

学校编码: 10384

分类号_____密级_____

学号: 15620061151042

UDC _____

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

基于香港市场的隐含波动率动态模型研究

Research of Dynamic Implied Volatility Models Based on
Hong Kong Market

吕 恺

指导教师姓名: 陈蓉 副教授

专 业 名 称: 金融工程

论文提交日期:

论文答辩时间:

学位授予日期:

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2009 年 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果,均在文中以适当方式明确标明,并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范(试行)》。

另外,该学位论文为()课题(组)的研究成果,获得()课题(组)经费或实验室的资助,在()实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称,未有此项声明内容的,可以不作特别声明。)

声明人(签名):

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（ ） 1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，
于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。

（ ） 2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年 月 日

摘要

隐含波动率是使 BS 公式下得到的普通欧式期权的价格与市场价格相一致的波动率。对于同一标的资产，反映隐含波动率与行权价和期限关系的曲面被称为隐含波动率表面。对隐含波动率表面的研究是期权定价理论中的一个重要内容，市场交易者不仅要关心隐含波动率表面的形状特征，更是要研究整个曲面随时间的动态演化过程，并且，出于衍生产品的定价需求，还必须考虑隐含波动率曲面在风险中性测度下的动态过程。

本文基于香港恒生指数期权数据，对恒指期权的隐含波动率表面动态过程进行了实证研究。本文采用了 Schonbucher (1999)提出的理论框架对隐含波动率在风险中性测度下的变动过程进行了无套利限制，因此，本文的重点在于现实测度下隐含波动率动态过程的实证模型的建立及估计。首先，本文对描述隐含波动率表面变动常见的三种确定性规则进行了实证检验，结果表明无论是在短期还是在长期，简单的确定性变动规则都无法解释隐含波动率表面的变动，因此，本文引入了随机隐含波动率模型。本文采用了参数因子模型来对隐含波动率表面的随机变动进行建模，通过一系列的检验和分析，最终建立了一个五因子随机隐含波动率模型。在模型的估计方面，由于一系列样本期内横截面数据缺乏，简单的两步估计法由于过度参数化的问题对模型估计结果造成了极大误差，针对这一缺陷，本文采用了基于小样本面板数据的扩展的卡尔曼滤波法对该模型进行估计。结果显示，卡尔曼滤波法估计得到的五因子随机隐含波动率模型能很好地刻画隐含波动率表面在现实测度下的随机变动规律。

关键词： 隐含波动率表面；香港恒生指数期权；扩展的卡尔曼滤波法

Abstract

Implied volatility is the volatility that yields the same price as the market for a European option when substituted into the BS formula. For a particular underlying asset, the surface which reflects the implied volatility as a function of the strike price and the time to maturity was called implied volatility surface. Research for this surface is one of the most important pricing literature. Market traders not only care about the shape of the surface, but also pay much attention to the dynamic process of the whole surface. And for the purpose of derivatives pricing, it is also important to specify the evolution rule under the risk-neutral world.

Based on the HSI option data, this paper makes some empirical study on the implied volatility surface of the HSI option. This paper applies the theory framework of no-arbitrage restrict condition for the evolution of the implied volatility surface under the risk-neutral world, which was first studied by Schonbucher(1999). So, this paper focuses on the empirical modeling and estimating of the dynamic process of the implied volatility surface under the real world. Firstly, this paper tests the three popular determined evolution rules of the implied volatility surface, and the results shows that, no matter in the long-time period or in the short-time period, all the three simple determined rules can't explain the dynamic process of the implied volatility. So, stochastic implied volatility model was applied. This paper applies the parametrical factor-based model method, and finally constructs a five-factor stochastic implied volatility model after a series of tests and analysis. As for the estimation of the model, the simple two-stage method may yield a large error because of the overfitting problem which is caused by the deficiency of the cross section data during the sample periods. Pointed to this problem, this paper applies the Extended Kalman Filter method which is based on the incomplete panel-data. The final result shows that the five-factor stochastic implied volatility model estimated by Kalman Filter method fits well in the revolution of the implied volatility surface under the real world.

Key words: Implied volatility surface; HSI option; Extended Kalman Filter

目 录

1. 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究意义与目的	3
1.3 研究内容与主要结论	4
1.4 本文贡献和创新	4
1.5 本文结构	4
2. 隐含波动率模型介绍	6
2.1 文献综述	6
2.2 确定性隐含波动率模型	7
2.3 随机隐含波动率模型	9
3. 数据处理和分析	15
3.1 原始数据及处理	15
3.2 数据分析	16
4. 实证模型及实证结果	18
4.1 确定性变动规则的实证检验	18
4.2 随机隐含波动率实证模型的建立	22
4.3 随机隐含波动率模型的估计及结果分析	31
4.4 稳健性检验	42
5. 结论	47
参考文献	49
致 谢	51

CONTENTS

1. Introduction 1

1.1 Background1

1.2 Motivation and Significance.....3

1.3 Contents and Conclusion.....4

1.4 Contribution and Innovation4

1.5 Structure4

2.Introduction of Implied Volatility Models 6

2.1 Literature Review6

2.2 Determined Implied Volatility Models.....7

2.3 Stochastic Implied Volatility Models9

3. Data 15

3.1 Original Data.....15

3.2 Data Analysis.....16

4. Empirical Models and Empirical Results 18

4.1 Empirical Tests of Determined Rules18

4.2 Construction of Stochastic Implied Volatility Model22

4.3 Estimation and Results Anslysis of Stochastic Model31

4.4 Robust Test.....42

5. Conclusion 47

Reference 49

Acknowledge 51

1. 绪论

1.1 研究背景

过去数十年间，全球金融衍生产品市场经历了迅速的发展。在交易规模不断扩大的同时，交易品种也在迅猛发展，除了标准的期货、期权和互换等衍生产品外，为了满足投资者的各种需求，越来越多复杂的奇异衍生产品被开发并在市场上交易。伴随着产品类型及复杂程度的上升，用于产品定价和风险管理的模型也在不断地发展。

经典 Black-Scholes(1973)期权定价模型是衍生产品定价模型的基石，它在市场无交易成本、标的资产服从对数正态分布及波动率为常数等简单假设的基础上应用无套利条件及风险中性定价法得到了欧式期权的定价公式。然而，市场资料显示，产品的市场真实价格与 BS 模型下的价格发生了明显背离。如果 BS 模型是正确的，那么对于具有相同标的资产的所有普通欧式期权，其市场价格通过 BS 模型转换得到的隐含波动率都应该相等。但是，事实上，对于不同期限和行权价的期权，隐含波动率往往不同。隐含波动率随行权价格的变动规律一般被称为“波动率微笑”，而随期限的变动规律一般被称为“波动率期限结构”，三者构成的一个三维关系被称为“隐含波动率表面”。非平的隐含波动率表面存在证明了 BS 定价模型的不准确性。

后来，为了得到更准确的期权定价模型，学者们在不同的方面放宽了 BS 模型的基本假设，发展出了各种不同的定价模型，以希望得到与市场相一致的隐含波动率表面。一类拓展是基于市场无交易成本的假设的放松。一些学者检验了交易成本存在的情况对模型定价效率的影响，他们发现交易成本确实能解释一部分隐含波动率微笑的存在性，然而却不能解释大部分的原因。一类拓展是基于标的资产价格服从对数正态分布假设的放松。Merton(1976)及 Bates(1996)等学者引入了随机跳跃模型来刻画标的股票的运动过程。虽然跳跃过程可能更好地与现实市场相符，然而由于跳跃是非连续过程，导致模型求解 PDE 方程及参数估计方面的难度都大大加强，再加上非连续过程的风险无法完全对冲，这些限制都使得跳跃模型较少被市场采用。基于波动率是常数假设的模型扩展是目前使用最多的，也是被证明是最有效改进的一类模型。根据瞬时波动率变动方式的不同，传统波

波动率模型主要分为局部波动率模型(Local Volatility Model)和随机波动率模型(Stochastic Volatility Model)，局部波动率模型最早由 Dupire(1994)等提出，他们把瞬时波动率看成时间和标的资产价格的确定性函数，此时波动率不是一个常数，它随时间和标的价格的变化而变化，但模型没有引入新的风险源，而随机波动率模型则以 Heston(1993)模型为代表，他假设瞬时波动率的变动由一个区别于标的价格过程的新风险源控制，并且标的过程和波动率变动过程之间存在相关关系，在一定的波动率风险价格假设下得到欧式期权价格的闭式解。传统波动率模型的共同特点就是模型都以尽可能好地拟合当前市场期权价格或隐含波动率表面为目的，这点可以从模型参数的校准方法中看出。然而，正如 Dumas, Fleming, and Whaley (1998)在他们的实证结果中指出的，通过每次的校准，局部波动率模型虽然可以较好地拟合当前的波动率表面，然而，模型校准得到的参数极不稳定，表明模型在刻画波动率表面随时间变动的能力很糟糕，需要不断地重复校准以追踪隐含波动率表面的变动。Cont and Fonseca(2002)也指出，单因子随机波动率模型下很难得到与市场一致的隐含波动率表面，更难刻画隐含波动率表面随时间的变动规律，Hull and Suo(2002)也指出用这些模型为路径依赖期权等奇异衍生产品定价存在很大的模型风险。

随着期权市场的不断发展，在很多市场，普通期权(plain vanilla option)交易规模已经达到相当的水平，在这种情况下，普通期权的价格已经完全由市场供求决定，而与任何模型无关(model independent)，市场的高流动性保证了其价格的合理性。这就为我们提供了一种新的模型框架---以市场为基础的模型，即把市场上观测到的隐含波动率表面作为直接的建模对象，这类模型被称为波动率的市场模型或隐含波动率模型。

隐含波动率模型与传统波动率模型的最大区别在于，隐含波动率在传统波动率模型中是作为模型的输出变量或被解释变量，而在隐含波动率模型中，隐含波动率成了输入变量，是被建模的对象。以隐含波动率作为输入变量，这就首先保证了隐含波动率模型在普通期权上的无套利，从而可以更为有效地为其它奇异衍生产品定价。可以看出，传统波动率模型与隐含波动率模型之间的关系和利率市场中传统均衡利率模型与利率市场模型(LMM)之间的关系类似，均衡利率模型以市场利率期限结构作为模型的输出变量或解释变量，而 LMM 则以可观测的当前市

场利率期限结构作为输入,在满足当前期限结构无套利的基础上为利率衍生产品定价。因此,隐含波动率模型以股票价格和普通期权作为标的,在从股票市场中提取价格信息的同时从普通期权市场中提取波动率信息,从而在为复杂的衍生产品定价时体现了更多的信息优势。普通期权市场这种反映波动率信息的功能,正如 Rebonato(1999)所说,人们在期权市场买卖期权时,他们并不关心标的股票的变动方向或收益率,而是把自己看成是完全的波动率交易者,期权的交易被看成是波动率的交易。可见,普通期权可以看成是波动率的一个映射,它们的价格直接反映了波动率的价格,而期权市场可以看成是波动率的交易市场。

1.2 研究意义与目的

由于隐含波动率模型的特点,对隐含波动率模型的研究无论在理论界还是实务界,都有其重大意义。

首先,从理论角度来看,隐含波动率模型提供了一种全新的波动率建模思路。我们知道,对于利率动态模型理论,最初的研究始于均衡模型,后来在 HJM(1992)首次提出无套利建模思想后,此类模型迅速发展,目前为止市场模型在利率理论上的应用已经较为成熟。然而,对于波动率模型领域,目前的大多数研究还都停留在均衡模型阶段,已远远落后于期权市场的发展。隐含波动率模型提供了一种紧跟市场发展的波动率模型,与利率市场模型理论相对应,从而填补了市场模型在波动率方面应用中的空白。

其次,从实务角度看,隐含波动率模型给市场上期权交易者提供了更为精确的定价和风险管理方法。从前文对隐含波动率模型建模思想的介绍中我们知道,隐含波动率模型比传统模型包含了更多的市场信息,因此,可以预见,隐含波动率模型在期权组合管理、复杂衍生品定价及对冲等方面将会得到更有效的应用。

正是因为研究隐含波动率模型的重大意义,近年来已有不少国外学者开始了这方面的研究。然而,就笔者所知,目前还尚未发现有任何文献对香港市场的隐含波动率模型进行实证研究。本文目的就是为香港市场恒生指数期权的隐含波动率表面进行实证研究,以期望得到一个适合香港市场的隐含波动率模型,从而为香港市场衍生产品的定价和风险管理等提供参考。

1.3 研究内容与主要结论

本文研究内容与得到的相关结论主要有：

首先，本文对隐含波动率模型中最简单的三种确定性变动规则进行实证检验，结果发现，在香港市场中，三种确定性变动规则无论在短期还是在长期都不成立。

其次，本文试图通过实证分析，建立一个随机隐含波动率模型，结果发现，一个服从均值回复过程的五因子随机隐含波动率模型可能可以较好地刻画香港恒生指数隐含波动率表面的随机变动。

最后，本文利用两种方法对五因子随机隐含波动率模型进行估计和比较，结果发现，国外文献在国外市场中所用的两步估计法在香港市场中就不再适用，而本文重点使用的扩展的卡尔曼滤波法则得到了很好的估计结果。

1.4 本文贡献和创新

本文的贡献与创新主要体现在：

第一，本文首次同时检验了三种隐含波动率粘性规则在香港市场长期和短期中的表现，发现了这些简单规则在香港市场中均不成立。

第二，通过实证比较和分析，本文建立了一个适合描述香港市场隐含波动率表面随时间变动的五因子随机模型。

第三，针对香港市场横截面数据不足的特点，本文首次在随机隐含波动率模型的估计中引入了扩展的卡尔曼滤波法，并与其他学者用的两步法进行了比较，发现在横截面数据有限的情形下，扩展的卡尔曼滤波法效果明显优于两步法。

1.5 本文结构

本文主要分为五个部分，主要结构安排如下：

第一部分绪论主要交代本文研究背景、研究意义与目的、研究内容与主要结论等内容。

第二部分首先介绍隐含波动率模型的相关文献，然后介绍确定性隐含波动率模型与随机隐含波动率模型的思路和方法。

第三部分主要介绍本文所用数据的情况以及一些数据处理和分析。

第四部分为本文实证部分，首先检验确定性隐含波动率模型下的三种规则，然后建立随机隐含波动率的实证模型，然后再介绍本文所使用的估计方法---卡尔曼滤波法以及报告模型的估计结果，最后对本文的模型进行稳健性检验。

