的影响变得很小，但可以看出第二个影响仍然更大一些。

在本文中，我们必须将由于真实模型设定的所导致的数值变化的原因分离。即在真实中，由于模型错误所导致的 Delta 误差的大小我们不能确定。但是真实测度中漂移的变化导致单位时间内股价变动幅度的变化会使得风险中性世界的 Delta 复制策略有一个确定性的偏误³。

（二）波动率的变化对复制误差的影响

由第三章状态变量的波动将导致参数的波动加大，从而影响复制的效果。因此我们通过模拟中提高波动率的波动的办法来测试状态变量的波动增大对复制误差的影响

表 4.7 状态变量波动率改变对复制的影响（期限 50 天，模拟 20 条路径）

5 分钟参数敏感度复制策略				
$\omega=0.15$	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.116883	0.097815	0.057109	0.308444
误差标准差	0.052784	0.06165	0.067748	0.616884

¹ 还可能包括其他的高阶项

² 尤其是当 $u=0.5$ 时，波动率仅为 0.25，而标准正态所产生的随机数超过 2 的概率很小；标的的变化有 $N(2)-N(-2)\approx 94.93\%$ 的可能随机变动没有确定性变动的影影响大。当 $u=0.2$ 时，这个概率大约为 57.62%。而漂移为 $r - \lambda k = 0.07$ 时，这个概率仅为 22.06%。因此可以看出这里 u 的变化将导致 Gamma 的影响增大。

³ 这种偏误会由于被复制产品的属性不同而不同，如复制看涨期权的空头，那么由真实测度的变化导致的偏误将使得复制者亏钱；而复制看跌期权的空头正好相反，将使得复制者赚钱。

omega=0.25	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.116552	0.115958	0.05058	0.097359
误差标准差	0.063052	0.056895	0.047624	0.567767
omega=0.5	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.114312	0.116746	0.051655	0.420685
误差标准差	0.081652	0.069754	0.065743	1.404744
5 分钟 Delta 复制策略				
omega=0.15	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.190608	0.13301	0.146358	0.230074
误差标准差	0.073998	0.059404	0.081871	0.238469
omega=0.25	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.177909	0.136381	0.145605	0.212668
误差标准差	0.090151	0.077412	0.090967	0.178326
omega=0.5	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.176016	0.140835	0.136155	0.145327
误差标准差	0.123148	0.114868	0.144601	0.143101

由表中可以看出除了 SABR 模型外, 5 分钟 Delta 复制策略复制误差的标准差随着状态变量波动率的增大而增大, 这表明状态变量的波动程度对错误模型下的 Delta 复制策略有明显的影响作用。但参数复制策略波动率的敏感性并不明显, 这在某种程度上反映了参数复制策略对模型风险的敏感要小一些。SABR 模型的表现两种复制策略下所呈现出极为不稳定的行为可能是来源于 SABR 模型与随机波动率跳跃模型的差异较大, 导致其拟合效果出现明显偏误。而 BS 模型与局部波动率模型虽然拟合效果可能也不好, 但其只有一个被复制参数, 因此具有较好的稳定性。Heston-Nandi 模型的参数个数与 SABR 模型相同, 但其过程更加接近随机波动率跳跃模型, 因此它的效果也较为稳定。

(三) 跳跃频率的变化对不同复制策略复制误差的影响

除了波动率代表了状态变量的变化程度外, 跳跃频率的不同也将影响复制误

差的变化:

表 4.8 跳跃频率的改变对复制的影响 (期限 50 天, 模拟 20 条路径)

5 分钟参数敏感度复制策略				
lamda=0.5	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.012638	0.084632	0.089465	0.960344
误差标准差	0.0541212	0.0720403	0.0941997	0.2970355
lamda=1	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.024191	0.095053	0.088959	1.317418
误差标准差	0.0481126	0.0796764	0.1000948	0.6470987
lamda=2	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	-0.01645	0.123871	0.156948	0.557539
误差标准差	0.3957291	0.4611751	0.1785661	0.4809102
5 分钟 Delta 复制策略				
lamda=0.5	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.05294	0.150416	0.209856	0.794473
误差标准差	0.082377	0.103628	0.137896	0.339779
lamda=1	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.067074	0.165481	0.20343	0.701275
误差标准差	0.076618	0.117742	0.152605	0.415254
lamda=2	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.090906	0.488653	0.112914	0.382744
误差标准差	0.176322	0.679532	0.156196	0.357501

在跳跃频率不同的情况下, Delta 复制策略和参数复制策略的复制误差都呈现出比较混乱的统计规律, 即使是在其他表现中稳定的 BS 模型也不例外; 这表明跳跃频率的变化对连续的扩散过程的复制是非常重要的, 而没有捕捉住跳跃因

子将导致复制的结果很不稳定。跳跃频率的变化将导致模拟的漂移项增加¹，并且将使得出现跳跃的概率加大，造成连续扩散模型复制的参数和标的变化都更加不稳定。

(四) 不同模型与复制策略复制误差的路径

以上结果都为期权到期时候的复制误差，它直接关系到交易员的最后损益，所以尤其重要。但是基于流动性的考虑，复制误差的在存续期内是否稳定也必须作为衡量模型好坏的因素之一。下面将给出模拟的一条路径下，两种复制策略的累积复制误差在存续期内的均值和方差：

表 4.9 存续期内不同模型复制误差的均值方差

模型	参数复制策略		Delta 复制策略	
	误差均值	误差方差	误差均值	误差方差
GBM	0.002	4.49E-05	-0.0112	0.0013
local	0.0161	6.33E-04	-0.0486	0.0085
Heston-Nandi	0.4354	0.0165	-0.0746	0.0226
SABR	0.3789	0.9539	-0.0487	0.0085

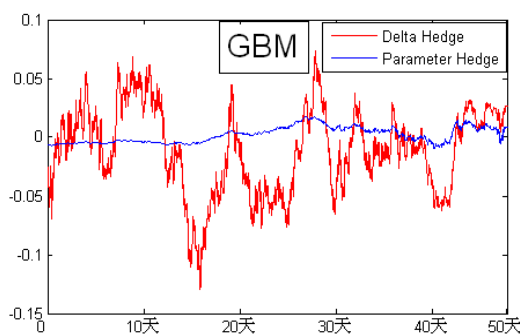


图 4.5 BS 模型复制误差的路径

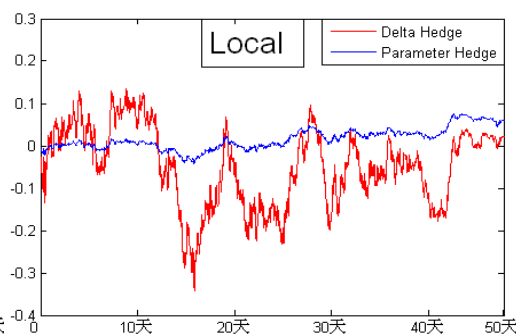


图 4.6 局部波动率模型复制误差的路径

¹ 本文模拟跳跃时在漂移去除了跳跃的均值作为补偿(compensated poisson process)