第五部分为本文的结论部分。

2. 隐含波动率模型介绍

2.1 文献综述

对于隐含波动率模型，目前已经有的研究一般可以分为两类，确定性隐含波动率模型与随机隐含波动率模型。

与传统局部波动率模型类似，确定性隐含波动率模型简单假设隐含波动率的变动与时间、标的资产价格或期权的在值程度(moneyness)之间存在确定性关系，模型并不引入新的风险源来描述隐含波动率表面的变动。这类模型以 Derman (1999)提出的粘性行权价规则(sticky strike rule)、粘性 delta 规则(sticky delta rule) 及 Daglish, Hull and Suo(2007)的平稳时间平方根规则(stationary square root of time rule)等为代表。粘性行权价规则假定隐含波动率是关于行权价格和期限的确定性函数，并且随着时间的变动该函数关系不变，粘性 delta 价格规则则是假定了隐含波动率是关于期权在值程度和期限的确定性函数，而平稳时间平方根规则假定隐含波动率是关于在值程度和期限的平方根比值的确定性函数。本质上说，不同的确定性隐含波动率模型就是对隐含波动率表面提出了不同的静态拟合方法，并且假设静态拟合关系随时间是不变的。Daglish, Hull and Suo(2007)用 OTC 市场 S&P500 期权的月度数据对这三种规则进行了实证检验，结果发现在整个样本期内，粘性行权价规则效果较差，而后两种规则都有较好的解释力度。

第二类隐含波动率模型为随机隐含波动率模型，Schonbucher (1999)首先提出了随机隐含波动率模型的基本框架，他假设隐含波动率的变动由几个风险源驱动，并设这些风险源与标的股票价格风险源相关，类似于利率模型中 HJM 的分析方法。他通过引入无套利条件得到隐含波动率在风险中性测度下的漂移项的限制，其漂移完全由波动项决定，在不需要任何关于风险价格形式的假设下，得到了风险中性测度下隐含波动率的动态过程，从而提供了复杂衍生产品定价的方法。然而 Schonbucher (1999)的分析只是基于某个特定的隐含波动率，Ledoit(2002)等把以上模型扩展到了整个隐含波动率表面的情形，并用在值程度和期限分别替代行权价和到期日来建模。并且，他们还证明了一个重要的结论，即期限趋于零的平价期权的隐含波动率等于标的股票的瞬时波动率，这就建立起了隐含波动率和股票瞬时波动率之间的关系，从而通过期权市场提取出标的股票的波动率信

息。Cont and Rosenberg (2002)使用了非参数的方法来分析隐含波动率表面的动态过程,他们用 Karhunen-Loeve 分解技术对 DAX 和 S&P500 指数期权的隐含波动率表面的动态过程进行了实证分析,结果得到了一个三因子模型。Daglish, Hull and Suo(2007)用了无套利分析方法研究隐含波动率表面的变动,并假设波动率风险溢酬为零,把风险中性测度下隐含波动率漂移项的限制应用于现实测度中,对 S&P500 指数期权隐含波动率表面变动做了实证分析。Hafner and Schmid(2005)用一个四因子参数模型对 DAX 指数期权的隐含波动率进行建模,他们使用的是两步估计法,首先对隐含波动率表面进行静态拟合,然后对静态拟合得到的参数的时间序列再进行建模和估计,最后再通过隐含波动率漂移项无套利限制条件估计出各因子的风险价格,从而得到风险中性测度下隐含波动率的过程。Goncalves and Guidolin(2006)也是运用了类似的参数法分析 S&P500 指数隐含波动率表面的动态过程,他们也是用两步估计法,首先通过静态拟合得到一个五因子模型,并用向量自回归(VAR)模型对得到的五个因子的时间序列建模。Rosenberg(2000)提出了一个动态隐含波动率方程模型(DIVF),他假设隐含波动率是关于平价隐含波动率、在值程度和期限的确定性函数,通过对平价期权隐含波动率随机过程的建模得到整个波动率表面的动态过程。

2.2 确定性隐含波动率模型

确定性隐含波动率模型主要由一系列确定性变动规则构成,这些规则目的在于用一些简单的变动规律来解释隐含波动率表面随时间的变动,下面将简单介绍三种较为常用的确定性变动规则。

粘性行权价规则

粘性行权价规则(sticky strike rule)由 Derman(1999)提出,是假设最为简单的规则。Derman 指出,在某些历史时期,对于特定行权价的期权,其隐含波动率几乎不随时间发生变化,因此他提出了在这段时间内,隐含波动率表面的变动服从一个粘性行权价规则,即对于行权价为 K , 到期日为 T 的隐含波动率 $\sigma(K, T)$, 其值对平价期权隐含波动率 $\sigma_{atm}(T)$ 的偏离程度只与 K 有关,并且它们之间的关系不随时间的变动而变动。在线性关系假设下,用数学符号表示即为:

$$\sigma(K, T) - \sigma_{atm}(T) = b(K - S_0) \quad (2.2.1)$$

其中 S_0 表示初始标的的股票价格。(2.21)是 Derman 最初始的定义, 一般地, 我们可以把粘性规则写成更一般的形式:

$$\sigma_t(K, T) = \sigma_{t+\Delta t}(K, T) = \phi(K, T) \quad (2.2.2)$$

可以看出, 粘性行权价规则只是 BS 模型的简单扩展, 以行权价格和到期日表示的隐含波动率表面是固定不变的, 它并不随时间和标的股票的价格变动而变动, 在这种规则下期权的 delta 即为 BS 公式下的 delta:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \quad (2.2.3)$$

粘性 delta 规则

粘性 delta 规则 (sticky delta rule) 也是由 Derman(1999)提出, 该规则在粘性行权价规则上放松了隐含波动率变动与标的价格无关的假设。粘性 delta 规则假设期权的隐含波动率大小只跟在值程度 K/S 有关, 并且它们之间的关系不随时间变化。用数学符号表示为:

$$\sigma(K, T) - \sigma_{atm}(T) = b(K/S - 1)S_0 \quad (2.2.4)$$

同样, (2.24)是最初始的定义, 之后更多学者和交易员建议使用 $m = K/F$ ¹来表示在值程度更为合理, 用 $\tau = T - t$ 表示期限, 因此, 更一般的粘性 delta 规则可表示为:

$$\sigma_t(m, \tau) = \sigma_{t+\Delta t}(m, \tau) = \phi(m, \tau) \quad (2.2.5)$$

在粘性 delta 规则下, 隐含波动率随标的价格的变动而变动, 而标的价格的变动是通过改变期权的在值程度来影响隐含波动率的。可以看出, 该规则下, 以 K 和 T 表示的隐含波动率表面随时间是变动的, 而以 m 和 τ 表示的相对隐含波动率表面是不变的。在这种规则下, 普通期权的 delta 可以表示为:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial S} \quad (2.2.6)$$

一般来说, σ 是关于 m 的减函数, 而 m 是关于 S 的减函数, 从而有 $\partial \sigma / \partial S > 0$, 并且 $\partial C / \partial \sigma$ 大于零, 因此该值大于 BS 模型下的 delta。

¹这里 F 表示股票的远期价格, 满足 $F = Se^{(r-q)(T-t)}$, 其中 r 表示无风险利率, q 表示连续红利率

平稳时间平方根规则

平稳时间平方根规则 (stationary square root of time rule) 是由 Daglish, Hull and Suo(2007)提出的。他们同样假设隐含波动率是由在值程度 K/F 及期限 $T-t$ 决定, 但并不是单独决定, 而是通过形式 $\ln(K/F)/\sqrt{T-t}$ 来决定, 并且它们的关系随时间固定不变, 用公式表示即为:

$$\sigma_i(m, \tau) = \sigma_{t+\Delta t}(m, \tau) = \Phi\left(\frac{m}{\sqrt{\tau}}\right) \quad (2.2.7)$$

这里 $m = \ln(K/F)$ 。

2.3 随机隐含波动率模型

本部分内容主要介绍随机隐含波动率模型的基本框架, 首先介绍现实测度下的模型, 然后引入无套利限制, 最后得到风险中性测度下的模型。

现实测度下的模型

假设在现实世界中, 股票价格服从过程为:

$$ds(t) = \mu s(t)dt + v(t)s(t)dw_0(t) \quad (2.3.1)$$

其中 μ 表示股票的平均收益率, $v(t)$ 表示股票收益率的瞬时波动率, $dw_0(t)$ 表示标准布朗运动。

设对于行权价为 K , 到期日为 T 的期权在 t 时刻的在值程度 $m(t)$, 则可以得到 $m(t) = m(t, s(t), T, K)$ 。设以 m 和 τ 表示的相对隐含波动率 $\tilde{\sigma}(m, \tau)$ 的变动完全是由 p 个随机变动的状态变量 $\{y_i\}_{i=1, \dots, p}$ 驱动, 即存在函数 g , 满足:

$$\tilde{\sigma}(t, m, \tau) = g(t, m, \tau, y_1(t), \dots, y_p(t)) \quad (2.3.2)$$

并且设状态变量 y_i 在现实测度下的变动过程为:

$$dy_i(t) = \alpha_i(t)dt + \sum_{j=0}^p \gamma_{ij}(t)dw_j(t) \quad (2.3.3)$$

其中 $dw_j(t)$ 表示相互独立的标准布朗运动。

根据(2.3.2)和(2.3.3), 应用伊藤引理可得 $\tilde{\sigma}(t, m, \tau)$ 在现实测度下的过程为:

$$d\tilde{\sigma}(t, m, \tau) = \tilde{\eta}(t, m, \tau)dt + \sum_{j=0}^p \tilde{\theta}_j(t, m, \tau)dw_j(t) \quad (2.3.4)$$

其中：

$$\tilde{\theta}_j(t, m, \tau) = \sum_{i=1}^p \gamma_{ij}(t) \frac{\partial g}{\partial y_i}, \quad j=0, \dots, p \quad (2.3.5)$$

$$\tilde{\eta}(t, m, \tau) = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^p \alpha_i(t) \frac{\partial g}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^p \gamma_{ij} \gamma_{kj} \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_k} \quad (2.3.6)$$

风险中性测度下的模型

风险中性测度下随机隐含波动率模型分析框架首先由 Schonbucher (1999) 提出。设市场无套利条件成立，因此存在一个风险中性测度，在这个测度下，股票价格服从的过程为：

$$ds(t) = (r - q)s(t)dt + v(t)s(t)dw_0^*(t) \quad (2.3.7)$$

其中 r 和 q 分别表示无风险利率和红利率，这里简单假设它们为常数， $dw_0^*(t)$ 表示风险中性测度下的标准布朗运动。

某普通期权执行价格为 K ，到期日为 T ，设其隐含波动率 $\sigma(t, K, T)$ 在风险中性测度下的过程为：

$$d\sigma(t, K, T) = \eta^*(t, K, T)dt + \sum_{j=0}^p \theta_j(t, K, T)dw_j^*(t) \quad (2.3.8)$$

根据隐含波动率的性质， t 时刻($t < T$)该期权的价格可表示为：

$$C(t, K, T) = C_{BS}(t, s(t), K, T, \sigma(t, K, T)) \quad (2.3.9)$$

其中 $C_{BS}(t, s(t), K, T, \sigma(t, K, T))$ 表示各个输入参数用 BS 公式计算出的期权价格，当波动率等于隐含波动率时，BS 下的期权价格等于市场价格。

根据(2.3.9)，应用伊藤引理可得期权价格在风险中性测度下变动过程为：

$$\begin{aligned} dC(t, K, T) &= dC_{BS}(t, s(t), K, T, \sigma(t, K, T)) \\ &= \frac{\partial C_{BS}}{\partial t} dt + \frac{\partial C_{BS}}{\partial s} ds + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial s^2} (ds)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial \sigma^2} (d\sigma)^2 + \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial s \partial \sigma} ds d\sigma \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

把(2.3.7)和(2.3.8)股票和隐含波动率的过程代入(2.3.10)，可得：

$$\begin{aligned}
 dC(t, K, T) = & \left(\frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial s} (r - q)s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial s^2} \sigma^2 s^2 + \eta^* \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial \sigma^2} \sum_{j=0}^p \theta_j^2 + \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial s \partial \sigma} \theta_0 v s \Big) dt \\
 & + \left(\frac{\partial C_{BS}}{\partial s} v s + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} \theta_0 \right) dw_0^* + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} \sum_{j=1}^p \theta_j dw_j^*(t)
 \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

然而，如果无套利条件成立，那么在风险中性测度下普通期权的收益率为无风险利率，因此根据(2.3.11)有：

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial s} (r - q)s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial s^2} \sigma^2 s^2 + \eta^* \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial \sigma^2} \sum_{j=0}^p \theta_j^2 + \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial s \partial \sigma} \theta_0 v s = rC \tag{2.3.12}$$

又由于隐含波动率的性质使得 BS 偏微分方程成立：

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial s} (r - q)s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial s^2} \sigma^2 s^2 = rC \tag{2.3.13}$$

式(2.3.12)中所有偏导数均可由 BS 公式给出，把所有偏导数及(2.3.13)代入，并整理，最终可得风险中性测度下隐含波动率过程漂移项的无套利限制条件为：

$$\begin{aligned}
 \eta^*(t, K, T) = & -\frac{1}{2} \frac{d_1 d_2}{\sigma(t, K, T)} \sum_{j=0}^p \theta_j(t, K, T)^2 - \frac{1}{2} \frac{v(t)^2 - \sigma(t, K, T)^2}{\sigma(t, K, T)(T - t)} \\
 & + \frac{d_2}{\sigma(t, K, T)\sqrt{T - t}} v(t) \theta_0(t, K, T)
 \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

其中

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\ln(s/K) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \\
 d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T - t}
 \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

从(2.3.14)和(2.3.15)可以看出，如果无套利条件满足，那么风险中性测度下行权价为 K 期限为 T 隐含波动率过程的漂移项完全由波动项参数 $\{\theta_j\}_{j=0, \dots, p}$ 及其它初始输入决定。

最后，由于需要得到整个隐含波动率表面的变动，一般来说对相对隐含波动率表面 $\tilde{\sigma}(t, m, \tau)$ 建模较为方便，因此，还需要把无套利限制条件(2.3.14)转换到对 $\tilde{\sigma}(t, m, \tau)$ 在风险中性测度下的漂移项限制。

设风险中性测度下 $\tilde{\sigma}(t, m, \tau)$ 的过程为：

$$d\tilde{\sigma}(t, m, \tau) = \tilde{\eta}^*(t, m, \tau)dt + \sum_{j=0}^p \tilde{\theta}_j(t, m, \tau)dw_j^*(t) \quad (2.3.16)$$

注意到，风险中性测度下(2.3.16)波动项参数与现实测度下(2.3.8)的参数是一致的，因为测度转换只改变漂移项而不改变波动项的参数。

根据绝对隐含波动率与相对隐含波动率的一一对应关系：

$$\sigma(t, K, T) = \tilde{\sigma}(t, m(t, s(t), T, K), T-t) \quad (2.3.17)$$

应用伊藤引理可得两者风险中性测度下漂移项和波动项之间的关系分别为：

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}^*(t, m, \tau) = & \eta^*(t, K, T) + \frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{\partial g}{\partial m} \left(\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial s} (r-q)s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial s^2} s^2 v^2 \right) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial m^2} \left(\frac{\partial m}{\partial s} vs \right)^2 - \frac{\partial \tilde{\theta}_0}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial s} sv \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

$$\theta_0(t, K, T) = \tilde{\theta}_0(t, m, \tau) + \frac{\partial g}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial s} sv, \quad (2.3.19)$$

$$\theta_j(t, K, T) = \tilde{\theta}_j(t, m, \tau) \quad j = 1, \dots, p$$

再由(2.3.14)最终可得相对隐含波动率在风险中性测度下的无套利限制漂移为：

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}^*(t, m, \tau) = & \frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{\partial g}{\partial m} \left(\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial s} (r-q)s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial s^2} s^2 v^2 \right) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial m^2} \left(\frac{\partial m}{\partial s} vs \right)^2 - \frac{\partial \tilde{\theta}_0}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial s} sv - \frac{1}{2} \frac{d_1 d_2}{\tilde{\sigma}} \sum_{j=1}^p \tilde{\theta}_j^2 \\ & - \frac{1}{2} \frac{d_1 d_2}{\tilde{\sigma}} \left(\tilde{\theta}_0 + \frac{\partial g}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial s} sv \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{v^2 - \tilde{\sigma}^2}{\tilde{\sigma} \tau} \\ & + \frac{d_2}{\tilde{\sigma} \sqrt{\tau}} v \left(\tilde{\theta}_0 + \frac{\partial g}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial s} sv \right) \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

因此，在风险中性测度下，满足无套利条件的隐含波动率表面 $\tilde{\sigma}(t, m, \tau)$ 的变动过程也是由其波动项决定。

模型定价方法

这里首先给出关于隐含波动率和实际瞬时波动率关系的一个重要结论：期限趋于零的平价期权的隐含波动率等于标的股票的瞬时波动率。

这个结论具有普遍性，不管在现实测度还是在风险中性测度下都成立，具体证明过程可参见 Ledoit(2002), Hull(2007)等。而 Durrleman(2008)扩展了该结论，他证明了在股票过程包含跳跃项的模型中，该结论仍然成立。如果用对数形式 $m = \ln \frac{K}{S e^{(r-q)(T-t)}}$ 表示在值程度，平价期权对应的 m 为 0。因此，上述结论可表示成：

$$v(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{\sigma}(t, 0, \tau) \quad (2.3.21)$$

因此，股票的瞬时波动率信息完全可以从普通期权市场获得。

对于模型定价应用，根据标的不同可以把被定价产品分为两类。第一类产品的价格只依赖于标的股票的运动，比如常见的障碍期权、亚式期权等，它们最终的回报只依赖于股票价格运动路径，隐含波动率模型对这类产品的定价方法为：

$$\begin{aligned} p(t) &= E_t^* [e^{-r(T-t)} \text{payoff}(T)] \\ ds(t) &= (r - q)s(t)dt + s(t)v(t)dt \\ dv(t) &= \tilde{\eta}^*(t)dt + \sum_{j=0}^p \tilde{\theta}_j(t, 0, 0)dw_j^*(t) \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

其中 $v(t)$ 的漂移项 $\tilde{\eta}^*(t)$ 可由(2.3.20)取极限求得：

$$\tilde{\eta}^*(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{\eta}^*(t, 0, \tau) = 2 \frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial m^2} v(t)^2 + \frac{\partial \tilde{\theta}_0}{\partial m} v(t) - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_0 v(t) \quad (2.3.23)$$

求解价格 $p(t)$ 一般只能采用数值方法。需要说明，模型(2.3.22)表面上看去与传统随机波动率模型类似，然而传统随机波动率模型中的瞬时波动率 $v(t)$ 是隐含在股票价格运动过程中的信息，而模型(2.3.22)的 $v(t)$ 却是从期权市场中提取出来的信息，相当于是独立于股票价格之外的一个标的，两类模型之间有本质的区别。

另一类产品的价格不仅依赖于股票价格的变动，而且依赖于特定 K 和 T 的隐含波动率（或期权价格）的运动过程，比如常见的远期期权、复合期权、选择期权以及一系列隐含波动率产品，这类产品以股票和普通期权作为标的，对这类产品的定价模型为：

$$\begin{aligned}
 p(t) &= E_t^* [e^{-r(T-t)} \text{payoff}(T)] \\
 ds(t) &= (r - q)s(t)dt + s(t)v(t)dt \\
 dv(t) &= \tilde{\eta}^*(t)dt + \sum_{j=0}^p \tilde{\theta}_j(t, 0, 0)dw_j^*(t) \\
 d\sigma(t, K, T) &= \eta^*(t, K, T)dt + \sum_{j=0}^p \theta_j(t, K, T)dw_j^*(t)
 \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

同样，一般情况下价格 $p(t)$ 无闭式解，因此也只能采用数值方法求解。

总之，两类隐含波动率模型都有其各自的优缺点。确定性隐含波动率模型最大的优点就在于其简便性，它在没有引入任何新风险源的情况下用一些简单的规则刻画隐含波动率表面随时间的变动，然而，也正是由于这个特点，导致确定性隐含波动率模型在刻画效果上的不足。一般来说，几种确定性规则只有在一些特殊的市场情形下才能成立，在大部分市场情况下隐含波动率都以一个随机的方式变动，而不满足任何确定性规则。随机隐含波动率模型的提出就在于用随机模型来刻画隐含波动率的变动，由于隐含波动率表面由许许多多不同的隐含波动率构成，要对每个隐含波动率的随机变动过程一一建模几乎不太可能实现，因此随机隐含波动率模型一般采用因子法，用一些共同的风险因子的变动来描述表面上每个隐含波动率的变动。因此，现实测度下的随机隐含波动率模型的关键在于如何寻找这些风险因子以及如何对这些风险因子的随机过程建模。对于风险中性测度下的模型，关键在于如何确定风险因子在风险中性测度下的过程，而由于隐含波动率模型把股票和各种不同期限及在值程度的期权都看成是标的资产，在这种情况下可交易标的的数目就大于风险因子的个数，因此，从理论上来说模型不需要任何因子风险价格的假定，通过无套利限制就可以得到风险中性测度下的模型。Schonbucher (1999)提出的模型框架正是利用了这个思想，得到了风险中性测度下随机隐含波动率模型的建模方法。

据笔者了解，在国内及香港，对上述模型的研究尚属空白。由于国内期权市场尚未健全，在后面的内容中，本文拟对香港市场恒生指数隐含波动率表面的动态过程进行实证研究。主要包括上述确定性变动规则的实证检验、随机隐含波动率模型的建立以及模型的估计和结果的比较分析。

3. 数据处理和分析

3.1 原始数据及处理

香港恒生指数期权是目前香港市场交易最为活跃的期权产品之一，无论从合约品种还是交易量来看，都已达到较高的水平，因此，本文采用恒生指数期权作为研究的对象。恒生指数期权属于欧式期权，标的指数为香港恒生指数，期权费以完整整数点报价，期权价格最小变动单位是 1 点，而每点的合约乘数为港元 \$50.00，合约到期日为每月的倒数第二个交易日。

本文采用的数据样本期为 2005 年 01 月 03 日至 2007 年 12 月 31 日，共 739 个交易日的恒生指数期权的收盘价，原始数据量为 79967，较为庞大，然而从市场中直接得到的数据中夹杂着各种噪音成分，会对建模过程产生较大的影响，因此有必要先对原始数据进行一系列的筛选处理，运用处理后的数据进行建模才能得到更准确的结论。

首先，剔除所有价内期权的数据，即对于看涨期权，剔除所有 $m > 1$ 的数据，对于看跌期权，剔除所有 $m < 1$ 的数据，其中 $m = K / Se^{(r-q)(T-t)}$ ，其原因较为复杂，将在下文解释；

第二，由于恒指期权最小变动单位为 1 个指数点，因此，为消除价格不连续的影响，剔除所有交易价格为 1 个指数点的数据；

第三，由于期限过短或过长的期权都存在较大的流动性问题，造成价格的噪音，因此剔除所有距到期小于 7 个日历日及大于 1 年的数据；

第四，由于过少的交易量难以反映真实的价格，因此，剔除所有日交易合约数少于 20 的数据；

第五，利用看涨和看跌期权价格上下限条件的限制，剔除明显不合理的价格数据，即对于看涨期权，其价格应该满足 $S - Ke^{-(r-q)(T-t)} < C < S$ ，对于看跌期权，价格满足 $Ke^{-(r-q)(T-t)} - S < P < Ke^{-(r-q)(T-t)}$ ，删除所有不满足以上条件的期权数据。

在第一步的筛选中，本文只对价外期权和平价期权建模，主要原因有三：首先，从理论上说，根据期权平价公式，对于具有相同行权价的看涨和看跌期权，他们的隐含波动率应该相等，并且两者必有一个处于价外而另一个处于价外（或

两者都处于平价)，使用其中之一就能获得整个隐含波动率表面。但这并非最重要的原因，毕竟在现实市场中，噪音的存在往往使得期权平价公式不能成立。剔除价内期权数据的更根本原因在于，波动率对期权价值的影响主要体现在期权的时间价值上，对于价内期权，尤其是深度价内期权，其价格主要由内在价值决定，时间价值相对内在价值来说非常小，微小的市场摩擦就能把时间价值覆盖，从而使隐含波动率对市场摩擦极度敏感，容易造成较大误差。最后，市场参与者购买期权一般用于投机或保值，对于价外或平价期权的需求远大于价内期权，从数据中也可以发现，价外期权的交易明显比价内期权更为活跃。因此，本文剔除了价内期权的数据。

这样，经过以上五步的筛选，得到剩余的数据总量为 29170，其中看涨期权 10558，看跌期权 18612，每天横截面数据最大数为 97，最小数为 5，平均每天的数据量为 39。

然后，对筛选出的数据应用 BS 公式计算对应的隐含波动率。用 BS 公式计算隐含波动率，除了已有的期权价格及对应的行权价和期限外，还需要的参数有标的指数价格、无风险利率、红利率等参数。本文采用恒生指数收盘价作为标的价格，选用港元存款市场利率作为无风险利率，在不至于对结果造成较大影响的情况下，为了方便起见，本文对不同期限的利率进行如下处理：对所有到期期限少于一个月的期权采用月利率，到期期限在一个月到三个月期间的数据采用三个月利率，到期期限在三个月到六个月之间的采用六个月利率，到期期限在六个月到一年之间的采用年利率。并且，所有利率都转换为连续复利。对于红利率，采用香港市场平均股息率来代替，也转换为连续复利。以上数据均从香港交易所官方网站获取。

3.2 数据分析

为了对所得数据进行更深入的分析，本文根据期权的在值程度($m=K/F$)及期限(T)对数据进行分类，根据在值程度把数据分成 $m \leq 0.97$ 、 $0.97 \leq m \leq 1.03$ 和 $m \geq 1.03$ 三组，对应的期权分别是价外看跌期权、平价期权及价外看涨期权；而根据期限把数据分为 $T \leq 60$ 、 $60 < T < 180$ 和 $T \geq 180$ 三组，对应的期权分别为短期期权、中期期权及长期期权。这样，总数据就按照在值程度和期限被分成了 9 个子样本。具体分组情况见表 3.1。

根据表 3.1, 从期限的角度上看, 69.4%的期权交易数据集中于短期, 说明香港市场更倾向于交易短期期权, 而中期和长期期权分别只占了 26.5%及 4.1%; 从在值程度上看, 较多的数据分布在 $m \leq 0.97$ 和 $0.97 \leq m \leq 1.03$ 的区域内, 两者分别占了 47.2%和 30.3%, 由于本文只选取了价外期权, 这说明较多的数据集中于价外看跌期权及平价期权。

观察表 3.1 中各列, 可以发现, 不管是短期、中期、长期还是总数据, 平均隐含波动率均随 m 的增加而减小, 这说明市场中各期限的数据都存在明显的波动率偏斜现象; 观察表 3.1 各行, 可以发现, 对于 $m \leq 0.97$ 和总数据, 平均隐含波动率随期限的增加而减小, 表现为隐含波动率递减的期限结构, 然而对于剩余两行, 平均隐含波动率受期限影响不是特别明显, 并且从整体上来看, 期限对波动率的影响似乎小于在值程度的影响。

因此, 通过对数据的初步分析, 可以发现, 香港恒生指数期权的隐含波动率确实受对应期权的在值程度 m 和期限 T 的影响, 而且呈现出一定的规律性, 主要表现为波动率偏斜及递减的期限结构, 这为本文后面的模型构造提供了一定的依据。

表 3.1 数据分析表

		$T \leq 60$	$60 < T < 180$	$T \geq 180$	Total
$m \leq 0.97$	数量(百分比)	9892(33.9%)	3445(11.8%)	446(1.5%)	13783(47.2%)
	平均 IV	0.278	0.244	0.214	0.268
$0.97 < m < 1.03$	数量(百分比)	5963(20.4%)	2496(8.6%)	379(1.3%)	8838(30.3%)
	平均 IV	0.187	0.187	0.171	0.186
$m \geq 1.03$	数量(百分比)	4405(15.1%)	1784(6.1%)	360(1.2%)	6549(22.5%)
	平均 IV	0.165	0.169	0.154	0.166
Total	数量(百分比)	20260(69.4%)	7725(26.5%)	1185(4.1%)	29170(100%)
	平均 IV	0.227	0.208	0.182	0.220

4. 实证模型及实证结果

本部分内容主要对香港恒生指数期权的隐含波动率表面的动态过程进行实证分析。首先，我们将对前文提到的三种波动率确定性变动粘性规则进行实证检验，然后建立多因子随机隐含波动率模型，最后对随机隐含波动率模型进行估计和检验。

4.1 确定性变动规则的实证检验

规则 1：粘性行权价规则

根据前面部分内容介绍，在粘性行权价规则下，隐含波动率只与期权的行权价格 K 及到期日 T 有关，并且随着时间的推移，它们之间的关系保持不变，即对任意时刻 t ，时间间隔 Δt 及 (K, T) ，隐含波动率满足以下关系：

$$\sigma_t(K, T) = \sigma_{t+\Delta t}(K, T) = \phi(K, T) \quad (4.1.1)$$

对以上 ϕ 函数关于 K 和 $T-t$ 用泰勒展开近似，得：

$$\ln \sigma_t(K, T) = a_0 + a_1 K + a_2 K^2 + a_3 (T-t) + a_4 K(T-t) + \varepsilon \quad (4.1.2)$$

ε 为服从正态分布的残差项。对隐含波动率取对数的原因主要是防止模型回归得到负的隐含波动率。根据粘性行权价规则，展开式中系数 a_i 是常数。

首先，在严格意义下检验该规则，即假设粘性价规则在长期内都是成立的，因此，采用全样本代入(4.1.2)进行回归，OLS 方法进行估计得到的结果如表 4.1 所示，从表 4.1 可以看出，模型没有被拒绝，各参数估计值都非常显著，然而模型调整 R^2 只有 0.39，均方根误差(RMSE)为 0.30，相对均方根误差(RRMSE)达到 32.76%，说明模型在样本内的拟合效果较差，因此，可以说在长期(三年)内，行权价格和期限对隐含波动率的变动有影响，但粘性行权价规则不成立。