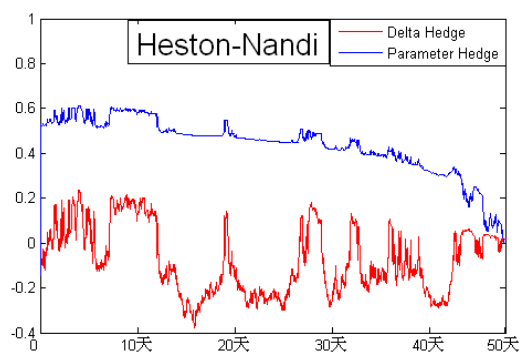


图 4.7 Heston-Nandi 模型复制误差的路径

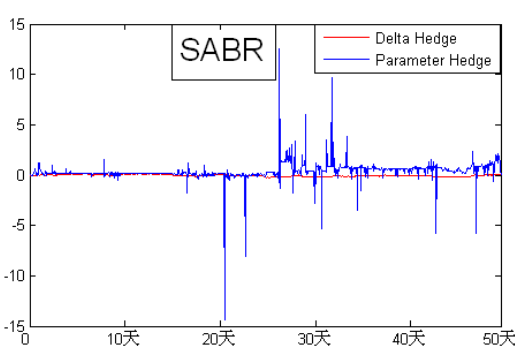


图 4.8 SABR 模型复制误差的路径

由表 4.8 中的数据, 以及图 4.5 到图 4.8 可以发现, BS 模型参数复制策略, 在存续期内的表现要远远好于其他模型; 局部波动率的参数复制策略的波动率其次。Delta 复制策略虽然不如 BS 模型和局部波动率的参数复制策略, 但是却比参数复制策略整体要稳健。Heston-Nandi 参数复制策略在均值上表现出和其他模型差异, 这由图 4.7 也可以得出, 它在开始的时候就存在一个较大的正复制误差, 造成这个误差原因很有可能是因为 Heston-Nandi 模型下的近似解析解系统性的偏误。而 SABR 模型参数复制策略的表现是最差的, 它极为不稳定, 存续期内的复制误差达到 10 以上。这种现象很有可能是因为第三章所描述的参数敏感度的细小变动造成了复制参数策略系数的严重不稳定。

第五章 结论

（一）本文的贡献

本文的主要贡献在于，提出了在随机过程框架下，真实模型未知时如何对模型风险进行评估，并且通过模拟进一步论证了模型风险对定价和复制误差的影响，为市场上的真实交易提供了不同于以往定价模型的理论借鉴。同时本文还系统的回顾了模型风险以及模型不确定性的相关研究。

首先，本文从概念上区别了模型不确定性和模型风险对衍生品定价的影响；从理论上推导了在真实模型无法得到的现实世界中，我们所用的模型的本质；并且在更加贴近现实的假设下通过模拟，描述了在真实模型未知的情况下，使用一个近似模型进行重复校准并进行复制所导致的复制误差，比较了模型风险对参数敏感度复制策略以及 Delta 复制策略的影响。

在模拟中，本文通过每次改变一个可能导致金似模型定价和复制偏误的变量¹，来检验这些变量对模型未知时真实世界中复制误差的影响。从模拟中本文得到了和理论推导相符的结论：

1. 现实测度将会影响模型未知时的风险中性定价的复制策略。
2. 复制误差的在期权到期日的的数据来看，在模型需要复制的参数较少时，参数敏感度复制策略优于 Delta 复制策略；但在参数较多时呈现出显著的不稳定性。
3. 参数敏感度复制策略在含参数较多的模型假设下还对不同属性的复制工具有很强的敏感性。
4. 状态变量的变化幅度对两种复制策略都会有明显的影响，尤其是跳跃频率的增加。
5. 从复制误差在期权存续期间的路径上看，对需复制的参数数量较少的模型来说，参数敏感度复制策略在期权存续期内的表现明显优于 Delta 复制策略；但是对需要复制的参数数量较多的模型来说，参数敏感度复制策略同样不如 Delta 复

¹ 控制其他所有可能的影响，包括随机数本身

制策略。

本文的结论证明参数敏感度复制策略能够在一定程度上削减模型错误的风险，但它的缺点在于本身较为不稳定，尤其是当需要复制的参数个数很多而需要引进其他包含各种风险的衍生工具时。**Delta** 复制由于只关注标的资产，并不考虑参数的变化，因此会明显的随着状态变量的变化而变化，比较容易受到模型未捕捉到的状态变量变化的影响。值得注意的是本文中 **SABR** 模型的拟合效果不好，只能说明 **SABR** 对随机波动率跳跃模型拟合的效果不好，但在现实中其拟合效果必须用现实数据来判断。

本文的研究表明，在衍生品市场上，交易员不仅仅要能够时刻更新自己模型的参数并进行复制，还必须在事前就对市场的状态变量有一定预测。从而使初始出价能够尽量包含对复制误差预测的信息。在复制衍生品的过程中，交易员必须尽量选择简单并且只含有单一风险因素的产品来复制衍生品。使用风险中性定价并且不断的改进模型的复杂程度和拟合效果的做法并不一定能够获得更好的复制效果。

（二）本文的缺陷以及未来的发展

由于本文的研究目的并不在于研究模型对市场的拟合程度，因此本文并未使用市场数据进行研究，这也导致了本文结论中的某些结果可能是由于真实过程的假设所带来的。其次，由于衍生产品解析解的限制，本文仅将简单的欧式看涨期权作为被复制产品，对奇异期权的研究并没有进行分析，而奇异期权的价值对于参数的变动更加敏感，因此本文的研究方法用在奇异期权上的研究将更有价值。另外，本文也仅考虑了扩散模型在不完全市场下的表现。跳跃频率差异的模拟结果证明扩散过程的确对未能捕捉到的跳跃十分敏感，因此在不完全市场模型假设下的复制策略和复制误差的研究是十分必要的。未来的研究可以更加贴近市场，并且在此基础上对不完全市场的模型用相应的复制策略对奇异期权进行模型风险的研究。在此，本文仅给出更好地研究上述问题所需要攻克的难题和相应的思考以供其他学者进一步研究时做参考。

在真实数据的基础上，研究各种模型的模型风险对奇异期权的影响所面临的

问题主要有三个：

1. 不完全市场模型的复制策略与参数敏感度复制的结合。如何分离不完全市场模型自身的复制误差和模型风险所带来的复制误差，以便于衡量模型风险的影响？
2. 如何选取合适的数值方法或者近似解析解，来解决不同模型下的不存在闭式解的奇异期权的定价和复制策略所受到模型风险的影响。如何把握数值方法本身的稳定性和准确性对模型风险的影响。
3. 市场数据中哪些是可以使用的定价基准，哪些工具是用来对冲参数的最好产品？是否有更好的复制策略能够消除模型风险的影响？

附录

表 4.1 参数敏感度复制策略的复制误差（50 次模拟）

50 个交易日复制频率（日）	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.168058	0.283325	0.261367	0.424474
中值	0.163668	0.243657	0.170441	0.308091
最大值	0.481532	0.652462	0.698651	1.567564
最小值	-0.079713	-0.06283	-0.1683	-0.08481
标准差	0.123081	0.216563	0.260689	0.445558
100 个交易日复制频率（日）	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.063178	0.192296	0.173524	0.532937
中值	0.065828	0.169121	0.16081	0.348411
最大值	0.274106	0.657218	0.587133	2.70926
最小值	-0.210006	-0.29586	-0.24215	-0.14108
标准差	0.096291	0.22066	0.215619	0.60478
150 个交易日复制频率（日）	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.028276	0.121282	0.079783	0.113466
中值	0.003308	0.076354	0.024999	0.027885
最大值	0.290367	0.638407	0.466079	2.020886
最小值	-0.319477	-0.15331	-0.32985	-0.81937
标准差	0.138718	0.206134	0.172461	0.39709
50 个交易日复制频率（5 分钟）	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.140132	0.25082	0.160555	0.319948
中值	0.162351	0.219787	0.084762	0.155337
最大值	0.332789	0.614799	0.638517	1.454434
最小值	-0.059257	-0.09612	-0.27394	-0.102
标准差	0.101975	0.218014	0.249908	0.406533
100 个交易日复制频率（5 分钟）	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.053952	0.185866	0.135561	0.354688
中值	0.068671	0.141096	0.152805	0.222927
最大值	0.219781	0.660919	0.58621	1.612036
最小值	-0.108549	-0.16198	-0.28568	-0.09154
标准差	0.083058	0.216121	0.207072	0.437698
150 个交易日复制频率 5 分钟）	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.027503	0.12098	0.102417	0.057846
中值	0.005121	0.069933	0.032989	0.01473

最大值	0.255372	0.636726	0.488055	0.633536
最小值	-0.213219	-0.17079	-0.2446	-1.02543
标准差	0.134285	0.212804	0.179287	0.301297

表 4.2 Delta 复制策略的复制误差 (50 次模拟)