表 4.1 长期内的检验结果

参数	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
估计值	-1.8462	-3.18E-05	2.49E-09	0.7072	-5.43E-05

P 值	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Adj R²	0.3948				
RMSE	0.3032				
RRMSE	32.76%				

然而，正如 Derman(1999)所说，隐含波动率的变动不可能服从某种真正严格的确定性规则，特别是在长期，我们的目的在于检验这些规则在不同时期多大程度上满足，因此，除了用全样本对长期内粘性规则进行检验外，本文还用子样本对短期条件下粘性规则进行检验，主要进行样本内拟合和样本外预测。

对于短期检验，本文采用的方法为：首先对每天的数据单独做回归，然后用当天回归的结果对第二天的数据进行检验，如果粘性规则在短期（两天）内是成立的，那么回归参数在短期内就应该是稳定的，短期内预测效果就应该较好。表 4.2 报告了上述操作的结果，由于共有 738 组参数估计值（由于 2006.12.05 的结果显示较为奇异，因此剔除这天的数据），限于篇幅不予一一报告，表 4.2 只报告了根据每天模型估计得到的平均调整 R²、样本内平均均方根误差、样本内相对均方根误差及样本外预测平均绝对和相对均方根误差。

从表 4.2 可以看出，对于每天的样本内拟合结果，平均调整 R² 达到 0.8569，RMSE 为 0.0491，RRMSE 为 2.95%，说明模型(4.2)在样本内具有较好的拟合效果，然而，对于第二天的样本外数据检验，预测的误差大大增加，样本外 RMSE 和 RRMSE 分别达到了 0.08829 和 5.57%，比样本内拟合误差大大增加。说明即使在短期，模型的参数也不是固定不变的，在连续的两天之间参数也发生了较明显的变化，即粘性行权价规则即使在短期也不能成立。

表 4.2 短期内的检验结果

平均 adj R ²	0.8569
RMSE	0.0491
RRMSE	2.95%
样本外 RMSE	0.0829
样本外 RRMSE	5.57%

规则 2: 粘性 delta 规则

根据前面介绍, 在粘性 delta 规则下, 隐含波动率只与期权的在值程度 m 及到期日 T 有关, 并且随着时间的推移, 它们之间的关系保持不变, 即对任意时刻 t , 时间间隔 Δt 及 (m, τ) , 隐含波动率满足以下关系:

$$\sigma_{t+\Delta t}(m, \tau) = \sigma_t(m, \tau) = \phi(m, \tau) \quad (4.1.3)$$

同样, 对以上 ϕ 函数关于 m 和 τ 用泰勒展开近似, 得:

$$\ln \sigma_t(m, \tau) = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 \tau + a_4 m \tau + \varepsilon \quad (4.1.4)$$

根据粘性 delta 规则, 展开式中系数 a_i 是固定的。

同样地, 首先检验全样本数据下的粘性 delta 规则, 表 4.3 报告了结果, 从表 4.3 中可以看出, 对于全样本的长期性规则检验, 粘性 delta 规则的结果与粘性行权价规则类似, 在 $\text{Adj } R^2$ 和 RMSE 上都稍有改进, 然而仍然难以说明在长期内粘性 delta 规则的成立。

表 4.3 长期内的检验结果

参数	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
估计值	-1.6833	-3.2198	2.5444	-0.1506	4.4720
P 值	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Adj R^2	0.4001				
RMSE	0.3019				
RRMSE	30.09%				

表 4.4 则报告了短期内模型的平均拟合效果和样本外预测的结果, 从表 4.4 可以看出, 样本内拟合效果和样本外预测效果均与粘性行权价规则下的检验较为接近, 因此, 同样地, 对于恒生指数期权隐含波动率, 粘性 delta 规则在短期内同样不能成立。

表 4.4 短期内的检验结果

平均 adj R^2	0.8569
--------------	--------

RMSE	0.0491
RRMSE	2.95%
样本外 RMSE	0.0859
样本外 RRMSE	5.84%

规则 3：平稳时间平方根规则

在平稳时间平方根规则下，隐含波动率是关于 $m/\sqrt{\tau}$ 的一个确定性函数，并且该函数随时间是不变的，即隐含波动率的变动满足如下关系：

$$\sigma_{t+\Delta t}(m, \tau) = \sigma_t(m, \tau) = \Phi\left(\frac{m}{\sqrt{\tau}}\right) \quad (4.1.5)$$

对 $\ln \sigma_t(m, \tau)$ 关于 $\frac{m}{\sqrt{\tau}}$ 进行四阶泰勒展开得：

$$\ln \sigma_t(m, \tau) = a_0 + a_1 \frac{m}{\sqrt{\tau}} + a_2 \left(\frac{m}{\sqrt{\tau}}\right)^2 + a_3 \left(\frac{m}{\sqrt{\tau}}\right)^3 + a_4 \left(\frac{m}{\sqrt{\tau}}\right)^4 + \varepsilon \quad (4.1.6)$$

对(4.1.6)进行全样本数据检验，结果如表 4.5 所示。从表 4.5 可以看出，虽然模型(4.1.6)对全样本数据的拟合效果较前面两种粘性规则模型稍有改善，然而总体效果始终还是较差，难以满足平稳时间平方根规则。

表 4.5 长期内的结果

参数	a₀	a₁	a₂	a₃	a₄
估计值	-1.7529	-0.8437	1.5588	2.1097	0.7186
P 值	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Adj R ²	0.4418				
RMSE	0.2912				
RRMSE	28.32%				

同样对平稳时间平方根规则在短期内的情况进行检验，表 4.6 报告了检验的结果。同样地，从表 4.6 可以看出，模型（4.1.6）对样本内的数据有较好的拟合

效果，而样本外预测误差仍为样本内的两倍多，说明平稳时间平方根规则在短期内同样不满足。

表 4.6 短期内的结果

平均 adj R ²	0.8206
RMSE	0.0533
RRMSE	3.34%
样本外 RMSE	0.0978
样本外 RRMSE	7.46%

通过对隐含波动率变动的三种粘性规则的实证检验，我们发现对于恒指期权的隐含波动率，三种规则对于当天的隐含波动率表面都具有较好的静态拟合效果，然而，对于拟合关系不变的假设，即使在连续两个交易日内，三种规则都显然不成立。也就是说，简单的几种确定性变动规则无法解释隐含波动率的动态变动规律。因此，要考虑隐含波动率表面的动态过程，我们有必要引入随机隐含波动率模型。

4.2 随机隐含波动率实证模型的建立

风险因子的选取

根据上节的实证检验，我们可以知道，隐含波动率表面的动态过程是随机的。然而，隐含波动率表面由许许多多不同期限和不同行权价的波动率构成，因此隐含波动率表面的变动过程是一个极其复杂的多维动态系统，不仅需要为每个波动率的随机过程建模，而且还要考虑各个波动率随机过程之间的相关关系，这在现实中几乎不太可能实现。但是，我们同时又可以发现，各个隐含波动率变动之间是高度相关的，它们似乎都受某些共同因子的驱动，这就为我们提供了一种更为简单有效的方法对隐含波动率表面的变动过程建模，即建立因子模型。所谓因子模型，就是通过寻找影响隐含波动率表面每个波动率变动的共同风险因子，然后对这些风险因子的动态过程建模，通过建立这些因子与各个隐含波动率之间的关系从而得到整个隐含波动率表面的变动过程。因子模型最大的好处就在于可以大

大地简化原模型，然而模型的好坏取决于所选因子对隐含波动率表面的解释程度，过少的因子可能难以很好地反映整个波动率表面的变动情况，而过多的因子又可能造成模型的过度复杂，使得模型在现实中难以很好地被应用，因此如何选取因子是这类模型的关键之一。

对于风险因子的选取，目前的文献中主要有两种方法。一种是利用非参的方法对各个隐含波动率的变动进行主成分分析，从而找出统计意义上的因子，通过对这些主要因子的变动过程建模达到对整个波动率表面变动过程的建模需要，其中具有代表性的有 Cont and Fonseca(2002)，他们运用了 Karhunen-Loeve 分解技术对 S&P500 期权的隐含波动率表面的动态过程进行主成分分析，结果发现前三个主成分因子可以解释整个波动率表面 95%以上的变动。主成分分析的好处在于能用最少的因子解释整个波动率表面的变动，而且各个因子变动之间不相关，这对建模带来较大的方便，然而，用非参的方法分析对数据的要求比较高，最重要的一点是得出的因子只有统计意义，难以解释这些因子的现实意义，因此，本文放弃使用这种方法。

第二种方法就是本文准备采用的方法，即参数法。所谓参数法，就是用一个参数化的模型来拟合某个时间点上的隐含波动率表面，该时刻整个隐含波动率表面就由这些参数决定，并且这些参数的变动在很大程度上解释了隐含波动率表面的变动，因此，一个自然的做法就是选用这些拟合得到的参数作为隐含波动率表面的风险因子，用这些参数的变动刻画波动率表面的变动。参数因子模型的最大好处在于各个参数都有较好的意义，比如这些参数可以分别反映隐含波动率表面的水平效应、斜率及曲度等。

确定了使用参数因子模型后，下一步就是对参数模型的选取。一般来说，对隐含波动率表面的动态变化规律建模时，使用在值程度和期限来描述的相对隐含波动率表面比使用行权价和到期日表示的绝对隐含波动率表面更为方便，而两者之间也存在一一对应的转换关系。根据一般的泰勒展开方法，我们对比了隐含波动率对数关于在值程度和期限的以下几个参数模型：

$$\text{模型 1: } \ln \sigma(m, \tau) = \beta_1 + \beta_2 m + \beta_3 m^2 + \varepsilon$$

$$\text{模型 2: } \ln \sigma(m, \tau) = \beta_1 + \beta_2 m + \beta_3 m^2 + \beta_4 \tau + \varepsilon$$

$$\text{模型 3: } \ln \sigma(m, \tau) = \beta_1 + \beta_2 m + \beta_3 m^2 + \beta_4 \tau + \beta_5 m \tau + \varepsilon$$

$$\text{模型 4: } \ln \sigma(m, \tau) = \beta_1 + \beta_2 m + \beta_3 m^2 + \beta_4 \tau + \beta_5 \tau^2 + \varepsilon$$

$$\text{模型 5: } \ln \sigma(m, \tau) = \beta_1 + \beta_2 m + \beta_3 m^2 + \beta_4 \tau + \beta_5 m\tau + \beta_6 \tau^2 + \varepsilon$$

以上模型都假设隐含波动率服从对数正态分布，并且是关于 m 和 τ 的函数，此处 m 用对数值表示，即 $m = \ln(K / S e^{(r-q)(T-t)})$ 。模型 1 只考虑了 m 对隐含波动率的影响， β_1 表示对数隐含波动率的水平值， β_2 反映了隐含波动率关于 m 的斜率， β_3 度量了隐含波动率关于 m 的曲度。模型 2 则加入了期限的影响，用 β_4 表示隐含波动率关于期限的斜率，然而模型 2 假设在值程度 m 和期限不相关，即不同期限的隐含波动率关于 m 的偏斜程度相同。模型 3 则通过参数 β_5 刻画了 m 和期限的相互影响关系，期限不同，波动率偏斜程度也不同。模型 4 增加了反映波动率表面关于期限的曲度的参数。最后的模型 5 则加总了以上出现的所有因子。一般来说，在上述隐含波动率模型中，参数越多其解释力度也越强，但模型复杂程度也越大，并且模型过度参数化的风险也更大，具体模型表现如何需在实证中加以检验。

对模型 1 到 5 进行每天的回归，得到的结果如表 4.7 所示。对于样本内拟合效果，观察平均调整的 R^2 及样本内 RMSE 和 RRMSE 可以发现，随着因子数的增加，模型样本内拟合效果递增，模型 1 的样本内拟合效果最差，而模型 5 最优，模型 3 次之。然而，模型的选择不能仅从样本内拟合效果来判断，随着因子数的增加，虽然模型样本内的拟合效果递增，模型复杂程度以及模型的过度拟合化风险也递增。我们用 SIC 准则及样本外预测误差来检验模型的过度拟合化程度。最小的 SIC 值代表了样本内表现为最优的模型，表 4.7 中 SIC 行记录了用 SIC 准则判断对应模型为最优模型的天数占总样本时间数的百分比，可以发现在 SIC 准则下，模型 3 和模型 5 的表现明显优于其余模型。最后观察模型的样本外表现，容易看出，虽然模型 5 在样本内拟合是最优的，然而其在样本外的预测能力则大大减弱，因此可以判断模型 5 存在较严重的过度参数化问题，而模型 3 的样本外表现相对较好。过少的因子会导致拟合效果的不足，而过多的因子会加大模型的过度拟合化程度导致样本外预测效果的不足，综合考虑模型的样本内拟合和样本外预测能力，容易看出模型 3 为最优模型，因此，本文最终选取了模型 3 作为隐含

波动率的参数拟合模型，相应地， $\{\beta_i\}_{i=1,\dots,5}$ 作为参数拟合模型得到的参数，就成了前文介绍的参数因子模型的风险因子。

表 4.7 模型效果比较

	模型 1	模型 2	模型 3	模型 4	模型 5
Adj R2	0.7746	0.8322	0.8569	0.8445	0.8691
RMSE	0.0652	0.0554	0.0491	0.0519	0.0455
RRMSE	4.30%	3.42%	2.95%	3.13%	2.67%
SIC	21.06%	9.38%	29.48%	9.51%	30.57%
样本外 RMSE	0.0898	0.0854	0.0859	0.0912	0.0937
样本外 RRMSE	6.33%	5.83%	5.84%	6.14%	6.24%

风险因子时间序列的统计特性

由于风险因子 $\{\beta_i\}_{i=1,\dots,5}$ 是一些不可观测的抽象的状态变量，因此必须在每个交易日对隐含波动率表面做一个回归，得到这些因子的估计值，观察这些因子估计值的时间序列特性，然后才能对这些因子的变动进行建模。

对样本期内每个交易日的横截面数据进行回归，回归方程为模型 3：

$$\ln \sigma(m, \tau) = \beta_1 + \beta_2 m + \beta_3 m^2 + \beta_4 \tau + \beta_5 m\tau + \varepsilon$$

并用最小二乘法分别估计每天的模型，得到每个风险因子的一个时间序列估计值 $\{\beta_i(t)\}_{i=1,\dots,5}, t=1, \dots, 739$ 。表 4.8 总结了这些回归模型的结论，由于 2006 年 12 月 5 日的横截面回归结果显示调整 R^2 为负值，说明这一天的数据较为奇异，拟合结果非常差，为了避免对结果的影响，本文剔除了这一天的数据，最终时间序列样本数为 738。各因子的时间序列如图 4.1 所示。

从表 4.8 可以看出，五因子回归模型的调整 R^2 最小为 0.214，最大为 0.996，平均 R^2 为 0.857，说明该模型在横截面数据的拟合已达到较好的效果。然而，观察图 4.1 中各个因子估计值的时间序列可以看出，因子的剧烈变化导致隐含波动率表面在不同的时间内显示出多种不同的形状，图 4.2 给出了样本期内的一个平均隐含波动率表面的形状。

表 4.8 回归结果的时间序列统计特征

参数	均值	中值	标准差	最小值	最大值	偏度	峰度
β_1	-1.722	-1.814	0.356	-2.281	-0.543	1.339	4.314
β_2	-2.555	-2.520	1.194	-8.705	1.112	-0.549	4.136
β_3	0.648	-0.008	6.620	-66.179	42.169	-0.542	23.309
β_4	-0.021	0.028	0.321	-1.821	0.767	-1.138	6.201
β_5	2.692	2.492	3.932	-25.524	21.061	-0.182	9.996
Adj R²	0.857	0.892	0.009	0.214	0.996	-1.67	7.32
RMSE	0.049	0.043	0.026	0.006	0.167	1.172	4.650

(1).风险因子时间序列的基本特征分析

观察 β_1 序列的变动图， β_1 变动范围从最小的-2.281 到最大的-0.543，简单转换可以得到隐含波动率水平的变动范围为 10.22%到 58.10%，均值为 17.87%，并且可以发现，大概在 2007 年下半年到 2007 年末，波动率水平明显高于样本期内其它时间，这主要是由于 2007 年下半年开始，次贷危机的影响开始显现，导致全球金融市场的不确定性大大增强，从而使得波动率水平明显变大。

观察 β_2 序列图，可以发现绝大部分的 β_2 都为负值，只有极少数的几个样本时间内出现正的 β_2 ，说明隐含波动率曲面关于在值程度在大多数情况下都有负的斜率，这与前面的初步数据统计特征基本一致。

β_3 是表现最不稳定的一个因子，其值从最小-66.179 变到最大的 42.169，并且标准差也达到了 6.62，说明隐含波动率表面关于在值程度的曲度变化极大，并且凹凸不定。

β_4 是隐含波动率表面关于期限的斜率，其符号也不确定，但平均上来说，这是一个负值，表明隐含波动率关于期限是递减的，与数据统计结果也较一致。

β_5 的大部分值都为正，并且其均值也为 2.692，表明大多数情况下，对于短期期权，波动率关于在值程度偏斜比长期期权更明显，这一特点也与表 3.1 的数据统计结论是一致的。

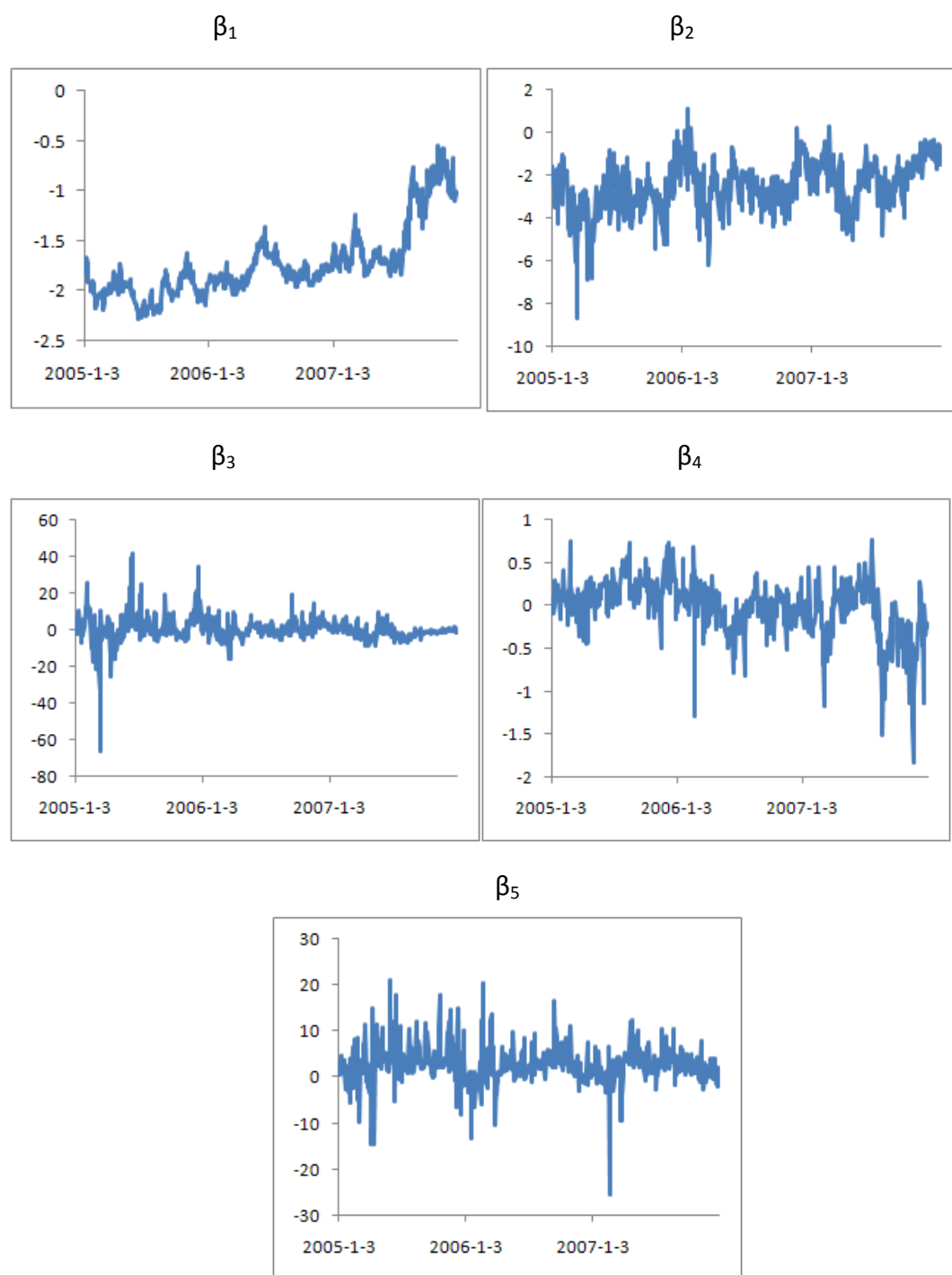


图 4.1 各因子估计值的时间序列图

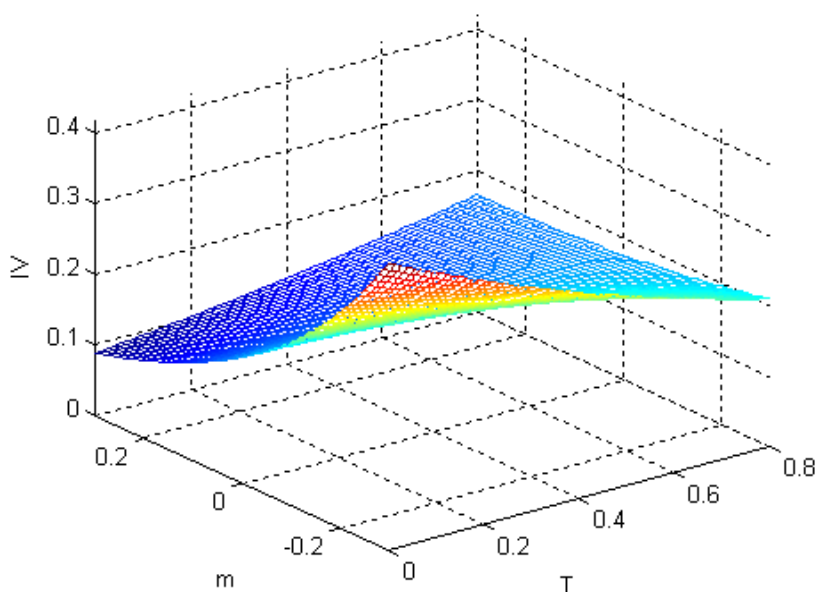


图 4.2 平均隐含波动率表面形状

(2). 风险因子时间序列平稳性和自相关分析

用 ADF 检验法对各风险因子估计值的时间序列进行平稳性检验，表 4.9 报告了各个因子对带常数和确定性时间趋势项的方程进行 ADF 检验的结果。从表 4.9 可以看出，除了因子 β_1 只能在 5% 的水平上拒绝单位根，其他四个因子都能以 1% 的水平显著拒绝单位根，表明各风险因子基本上都是平稳序列，因此可以直接对它们进行建模。

表 4.9 各因子平稳性检验结果

因子	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
t 统计量	-3.635	-7.090	-8.028	-6.421	-13.660
p 值	0.027	0.000	0.000	0.000	0.000

对各因子的估计值进行样本自相关(ACF)和偏自相关(PACF)检验，检验结果如图 4.3 和 4.4 所示。观察图 4.3，可以发现各个因子都存在很显著的自相关性，并且自相关图存在拖尾现象，说明因子服从一个自回归(AR)过程。关于自回归阶数选取，观察偏自相关图 4.4，可以发现各个因子滞后一阶的偏自相关系数都高

度显著，但对于一些因子，也会存在一些较为显著的高阶偏自相关系数。然而，考虑到这里使用的是因子的估计值作为分析，并且由于过度参数化问题，每天横截面回归得到的因子估计值不是非常可靠，通过对这些估计值的分析只能反映真实值的大致变动规律，但不能完全反映。因此，最终本文将采用最显著的一阶自回归模型来对每个因子建模，并且这也能与连续模型中的均值回复过程相对应。