50 个交易日复制频率 (日)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.214632	0.17481	0.178362	0.271931
中值	0.229752	0.202252	0.243538	0.260293
最大值	0.546208	0.536226	0.582948	0.613902
最小值	-0.05603	-0.19815	-0.4224	-0.06351
标准差	0.143816	0.187585	0.268928	0.163936
100 个交易日复制频率 (日)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.084995	0.085986	0.056573	0.22859
中值	0.120216	0.145498	0.137842	0.208431
最大值	0.339708	0.408999	0.428598	0.671552
最小值	-0.2284	-0.57721	-0.68943	-0.65715
标准差	0.14655	0.243591	0.283597	0.281418
150 个交易日复制频率 (日)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.015032	0.011359	0.033988	0.098378
中值	0.012731	-0.00949	0.114066	0.047179
最大值	0.309901	0.42913	0.466014	0.623786
最小值	-0.44441	-0.56328	-0.68175	-0.39968
标准差	0.170863	0.224742	0.273201	0.260655
50 个交易日复制频率 (5 分钟)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.185311	0.137898	0.127019	0.236962
中值	0.185272	0.158209	0.16869	0.220847
最大值	0.399171	0.433736	0.490267	0.557869
最小值	-0.01898	-0.28484	-0.54024	-0.15493
标准差	0.0946	0.156094	0.246774	0.166328
100 个交易日复制频率 (5 分钟)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.079172	0.079626	0.04982	0.195521
中值	0.101685	0.095462	0.119473	0.182651
最大值	0.316252	0.40325	0.434558	0.71055
最小值	-0.19598	-0.39474	-0.51987	-0.38591
标准差	0.12732	0.22999	0.268999	0.293952
150 个交易日复制频率 5 分钟)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.018404	0.015789	0.028135	0.078745
中值	0.015563	0.005046	0.104996	0.041516
最大值	0.322344	0.448103	0.483756	0.650196

模型风险及其对衍生品定价的影响

最小值	-0.34098	-0.39337	-0.61061	-0.43768
标准差	0.155026	0.217093	0.272578	0.273786

参考文献

- [1] Bakshi, G., Cao, C. & Chen, Z. (1997) Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models. *The Journal of Finance-NEW YORK*-, 52, 2003-2050.
- [2] Bates, D. S. (1996) Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options. *Review of Financial Studies*, 69-107.
- [3] Black, F. & Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637.
- [4] Branger & Schlag (2004) Model risk: A Conceptual Framework for Risk Measurement and Hedging.
- [5] Buhler, H., Der Naturwissenschaften, D. & Der Wissenschaftlichen Aussprache, T. (2005) Volatility Markets Consistent modeling, hedging and practical implementation. *TU Berlin, PhD thesis, to be submitted.*
- [6] Clyde, M. & George, E. I. (2004) Model Uncertainty. *STATISTICAL SCIENCE*, 19, 81-94.
- [7] Cont, R. (2006) Model uncertainty and its impact on the pricing of derivative instruments. *Mathematical Finance*, 16, 519-547.
- [8] Cont, R. & Tankov (2004) *Financial modeling with Jump process*, A CRC Press Company.
- [9] Derman, E. (1996) Model Risk. *Risk*, 9, 34-37.
- [10] Detlefsen, K. & Hardle, W. K. (2007) Calibration Risk for Exotic Options. *Journal of Derivatives*, 14, 47.
- [11] Dupire, B. (1994) Pricing with a smile. *Risk*, 7, 18-20.
- [12] Ellsberg, D. (1961) Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms. *The Quarterly Journal of Economics*, 643-669.
- [13] Frey, R. (2000) Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging. *Risk Publications, London*, 2.
- [14] Gilboa, I. & Schmeidler D. (1989) Maxmin Expected Utility with Non-unique Prior,". *Journal of Mathematical Economics*, 18, 141-153.
- [15] Green, T. C. & Figleswski, S. (1999) Market Risk and Model Risk for a Financial Institution Writing Options. *The Journal of Finance*, 54, 1465-1499.
- [16] Hagan, P. S., Kumar, D., Lesniewski, A. S. & WOODWARD, D. E. (2002) Managing smile risk. *Wilmott Magazine*, 1, 84-108.
- [17] He, C., Kenndy, J., Coleman, T., Forsyth, P., Li, Y. & Vetal, K. (2006) Calibration and hedging under jump diffusion. *Review of Derivatives Research*, 9, 1-35.
- [18] Heston, S. L. (1993) A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6, 327-343.
- [19] Heston, S. L. & Nandi, S. (2000) A closed-form GARCH option valuation model. *Review of Financial Studies*, 13, 585-625.
- [20] Hoeting, J. A., Madigan, D., Raftery, A. E. & Volinsky, C. T. (1999) Bayesian Model Averaging: A Tutorial. *Statistical Science*, 14, 382-417.
- [21] Hull, J. & Suo, W. (2002) A methodology for assessing model risk and its application to the