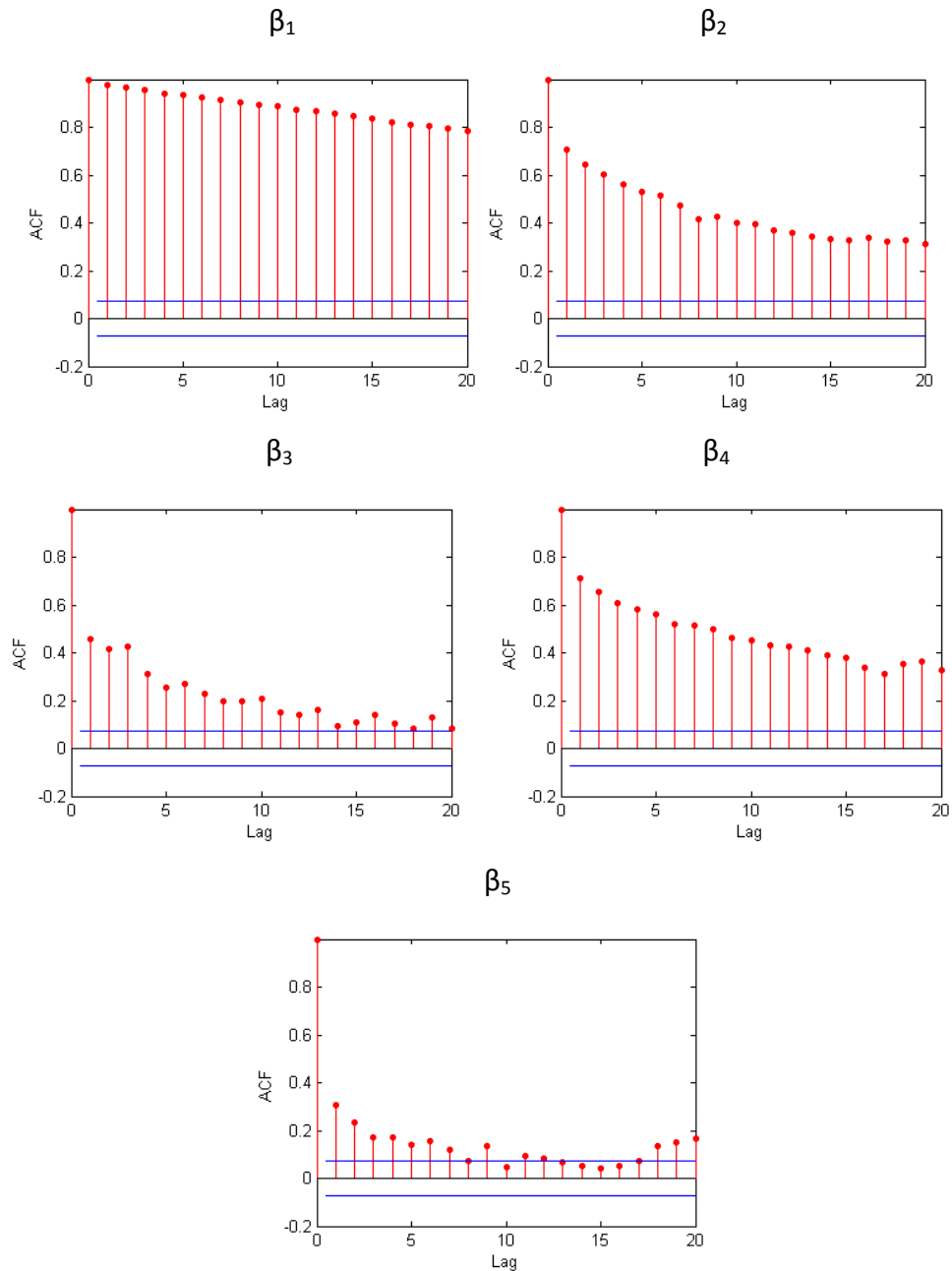


图 4.3 ACF

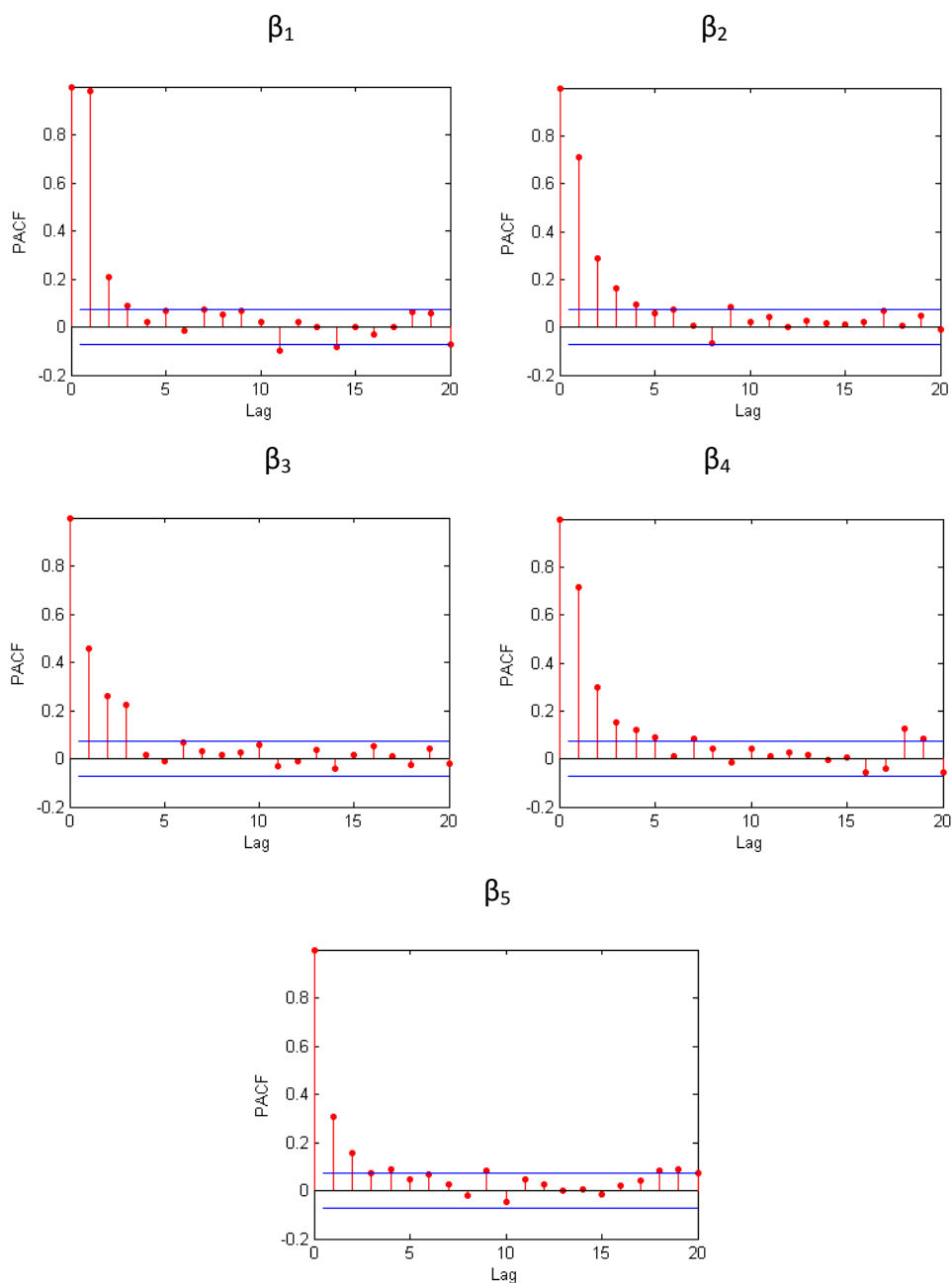


图 4.4 PACF

(3)因子间的相关性分析

表 4.10 给出了五个因子估计值时间序列之间的相关关系，可以看出，不少因子之间存在着较强的相关关系，因此，在对因子变动过程建模时，我们必须考虑因子之间的相关关系。

表4.10 相关系数矩阵

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5

β_1	1.0000	0.3811	-0.1932	-0.7423	-0.0943
β_2	0.3811	1.000	0.4966	-0.2195	-0.6060
β_3	-0.1932	0.4966	1.0000	0.1610	-0.1188
β_4	-0.7423	-0.2195	0.1610	1.0000	0.0975
β_5	-0.0943	-0.6060	-0.1188	0.0975	1.0000

五因子随机隐含波动率模型的建立

至此,我们已经对隐含波动率表面的横截面数据拟合以及拟合参数的时间序列特性进行了一系列的分析,结果发现用五因子参数模型可以较好地拟合每天的隐含波动率表面,而这些因子的时间序列都可以用一个 AR(1)过程表示。为了简便起见,本文不考虑反映因子之间互动关系的向量自回归(VAR)模型,而简单假设各因子变动之间的相关关系反映在它们各自一阶自回归方程的干扰项中。考虑到模型的应用需要,对各因子建一个连续的模型是较为方便的,因此,我们假设各个因子各自服从一个与离散时间 AR(1)模型对应的均值回复 OU 过程,即整个隐含波动率表面的变动可由如下方程系统描述:

$$\begin{cases} \ln \sigma_t(m, \tau) = \beta_1(t) + \beta_2(t)m + \beta_3(t)m^2 + \beta_4(t)\tau + \beta_5(t)m\tau + \varepsilon \\ d\beta_i(t) = \kappa_i(\theta_i - \beta_i(t))dt + \gamma_i dw_i(t) \\ dw_i(t)dw_j(t) = \rho_{ij}dt \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, 5 \quad (4.2.1)$$

其中 κ_i 表示第 i 个因子的均值回复速度, θ_i 表示第 i 个因子的长期均值, γ_i 表示第 i 个因子的波动项, 这里假设它们都为常数, $dw_i(t)$ 则表示反映第 i 个因子随机变动的标准布朗运动, 而 ρ_{ij} 表示两个布朗运动 $dw_i(t)$ 和 $dw_j(t)$ 之间的相关系数。

4.3 随机隐含波动率模型的估计及结果分析

在前面内容中,我们得到了一个描述隐含波动率表面随机变动过程的五因子模型,本部分内容将对该模型进行估计和检验。估计方程系统(4.2.1)的参数,一

个最容易想到的方法就是首先对每天的横截面数据进行回归,然后用回归得到的因子估计值的时间序列作为数据输入,再次估计动态过程的参数,这就是所谓的两步估计法。两步估计法最大的好处在于其简便性,它把横截面估计和时间序列估计分开进行,因此比较容易实现,国外如 Hafner(2004)和 Guidolin(2004)等学者在对隐含波动率表面动态过程建模时所使用的就是这种方法。

然而,两步估计法的局限在于其估计结果的有效性,由于第二步估计使用的数据输入是第一步估计得到的因子的估计值,因此,第二步估计结果的有效性很大程度上依赖于第一步的结果。对于成熟有效的市场,如果横截面数据足够多,并且第一步回归的拟合程度足够好,那么这种方法误差就相对较小,因为在这种情况下第一步回归结果就比较可靠,对第二步回归结果影响有限。但对于横截面样本数据较少的市场,这种方法就不再适用。由于静态拟合只考虑了市场当前的信息,模型以对当前样本拟合误差最小化为唯一目的,而不考虑市场过去的信息,而在横截面样本数较小的情况下对横截面数据进行回归很容易出现过度参数化的问题,用过多的参数拟合过少的数据,这种情况下通常都能得到较好的拟合效果,但却使得参数变得很不稳定,参数对数据变动非常敏感,市场数据发生微小变动就有可能导致前后两天之间得到的参数估计值大幅度变动,因此,这种情况下得到的参数估计值就不可靠,并且非常不稳定,而动态模型不仅要关心对当前曲面的拟合效果,更要考虑其随时间变动的规律,如果用这些参数估计值作为第二步估计的输入,那么就很难得到有效的结果。

对于香港市场,我们的数据显示对于很多时间的横截面数据都较少,典型的如 2006 年 12 月 27 日,处理后可用数据为 5 个,而我们的回归模型因子数也为 5,可以得到很好的拟合结果,其 R^2 达到了 0.995,但参数的估计值就明显不可靠。通过上节对各个风险因子时间序列分析也可以看出,各个因子估计值的波动非常大,变动的原因很可能不完全是由于市场波动引起的,而可能是由小样本横截面数据下得到估计参数值不稳定造成的。因此,为了克服这个问题,本文决定采用小样本数据下扩展的卡尔曼滤波法对方程系统(4.2.1)进行估计。然而,作为比较,本文同时给出了两步回归法的结果。

卡尔曼滤波方法介绍

卡尔曼滤波法是一种高效率的递归滤波器，它可以从状态空间描述的并且包含噪声干扰的信号中提取有用信号。在数学上，卡尔曼滤波法是一种统计估计方法，通过处理一系列带有误差的实际测量数据而得到参数的最佳估计。卡尔曼滤波法对于状态变量不可观测的情况下的参数估计尤显优势，目前，在经济领域，该方法已经较广泛地应被用于动态利率期限结构模型的估计。动态利率期限模型的特点在于它们都假设利率是由一些不可观测的状态变量驱动，而这些状态变量和市场可观测的期限结构之间又满足某些特定的关系，卡尔曼滤波联合所有过去和现在的市场信息，同时估计观测方程及状态变量的变动方程，从而达到有效的估计。

本文的模型假定隐含波动率表面是由五个风险因子所驱动，而这些因子在市场上是无法观测，因此，采用卡尔曼滤波法进行估计应该是较为有效的。然而，经典的卡尔曼滤波法要求丰富的数据，并且对每个时间点的观测方程数要求一致，而本文的数据中，由于每天的横截面数据大小变化极大，而且在很多情况下横截面样本数目较小，因此，我们采用 Cortazar, Schwartz and Naranjo (2004)提出的基于小样本面板数据的扩展的卡尔曼滤波方法。

卡尔曼滤波通常包括度量方程和转移方程。度量方程是联系状态变量和可观测变量之间关系的方程。设 z_t 表示可观测变量的向量， x_t 表示状态变量的向量，设它们之间的关系满足如下的度量方程：

$$\begin{aligned} z_t &= d_t + H_t x_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim N(0, R_t) \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

其中 z_t 为 $q_t \times 1$ 维观测变量向量， q_t 表示时间 t 的观测变量个数，标准卡尔曼滤波要求 q_t 为一个常数，而扩展的卡尔曼滤波法放松了这一要求，使得每个时间点的度量方程数可以不同。 d_t 为 $q_t \times 1$ 向量， H_t 为 $q_t \times n$ 维系数矩阵， x_t 为 $n \times 1$ 状态变量向量， n 表示状态变量个数。 ε_t 为 $q_t \times 1$ 序列不相关的度量误差， R_t 为其 $q_t \times q_t$ 协方差阵，因此 ε_t 满足：

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \begin{cases} R_t & \text{当 } t = \tau \\ 0 & \text{当 } t \neq \tau \end{cases}$$

转移方程描述了不可观测的状态变量的动态过程，设转移方程为：

$$\begin{aligned} x_t &= c + Ax_{t-1} + \xi_t \\ \xi_t &\sim N(0, Q) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

其中 c 为 $n \times 1$ 向量， A 为 $n \times n$ 矩阵。 ξ_t 为 $n \times 1$ 序列不相关的残差， Q 为 $n \times n$ 协方差矩阵，满足：

$$E(\xi_t \xi_t') = \begin{cases} Q & \text{当 } t = \tau \\ 0 & \text{当 } t \neq \tau \end{cases}$$

这里假设度量方程误差项 ε_t 和转移方程的误差项 ξ_t 在所有阶滞后都不相关，即 ε_t 和 ξ_t 满足：

$$E(\varepsilon_t \xi_t') = 0 \quad \text{对 } \forall t \text{ 和 } \tau$$

方程组(4.3.1)和(4.3.2)就构成了动态系统的状态空间表示。

卡尔曼滤波估计的两个主要步骤为预测步骤和更新步骤。

给定 t 时刻及之前的所有信息，卡尔曼滤波能得到 t 时刻状态变量 x_t 的最优估计 \hat{x}_t ，用 P_t 表示估计误差的协方差矩阵：

$$P_t = E(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)' \quad (4.3.3)$$

给定 \hat{x}_{t-1} 及 P_{t-1} ，它们包含了 $t-1$ 时刻及之前的所有信息，利用(4.3.2)可得 $t-1$ 信息下对 t 时刻状态变量 x_t 的预测值及预测误差协方差阵：

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t-1} &= c + A\hat{x}_{t-1} \\ P_{t|t-1} &= AP_{t-1}A' + Q \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

(4.3.4)通常被称为预测步骤。

当时间从 $t-1$ 变到 t ，由于有新信息 z_t 的进入，可以用这些新信息来更新

(4.3.4)预测得到结果：

$$\begin{aligned} \hat{x}_t &= \hat{x}_{t|t-1} + P_{t|t-1}H_t'F_t^{-1}v_t \\ P_t &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1}H_t'F_t^{-1}H_tP_{t|t-1} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

其中

$$\begin{aligned} v_t &= z_t - (H_t \hat{x}_{t|t-1} + d_t) \\ F_t &= H_t P_{t|t-1} H_t' + R_t \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

(4.3.5)和(4.3.6)通常被称为更新步骤。

事实上，更新步骤就是在给定历史观测值 $\{z_t\}_{t=1}^{t-1}$ 及新信息 z_t 的条件下计算状态向量 x_t 的条件期望，即 $\hat{x}_t = E_{t-1}(x_t | z_t)$ ，而且可以证明 \hat{x}_t 是 x_t 的最优估计。

整个预测和更新步骤从初始时刻开始，因此需要给出初始时刻的状态向量的预测值及预测方差，即在没有任何信息下的预测和方差。根据 Hamilton (1994)，初始时刻的状态向量预测值由其无条件期望给出，即

$$\hat{x}_{|0} = E(x_t)$$

而初始时刻的预测方差由其无条件方差给出，其满足

$$\text{vec}(P_{|0}) = [I_{n^2} - A \otimes A]^{-1} \cdot \text{vec}(Q)$$

其中 \otimes 表示矩阵的克罗内克积。

卡尔曼滤波使用最大似然估计法估计参数，从初始值开始不断迭代，得到预测误差 v_t 的对数似然函数为：

$$\log L(\psi) = -\frac{1}{2} \sum_t |F_t| - \frac{1}{2} \sum_t v_t' F_t^{-1} v_t \quad (4.3.7)$$

其中 ψ 表示待估计的参数向量。用最优化方法求 (4.3.7) 的最大值，得到参数的估计向量 $\hat{\psi}$ 即为卡尔曼滤波法得到的各参数的估计值。

参数估计误差的协方差矩阵为 $I^{-1}(\psi)$ ，其中 $I(\psi)$ 表示为：

$$I(\psi) = \frac{\partial \log L(\psi)}{\partial \psi \partial \psi'} \quad (4.3.8)$$

卡尔曼滤波法在五因子随机隐含波动率模型中的应用

1. 度量方程

在五因子随机隐含波动率模型(4.2.1)中，度量方程即为各个隐含波动率关于 m 和 τ 展开的方程，即 t_i 时刻的度量方程可表示为：

$$\begin{bmatrix} \ln \sigma_{t_i}(m_1, \tau_1) \\ \vdots \\ \ln \sigma_{t_i}(m_{q_t}, \tau_{q_t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m_1 & m_1^2 & \tau_1 & m_1 \tau_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & m_{q_t} & m_{q_t}^2 & \tau_{q_t} & m_{q_t} \tau_{q_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t_i) \\ \beta_2(t_i) \\ \beta_3(t_i) \\ \beta_4(t_i) \\ \beta_5(t_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1(t_i) \\ \vdots \\ \varepsilon_{q_t}(t_i) \end{bmatrix} \quad (4.3.9)$$

矩阵表示形式为：

$$z_t = H_t x_t + \varepsilon_t \quad (4.3.10)$$

并假设各度量方程的误差项之间满足独立同分布，具有相同的方差 δ ，则度量误差 ε_t 的方差协方差矩阵为：

$$R_t = \begin{bmatrix} \delta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta \end{bmatrix}_{q_t \times q_t} \quad (4.3.11)$$

2. 转移方程

五因子随机隐含波动率模型的转移方程由反映因子变动的五维 OU 过程给出，由于对随机变动方程 $d\beta_i(t) = \kappa_i(\theta_i - \beta_i(t))dt + \gamma_i dw_i(t)$ 进行离散化处理，可得：

$$\beta_i(t_j) | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \sim N\left(\theta_i(1 - e^{-\kappa_i \Delta t}) + \beta_i(t_{j-1})e^{-\kappa_i \Delta t}, \gamma_i^2(1 - e^{-2\kappa_i \Delta t}) / 2\kappa_i\right) \quad (4.3.12)$$

因此，对五个因子变动方程离散化，可得转移方程为：

$$\begin{bmatrix} \beta_1(t_i) \\ \vdots \\ \beta_5(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1(1 - e^{-\kappa_1 \Delta t}) \\ \vdots \\ \theta_5(1 - e^{-\kappa_5 \Delta t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-\kappa_1 \Delta t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-\kappa_5 \Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t_{i-1}) \\ \vdots \\ \beta_5(t_{i-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1(t_i) \\ \vdots \\ \xi_5(t_i) \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

其中

$$\xi(t_i) | \mathcal{F}_{t_{i-1}} \sim N(0, Q),$$

$$Q = \left[\frac{\gamma_i \gamma_j \rho_{ij}}{\kappa_i + \kappa_j} (1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j) \Delta t}) \right]_{i, j=1, \dots, 5}$$

用向量表示即为：

$$x(t_i) = c + Ax(t_{i-1}) + \xi(t_i) \quad (4.3.14)$$

这样，我们就给出了五因子随机隐含波动率模型下的卡尔曼滤波状态空间表示，根据前面的递推过程就可以得到对数似然函数(4.3.7)，待估计的参数共为 26 个，分别为：

$$\psi = \{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \dots, \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{15}, \rho_{23}, \rho_{24}, \rho_{25}, \rho_{35}, \rho_{35}, \rho_{45}, \delta\}$$

卡尔曼滤波方法估计结果

应用 matlab 软件下的约束条件非线性函数最优化算法，把 738 个样本期内共 29127 个样本数据代入，求解对数似然函数(4.3.7)的最大值。经过反复的调试运算，最终得到对数似然函数值为 65288 及 26 个参数估计结果和相应的标准误如表 4.11 所示。

表 4.11 卡尔曼滤波方法的估计结果

参数	估计值	标准误	参数	估计值	标准差
κ_1	5.7349	1.0437	γ_4	1.8402	0.0896
κ_2	24.2365	3.1373	γ_5	17.9455	1.1306
κ_3	25.3493	3.9338	ρ_{12}	0.0424	0.0648
κ_4	19.3479	3.1157	ρ_{13}	-0.0801	0.0385
κ_5	31.8092	5.3463	ρ_{14}	-0.8927	0.0126
θ_1	-1.6854	0.0850	ρ_{15}	0.0298	0.1122
θ_2	-2.5145	0.1896	ρ_{23}	0.7959	0.0303
θ_3	-0.6311	0.4958	ρ_{24}	-0.0600	0.0813
θ_4	-0.0212	0.0526	ρ_{25}	-0.8391	0.0242
θ_5	2.4114	0.3262	ρ_{34}	0.0015	0.0344
γ_1	0.8995	0.0282	ρ_{35}	-0.5781	0.0580
γ_2	8.0464	0.3381	ρ_{45}	0.0048	0.1472
γ_3	21.6992	1.4878	δ	0.0035	0.0000

由表 4.11 可以看出，除了几个接近零的相关系数外，卡尔曼方法估计得到的参数结果大多都比较显著。其中， κ_i 表示了第 i 个因子的均值回复速度，结果显示第一个因子均值回复速度相对最小，其它几个因子回复速度都较大，并且在离散模型中， $e^{-\kappa_i \Delta t}$ 对应的是滞后项的系数， κ_i 越小，该系数的值越大，表明该因子受滞后项的影响越明显； θ_i 表示了第 i 个因子的长期均值水平，可以看到，前四个因子的均值水平都为负值，只有第五个因子均值为正，而各因子的均值水平也反映了各个因子与对数隐含波动率在平均意义上的一个关系； γ_i 表示了第 i 个因子的波动，这里的结果与前面因子时间序列统计特性中得到的结果较为一致，反映隐含波动率表面水平变动的第一个因子的波动最小，而反映表面曲率变动的第三个因子的波动最大；在相关系数 ρ_{ij} 中，有一部分系数值较接近零，并且不显著，表明这些因子间相关关系较弱，而对于其它一些因子，如因子 1 和因子 4，因子 2 和因子 5 之间则体现了很强的负相关性，这些与前面的结论也都是基本一致的。

两步估计法估计结果

为了比较，本部分内容给出前面介绍的两步估计法得到的结果。把(4.2.1)模型因子的动态过程进行离散化，并用 SUR 法(表面无关回归)估计方程系统，最终得两步法下 25 个参数估计值如表 4.12 所示。

表 4.12 两步估计法结果

参数	估计值	参数	估计值
κ_1	11.4191	γ_4	3.5315
κ_2	79.0179	γ_5	59.5107
κ_3	123.1454	ρ_{12}	0.0950
κ_4	60.6543	ρ_{13}	-0.1747
κ_5	129.8811	ρ_{14}	-0.7552

θ_1	-1.6995	ρ_{15}	-0.0307
θ_2	-2.5549	ρ_{23}	0.5023
θ_3	0.6291	ρ_{24}	-0.1217
θ_4	-0.0228	ρ_{25}	-0.6888
θ_5	2.6935	ρ_{34}	0.0376
γ_1	1.0858	ρ_{35}	-0.1105
γ_2	13.2092	ρ_{45}	0.0522
γ_3	92.2760		

观察表 4.12 的结果可以看出，两步法下得到的结果最明显的差别在于各个均值回复项和波动项都远远大于卡尔曼滤波方法下的结果，说明各个因子的变动只有在很小程度上能由其滞后项解释，大部分的变动都体现在残差项中，造成了模型效果的大幅降低。这也验证了我们前面的说法，即由于过度参数化问题的存在，很多时候第一步估计得到的结果本身就不可靠，造成因子时间序列变动极不稳定，从而使得第二步的估计无法得到很好的结论。

模型结果比较和分析

比较表 4.11 和表 4.12 的估计结果，我们就可以发现卡尔曼滤波方法得到的结果使各因子的变动更为稳定，然而，检验模型结果的好坏，我们更要关心的是其在样本内的拟合效果及在样本外的预测能力。这里，我们仍然以样本内外的均方根误差及均方根相对误差作为检验模型拟合效果及样本外预测能力的指标。我们把 2007.01.02 至 2007.12.31 共 246 个交易日作为检验期，表 4.13 分别给出了各个模型的检验结果。需要说明，对于样本外检验，我们首先用 2005.01.03 至 2006.12.29 两年的数据作为样本期对模型进行重新估计，然后用这个估计结果对 2007 年各个交易日进行一步预测，表 4.13 给出的就是对每天预测得到的均方根误差的一个均值。为了说明随机动态模型的效率，这里同样给出了前面介绍的静态模型 3 的拟合和预测效果进行比较，其中静态模型以当前的因子估计值作为第

二个交易日因子值的最优预测，这也可以理解为假设因子的变动服从一个随机游走的模型。

观察表 4.13，对于卡尔曼滤波方法下得到的随机动态模型，样本外的表现与样本内十分接近，并且都达到一个 5% 左右的较小的误差水平，说明模型效果较好，而且结果稳定可靠；对于两步法得到的随机动态模型，无论在样本内还是在样本外的指标都劣于卡尔曼方法，尤其是对于样本外预测效果，劣势更为明显，这充分说明了两步法估计的巨大误差；对于静态模型，由于进行了每天的单独拟合，其使用的参数数量远远大于随机动态模型，因此其样本内的表现肯定会优于动态模型，然而，对于样本外的预测指标，静态模型的表现能力就大大降低，表 4.13 的结果也正好符合了上面的分析，静态模型在样本内表现是最优的，为 3.2%，但对于样本外，误差增加到原来的两倍多，达到了 7.51%，增加幅度远远大于动态模型。

综上比较分析，我们可以得到，在刻画隐含波动率表面随时间变动规律方面，随机动态模型由于其更好的样本外表现明显优于确定性变动模型，而在随机动态模型的估计方法上，无论从稳定性角度还是样本内样本外表现能力看，卡尔曼滤波方法都明显比两步估计法更为有效。

表 4.13 模型效果比较

	随机动态模型		静态模型 3
	卡尔曼滤波方法	两步估计法	
RMSE	0.0756	0.0837	0.0409
RRMSE	5.050%	5.645%	3.20%
样本外 RMSE	0.0763	0.0917	0.0825
样本外 RRMSE	5.089%	8.769%	7.51%

与标的指数的相关性分析

在前面内容中，我们得到了五因子随机隐含波动率模型的估计结果，然而作为定价和风险管理的需求，我们还必须同时考虑标的股票价格运动规律以及与隐含波动率变动过程之间的相关性。根据因子模型的特点，整个隐含波动率表面随

时间的变动都是由因子的变动引起的,因此考虑标的股票与隐含波动率表面的相关性就只需要考虑各个因子变动过程与股票过程的相关关系。

设股票在现实测度下的运动过程为

$$ds(t) = \mu s(t)dt + v(t)s(t)dw_0(t) \quad (4.3.15)$$

根据前面的重要结论,股票的瞬时波动率等于期限趋于零的平价期权的隐含波动率,再根据实证模型(4.2.1)的假设,可得股票瞬时波动率为:

$$v(t) = \sigma(t, 0, 0) = e^{\beta_1(t)} \quad (4.3.16)$$

即股票的瞬时波动率可以由隐含波动表面因子模型中第一个因子的指数表示。因此, (4.3.15)就可以表示成:

$$\frac{ds(t)}{s(t)} = \mu dt + e^{\beta_1(t)} dw_0(t) \quad (4.3.17)$$

为了得到股票运动的标准正态分布扰动项,对(4.3.17)整理并离散化,可得:

$$\ln(s(t_i)) = \ln(s(t_{i-1})) + \left(\mu - \frac{1}{2}e^{2\beta_1(t_i)}\right)\Delta t + \varepsilon_0(t_i)e^{\beta_1(t_i)}\sqrt{\Delta t} \quad (4.3.18)$$

简单转换即可得股票过程的标准正态分布扰动项的时间序列:

$$\varepsilon_0(t_i) = \frac{\ln(s(t_i)/s(t_{i-1})) - \left(\mu - \frac{1}{2}e^{2\beta_1(t_i)}\right)\Delta t}{e^{\beta_1(t_i)}\sqrt{\Delta t}}, \quad i = 2, \dots, 738 \quad (4.3.19)$$

隐含波动率各因子过程则根据(4.3.13),可得影响各因子的标准正态分布干扰项的时间序列为:

$$\varepsilon_j(t_i) = \frac{\beta_j(t_i) - \theta_j(1 - e^{-\kappa_j\Delta t}) - e^{-\kappa_j\Delta t}\beta_j(t_{i-1})}{\sqrt{\gamma_j^2(1 - e^{-2\kappa_j\Delta t})/2\kappa_j}}, \quad (4.3.20)$$

其中 $j=1, \dots, 5$, $i=2, \dots, 738$ 。

因此,根据(4.3.19)和(4.3.20),即可得标的股票与各因子的相关关系的样本估计值:

$$\rho_{0j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_j(t_i)\varepsilon_0(t_i) \quad (4.3.21)$$

在样本期内，恒生指数的平均收益率为 24.04%，因此取 $u=24.04\%$ 。各因子的时间序列由卡尔曼滤波最优估计值给出，时间间隔 $\Delta t = 1/246$ ，根据以上式子容易得到各因子与标的指数的相关系数分别为：

表 4.14 各因子与标的指数的相关关系

ρ_{01}	ρ_{02}	ρ_{03}	ρ_{04}	ρ_{05}
-0.4509	0.1781	0.1844	0.3580	-0.1977

从表 4.14 可以发现，代表波动率水平的第一个因子与标的指数收益率的负相关性最大，达到了 -0.4509，说明指数收益率越小，其对应的波动率越大，即市场向下时的波动比向上时的波动大，这个结论与香港市场的经验也较为一致。而标的股票收益率与其他因子的相关关系就表现得不是很明显。

4.4 稳健性检验

本部分内容将对前文的模型结论进行稳健性检验。首先，在前面粘性规则检验以及模型选取时，我们都是用了单独一天的数据作为样本进行拟合，然后用这个结果来对第二天的数据预测，得到了我们的结论。然而，是否有可能是由于样本内拟合时由于包含的信息量不足导致拟合结果的不准确而造成预测误差，如果我们用更多的横截面数据作为样本进行拟合时，预测效果会不会改善？原结论是否成立？第二，对于前面所有模型，我们都是在全样本的情况下进行的，然而是不是有可能某些结论只在该特定样本下成立，在其他子样本中就不成立呢？针对这两个问题，我们分别进行了检验。

首先，针对第一个问题，我们前面也曾提到，在某一天样本数过少的情况下，过度参数化问题严重，造成样本得到的参数就不可靠，此时，如果第二天进行预测时，造成预测误差大的原因有可能就在于本身参数估计的不准确。因此，我们采用两个连续交易日的数据作为样本进行拟合，这样，用于参数估计的信息就大大增加，从而参数估计结果的准确性也增加。然后，我们用得到的参数估计值对第三个交易日的数据进行样本外检验。

粘性规则检验的结果由表 4.15 给出。可以看出，用连续两个交易日的数据作为样本的情况下，三种规则的样本内拟合效果都比原来的结果差，这也是必然的结果，样本外的预测效果则比原先有所增强，然而两种改变都不明显，样本外预测误差还是在很大程度上比样本内大，说明粘性规则本身就不成立，而不是由于估计不准确造成，这支持了我们原来的结论。

同样，在因子模型的选取时，我们用同样的改进方法对五个候选模型进行比较，结果由表 4.16 所示。可以看出，在这种情况下，模型 3 的优势更为明显，其被 SIC 准则选中的比例大大超过其它模型，并且样本内样本外的综合表现能力较其他模型都有较大优势，因此原结论仍然成立。

针第二个问题，我们采用各个子样本对模型进行检验。对粘性检验和因子模型的选取，我们把全样本分为三个子样本进行检验，三个子样本分别表示 2005, 2006 及 2007 年的数据。表 4.17 给出了三个子样本下各种粘性规则的检验结果，表 4.18、表 4.19 和表 4.20 分别给出了三个子样本下五个静态因子模型比较。对于动态模型样本内和样本外能力比较，我们分别用 2005 年数据作为样本内估计，2006 年作为样本外预测，以及 2006 年作为样本内估计，2007 年作为样本外预测。表 4.21 给出了结果。观察上述表格，可以发现，对于不同的样本期，所有的结论依然成立。因此，我们就可以排除以上结论只在某些特定样本期内成立的可能。