- implied volatility function model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 297–318.
- [22] Knight, F. H. (1921) Risk, Uncertainty and Profit. *New York: AM Kelley*.
- [23] Leland, H. E. (1985) Option pricing and replication with transaction costs. *Journal of Finance*, 40, 1283-1301.
- [24] Li, A. (1999) Model Calibration, Risk Measurement, and the Hedging of Derivatives. *working paper*.
- [25] Longstaff, F. A., Santa-Clara, P. & Schwartz, E. S. (2001) Throwing away a billion dollars: the cost of suboptimal exercise strategies in the swaptions market. *Journal of Financial Economics*, 62, 39-66.
- [26] Lord, R., Koekkoek, R., Dijk, D. V. & (2008) A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models
- [27] Rebonato, R. (2003) Theory and practice of model risk management. *Modern risk management: a history*.
- [28] Routledge, B. & Zin, S. E. (2001) Model Uncertainty and Liquidity. *NBER Working Paper*.
- [29] Savage, L. J. (1954) The Foundation of Statistics. *New York*.
- [30] Schoutens, W., Simons, E. & Tistaert, J. (2005) Model risk for exotic and moment derivatives. *Exotic Option Pricing and Advanced Levy Models*, 67–98.

致 谢

硕士研究生的三年仅仅是在厦门大学度过的所有时光中的一部分，但是这三年的经历将是我一生中难以忘怀的。非常感谢厦门大学为学子们提供了一个清幽、淡雅的学术环境，感谢金融系的众多老师和同学们在我本科和硕士阶段所给予的关怀和照顾。在经历了将近半年的构思和五个月的编程和写作后，我终于完成了自己的硕士毕业论文，虽然还存在很多不足之处，但对我来说已经是很大的进步。在此我希望能够一一感谢在学习和生活上帮助过我的人。

首先，我要感谢我的导师郑振龙教授。郑老师犀利的金融直觉让我深深折服，他幽默的谈吐和比喻让我更加热爱金融工程这个专业，他严谨治学的态度让我受益颇多。研二讨论课时对我不负责任工作的长达半个多小时的教育更让我深刻了解了一个学者做学术时所需要的态度。此外，郑老师对我的培养和鼓励让我树立了自信心，并且更加积极地投入到相关的学术研究中。还要感谢郑老师在此次的论文写作中对文章的修改提出了大量建议。

其次，要感谢林海副教授、陈蓉副教授和陈淼鑫老师。林海老师在学术上的见解与成就一直是我心中敬仰和追求的目标；他一针见血的评价和充满启发的建议总是能够让我认识到自己的缺陷和不足，他对本文的建议也让一度陷入困境的我重新找到了突破的方向。陈蓉老师对细节的苛求让我对自己的粗枝大叶深感惭愧，她让我深刻地了解到“一屋不扫何以扫天下”这句话的内涵；另外陈老师乐观、开朗的性格给我和其他同学带来了许多欢乐，为我们的硕士生活增添了多样的色彩。第一次参加在长沙召开的金融工程会议时，陈淼鑫老师的帮助让我的紧张情绪消弭无踪，可以更加自信地面对众多未曾谋面的听众。

再者，还要感谢大洋彼岸的 Yuan Yuhua 前辈。从两年前人大经济论坛的初识到后来的交流，他在理论上扎实的功底以及实务上的经验让我对衍生品定价的了解更上一个台阶。这篇文章的初始动机也是在这两年间的无数次交流中萌生的；再次感谢 Yuan Yuhua 前辈能够在百忙之中抽出时间来解答我的疑惑，以及让我们初识的人大经济论坛和为金融工程交流提供平台的金融工程之家。

另外，我还要感谢硕士阶段的几位同窗好友，吕恺、方昆明、柯鸿、金正皓以及其他厦门大学 06 级金融工程硕士的同学。有了你们我的硕士生活才能如此精彩。每一次的科研以及项目的成果，都离不开大家的讨论以及相互间默契的配合。还有 06 级金融系的其他好友，你们的陪伴给我的生活带来了更多的欢乐和笑声。感谢邓弋威同学在最后阶段熬夜帮我找出文中的各处的行文错误。

最后，我还要感谢我的家人，是你们默默地支持让我能够在美丽的厦门大学无忧无虑的学习。感谢我善解人意的女友，在七年中对我的支持和鼓励，能够与你在厦门大学相遇是我人生中最重要际遇。

刘杨树

2009 年 4 月 4 日晚于海韵