表 4.15 稳健性检验 1 的粘性规则检验结果

	规则 1	规则 2	规则 3
平均 adj R ²	0.8331	0.8287	0.8043
RMSE	0.0572	0.0581	0.0604
RRMSE	3.61%	3.69%	3.91%
样本外 RMSE	0.0765	0.0790	0.0828
样本外 RRMSE	5.05%	5.25%	5.74%

表 4.16 稳健性检验 1 的模型比较结果

	模型 1	模型 2	模型 3	模型 4	模型 5
--	------	------	------	------	------

Adj R²	0.7522	0.8042	0.8287	0.8150	0.8389
RMSE	0.0720	0.0637	0.0581	0.0611	0.0556
RRMSE	4.88%	4.11%	3.69%	3.88%	3.48%
SIC	17.53%	9.10%	36.68%	7.20%	29.48%
样本外 RMSE	0.0877	0.0822	0.0790	0.0839	0.0814
样本外 RRMSE	6.07%	5.51%	5.25%	5.57%	5.34%

表 4.17 子样本粘性规则检验结果

	子样本 1			子样本 2			子样本 3		
	规则 1	规则 2	规则 3	规则 1	规则 2	规则 3	规则 1	规则 2	规则 3
adj R²	0.8317	0.8329	0.7874	0.8356	0.8349	0.8282	0.8956	0.8954	0.8389
RMSE	0.0540	0.0537	0.0582	0.0525	0.0526	0.0513	0.0408	0.0410	0.0506
RRMSE	2.76%	2.74%	2.98%	2.91%	2.91%	2.86%	3.19%	3.20%	4.9%
样本外 RMSE	0.0904	0.0940	0.1203	0.0785	0.0814	0.0817	0.0797	0.0825	0.0916
样本外 RRMSE	4.94%	5.18%	7.88%	4.61%	4.84%	5.09%	7.16%	7.51%	9.42%

表 4.18 子样本 1 下模型比较结果

	模型 1	模型 2	模型 3	模型 4	模型 5
Adj R²	0.7646	0.8028	0.8329	0.8099	0.8403
RMSE	0.0677	0.0612	0.0537	0.0586	0.0510
RRMSE	3.51%	3.18%	2.74%	3.04%	2.59%
SIC	21.95%	12.20%	37.40%	4.07%	24.39%
样本外 RMSE	0.0942	0.0937	0.0940	0.1015	0.1093
样本外 RRMSE	5.21%	5.23%	5.18%	5.62%	5.99%

表 4.19 子样本 2 下模型比较结果

	模型 1	模型 2	模型 3	模型 4	模型 5
Adj R²	0.7924	0.8159	0.8349	0.8244	0.8443
RMSE	0.0630	0.0579	0.0526	0.0551	0.0497
RRMSE	3.63%	3.26%	2.91%	3.08%	2.73%
SIC	28.81%	9.47%	25.93%	11.11%	24.69%
样本外 RMSE	0.0822	0.0798	0.0814	0.0863	0.0886
样本外 RRMSE	4.94%	4.73%	4.84%	5.09%	5.22%

表 4.20 子样本 3 下模型比较结果

	模型 1	模型 2	模型 3	模型 4	模型 5
Adj R²	0.7596	0.8704	0.8954	0.8917	0.9149
RMSE	0.0651	0.0472	0.0410	0.0421	0.0361
RRMSE	5.78%	3.84%	3.20%	3.28%	2.70%
SIC	12.65%	6.53%	24.90%	13.06%	42.86%
样本外 RMSE	0.0930	0.0826	0.0825	0.0858	0.0832
样本外 RRMSE	8.84%	7.56%	7.51%	7.71%	7.51%

表 4.21 子样本下动态模型比较结果

	子样本 1			子样本 2		
	随机动态模型		静态模型 3	随机动态模型		静态模型 3
	卡尔曼方法	两步估计法		卡尔曼方法	两步估计法	
RMSE	0.0702	0.0730	0.0526	0.0756	0.0837	0.0409

RRMSE	4.03%	4.19%	2.91%	5.05%	5.65%	3.20%
样本外 RMSE	0.0704	0.0837	0.0814	0.0781	0.0714	0.0825
样本外 RRMSE	4.06%	8.33%	4.84%	5.12%	6.79%	7.51%

5. 结论

针对 BS 期权定价模型及传统波动率模型的种种缺陷, 学者们发展了一种以市场为基础的模型, 即隐含波动率模型。这类模型区别于传统模型的关键在于把标的股票与普通期权同时作为标的, 因此可以对股票及隐含波动率同时建模。Schonbucher (1999) 等发展了无套利条件下的随机隐含波动率模型框架, 从而为风险中性测度下的模型建立了理论基础。本文主要对香港恒生指数期权隐含波动率表面的变动规律进行了实证研究, 所选取的数据为香港恒生指数 2005.1.3 至 2007.12.31 间的价外和平价期权的日交易数据。

通过实证检验, 我们发现隐含波动率表面不是固定的, 并且其随时间的变动规律不满足市场中常用的几种简单确定性变动规则, 而是一个随机变动的过程。然而, 各个隐含波动率的随机变动之间又是高度相关的, 可以用几个共同因子的变动来刻画整个表面的变动过程。通过五个候选拟合模型比较, 我们发现, 采用 5 因子对隐含波动率表面进行拟合可以达到较好的效果。并且, 不像非参估计法中主成分分析等统计方法, 这些因子具有较好的直观意义, 分别代表隐含波动率表面的水平因子、斜率因子及曲度因子等。因此, 类似 Hafner and Schmid(2005) 及 Goncalves and Guidolin(2006), 本文采用参数法对恒生指数期权建立随机隐含波动率模型。通过对各因子估计值的时间序列统计特征进行分析, 最终得到了一个用均值回复 OU 过程表示的五因子随机隐含波动率模型。

在模型估计方面, 国外学者一般采用的是两步估计法, 这种方法对于大样本市场下的模型估计效果还相对较好, 而且比较容易实现, 然而, 对于样本数相对较少的市场, 这种方法引起的过度参数化及参数不稳定问题就较为严重, 导致两步估计法得到的估计结果存在较大缺陷, 因此, 本文采用了 Cortazar, Schwartz and Naranjo (2004) 针对利率动态模型估计时提出的基于小样本面板数据的扩展的卡尔曼滤波方法进行了模型的估计, 这种方法同时对横截面和时间序列进行估计, 既考虑了模型的拟合效果又考虑了因子变动的稳定性, 因此是一种较为有效的估计方法。

通过对这两种方法得到的估计结果进行比较, 我们发现无论在参数的稳定性、样本内拟合效果还是在样本外预测效果, 卡尔曼滤波法都要明显地优于两步估计法, 并且由卡尔曼滤波法得到的随机动态模型在捕捉隐含波动率表面随时间

变动规律方面明显优于静态模型。最后，通过考察各个因子与标的指数的相关关系，我们发现在香港市场上恒生指数的收益率与其波动率之间存在明显的负相关关系。

本文的模型可以较好地应用于期权组合风险管理、复杂衍生产品定价及波动率相关产品定价等方面。但笔者认为，本文的模型还存在进一步的扩展空间，主要体现在以下两个方面。

首先，本文的侧重点为隐含波动率表面在现实测度下动态过程的实证建模和估计，对于风险中性测度下的模型，本文直接采用了 Schonbucher(1999)等提出的风险中性测度下隐含波动率漂移项的无套利限制。然而，在理论上这些限制固然应该满足，但在现实中我们却无法保证，因为该无套利条件涉及到整个隐含波动率表面各点之间的复杂的相互关系，即使无套利条件不满足，我们也很难发现并构造套利组合来套利，因此，如何构造更为有效的无套利限制是此类模型的拓展研究之一。

第二，本文对隐含波动率表面的建模主要使用的是布朗运动框架下的连续模型，但是，对实际数据观察可以发现，隐含波动率的变动往往存在一些较大的非连续跳跃的性质，因此，一个包含非连续跳跃项的模型可能可以更好地捕捉隐含波动率真实的变动。对于长期的模型，隐含波动率在不同的经济状态下表现出了不同的规律，比如在股市处于熊市阶段，市场波动剧烈，隐含波动率整体水平往往显著高于牛市阶段的情形，而且波动率的波动也更为剧烈，因此，一个包含马尔科夫机制转换模型可能可以更好地捕捉隐含波动率在不同经济状态下的变动规律。因此，在后续研究中，可以尝试引用更为复杂的模型来描述现实中隐含波动率表面的随机动态过程。

参考文献

- [1] Alentorn, A. Modeling the implied volatility surface: an empirical study for FTSE options. Working paper, University of Essex, May, 2004.
- [2] Bates, D. Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in deutsche mark options. *The Review of Financial Studies*, 1996, (9),69-107.
- [3] Black, F., and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economics*, 1973,(81), 637-653.
- [4] Brace, A., B. Goldys, F.Klebaner, and R.Womersley. Market model of stochastic volatility with applications to the BGM model. Working paper, University of New South Wales, 2001.
- [5]Brace, A., B. Goldys, F.Klebaner, and R.Womersley. Markovian models in the stochastic implied volatility framework. Working paper, University of New South Wales, 2002.
- [6] Chen, R., and L. Scott. Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure: Estimates and Tests from a Kalman Filter Model. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 2003, 27:2, 143-172.
- [7] Cont, R., and J. Fonseca. Dynamics of implied volatility surfaces. *Quantitative Finance*, 2002, Vol.2, 45-60.
- [8] Cortazar, G., E. S.Schwartz, and L.Naranjo, Term Structure Estimation in Low-Frequency Transaction Markets: A Kalman Filter Approach with Incomplete Panel-Data. EFA 2004 Maastricht Meetings Paper No.3102.
- [9] Daglish, T., J. Hull, and W. Suo. Volatility Surfaces: Theory, Rules of Thumb, and Empirical Evidence. *Quantitative Finance*, 2007, Vol.7, 507-524.
- [10] Derman, E. Regimes of volatility: Some Observations on the Variation of S&P 500 Implied Volatilities. *Goldmann Sachs Quantitative Strategies Research Notes*, 1999.
- [11] Dumas, B., J. Fleming , and R. Whaley. Implied volatility functions: Empirical Tests. *Journal of Finance*, 1998, 53:6, 2059-2106.
- [12] Durrleman, V. Convergence of at-the-money implied volatilities to the spot volatility. *Jornal of Applied Probability*. 2008, Volume 45, Number 2, 542-550.
- [13] Fengler, M., and W. Hardle. The Dynamics of Implied Volatilities: A Common Principal Components Approach. *Review of Derivatives Research*, 2003, (6):179-202.

- [14] Gatheral, J. *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*. John Wiley & Sons, 2006.
- [15] Goncalves, S., and M. Guidolin. Predictable Dynamics in the S&P 500 Index Options Implied Volatility Surface. *The Journal of Business*, 2006, Vol.79, No.3, 1591-1635.
- [16] Hafner, R., B.Schmid. A Factor-Based Stochastic Implied Volatility Model. Working paper, Risklab Germany GmbH, 2005.
- [17] Hafner, R. *Stochastic implied volatility*. 1st edition. Lecture notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, 2004.
- [18] Hamilton, J. *Time series analysis*.1994.
- [19] Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: a New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica* ,1992, (60):77-105.
- [20] Heston, S. A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to Bond and currency options. *Review of Financial Studies*,1993, 6(2),327-343.
- [21] Hull, J., and W. Suo. A methodology for assessing model risk and its application to the implied volatility function model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2002, 37:2, 297-318.
- [22] Ledoti, O., P. Santa-Clara, and S. Yan. Relative Pricing of Options with Stochastic Volatility. Working paper, 2002.
- [23] Lee, R. *Implied Volatility: Statics, Dynamics, and Probabilistic Interpretation*. Recent Advances in Applied Probability, Springer ,2005.
- [24] Merton, R. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 1976, (3): 125-144.
- [25] Rebonato, R. *Volatility and Correlation in the Pricing of Equity, FX, and Interest-rate Options*. John Wiley & Sons, 1999.
- [26] Rosenberg, V. Implied Volatility Functions: A Reprise. *Journal of Derivatives*, 2000, 7, No. 3, pp. 51-64.
- [27] Schonbucher, P. A Market Model for Stochastic Implied Volatility. *Mathematics of Finance*, 1999, pp.2071-2092.
- [28] Skiadopoulos, G., S. Hodges, and L.Clewlow. The Dynamics of the S&P 500 Implied Volatility Surface. *Review of Derivatives Research*, 1999, 3, 263-282.

致 谢

经过数月的努力，毕业论文终于顺利完稿。回顾这几个月的点点滴滴，感慨万千。这段时间的经历，使我收获颇丰，这将是我一一生中宝贵的财富。整个论文写作过程是艰辛的，中间遇到了各种的困难与挫折，论文的顺利完成离不开导师的指导、同学的鼓励以及家人的支持。在此我想对所有帮助过我的人致以最真诚的感谢！

首先，我最想感谢的是我的导师陈蓉副教授。对陈老师的感谢，不是只言片语所能表达。在厦门大学三年的学习与生活中，陈老师给予我的帮助实在太多太多，应该说，这三年来我的每一点进步，无不凝聚着陈老师的辛勤汗水与心血。每次遇到困难与挫折，陈老师的悉心开导与鼓励，总能使我更勇敢地去面对挫折，挑战困难。不仅如此，陈老师严谨的治学态度、宽厚善良的人格品质深深地影响着我，必将时刻督促着我，指引我在未来人生道路中沿着正确的方向前进。总之，有这样的导师是我今生莫大的荣幸。

其次，我要感谢研究生期间给予我诸多教诲和帮助的金融系各位老师。尤其要感谢郑振龙教授和林海副教授。郑老师和林老师深厚的学术造诣和丰富的研究经验一直是我所钦佩的，每次听他们的课都使我受益匪浅，从中学到的不仅是大量的专业知识，更是我一生都受用的治学方法和为人处事原则。他们对本文提出的许多宝贵意见给了我很大的启发，使我少走了许多弯路，并使论文更加地严谨完整。

再次，我要感谢所有同学和朋友在平时学习生活中对我的帮助，他们的陪伴让我的三年研究生生活绚丽多彩。特别要感谢方昆明和刘杨树，很荣幸能认识他们，与他们在日常中的学术讨论总是使我不断进步，感谢他们陪我一路走来，让我的研究生生活倍感温暖。还要感谢我的舍友金正皓，与他的交流总会给我很多启发，而他在生活上对我的关心和帮助也让我不胜感激。

最后，我要感谢我的家人。感谢他们给予我一个如此温馨的家庭，感谢他们对我无限的关心和支持，他们的爱是我不断前进的动力。

吕恺

2009年4月5日