学校编码：10384　　　　　　　　　　　分类号_______密级 ______

学　　号：B200242020　　　　　　　　UDC_____________________

厦　门　大　学

博　士　学　位　论　文

中国利率衍生产品的定价和保值

Pricing and Hedging of Chinese Interest Rate Derivatives

康 朝 锋

指导教师姓名：　郑振龙 教授、博导

专 业 名 称：　金　　融　　学

论文提交日期：　2004 年 11 月

论文答辩日期：　2004 年 12 月

学位授予日期：　2004 年　　月

答辩委员会主席：_________

评　　阅　　人：_________

2004 年 **11** 月

论文摘要

利率衍生产品（Interest Rate Derivatives）是价值依赖于利率变动的金融产品（例如利率上限、下限、利率互换以及远期利率协议）。利率衍生产品是极其重要的金融衍生工具，因为所有的金融交易都面临着利率风险，而利率衍生产品提供了控制和管理利率风险的工具，所以如何给利率衍生产品合理地定价是一个十分重要的问题。由于我国金融市场发展和起步比较晚，还没有单独的利率衍生产品在金融市场上交易，利率衍生产品主要以内嵌在其他金融产品之中的形式存在，例如可赎回（回售）债券中的赎回期权（回售期权）。随着利率市场化的逐步推进，利率风险管理的重要性将不断提高，但是我国目前对这方面的研究仍然停留在一个比较粗浅的阶段。本文尝试在这个领域做一些开拓性的研究。

论文首先介绍了目前国内外存在的基本的利率衍生产品，接着对利率衍生产品定价保值的相关理论进行了深入细致地分析，内容包括运用随机过程描述利率动态的理论依据和基本方法、基本的连续利率模型和离散利率模型、离散利率模型的估计方法。然后对利率衍生产品的定价和保值的一般原理进行了概括性的介绍。

在运用研究部分，我们用上海证券交易所的国债现货价格数据估计了 2001 年 1 月至 2004 年 6 月的利率期限结构，在此基础上以 BDT 模型为基准，运用 MATLAB 和 EXCEL 等工具，通过编程给我国市场上的利率衍生产品进行定价和保值分析。首先分析的是国家开发银行发行的可回售债券和可赎回债券，接着是对我国商业银行近年来发行的与利率关联的结构性存款进行的定价和保值分析。然后本文在考察了期权对利率风险衡量技术的影响的基础上，深入分析了含权债券的利率风险衡量问题。并将含权债券利率风险衡量问题引入银行的利率风险管理，指出了内嵌期权对银行利率风险管理的影响，并通过实证分析对上述结论加以验证。

总之，本文是在对国内外利率衍生产品定价和保值综合考察的基础上

对中国的利率衍生产品的定价和保值所做的一个比较深入的研究，。在研究过程中始终贯穿着对中国现实情况的考察，探讨中国在相关市场方面存在的问题和缺陷，并提出相应的改革建议。

关键词：利率衍生产品；二叉树；期权调整久期

Abstract

Interest Rate Derivatives are the financial products (such as cap, floor, swap, forward interest rate contract etc.) whose value depends on the dynamics of interest rate. They are important tools for managing interest rate risk because all financial transactions are facing interest rate risk. With the development of Chinese financial markets, the management of interest rate risk becomes more and more important. But the reality is that we still do not have a systematic research on it. This paper is aimed at this goal, making some effort to the research on pricing and hedging of Chinese interest rate derivatives, hoping we can get some meaningful conclusions both theoretically or empirically.

This paper first reviews the basic interest rate derivatives in financial markets, then analyzes the relevant theories in details, studying the pricing and hedging of interest rate derivatives, including the basic theory of why we can use stochastic model to describe the dynamics of interest rate and how to use stochastic model to describe interest rate dynamics. We then introduce continuous-time interest rate model and discrete time interest rate model, including how to estimate these models. Next we outline the principal of the pricing and hedging of interest rate derivatives.

First, we use the transactions data of Chinese Treasury Bond in Shanghai Stock Exchange to estimate the daily interest rate term structure during 2001-2004, then based on BDT model, MATLAB and EXCEL, pricing and hedging analysis is done to the callable bond and puttable bond issued by Chinese Government Development Bank. Using the same technique, we pricing the foreign exchange structured deposits issued by Chinese commercial bank recent years and got some meaningful conclusion in risk management. Then, after outline the measure of interest rate risk, we analysis the interest rate risk of bond with option, and apply this idea to the interest rate risk management of commercial bank.. Then we use the callable bond and puttable bond' data to test the above conclusion.

In all, this paper is to make a deep research on pricing and hedging of Chinese interest rate derivatives, including the theoretical analysis, empirical tests, applications on pricing, hedging, and policy suggestions.

Key Words: Interest Rate Derivatives; Binominal Tree; Option Adjusted Duration.

目　录

图表目录

引　言

本文主要研究的是对暴露在利率风险下的金融资产定价和套期保值的现代方法，我们将对这一领域的最新发展进行总结，并结合中国的实际情况进行创造性地运用。

利率衍生产品是价值依赖于利率变动的金融产品（例如利率上限、利率下限、互换以及远期利率协议等）。利率衍生产品是极其重要的金融衍生工具，因为所有的金融交易都面临着利率风险，而利率衍生产品提供了控制和管理利率风险的工具，所以如何给利率衍生产品合理地定价是一个十分重要的问题。

从国际上看，利率衍生产品的交易已经成为衍生产品交易中的一个重要组成部分，其重要性显而易见。从国内的情况看，过去两年中，在金融创新方面取得很大进展的可赎回（回售）债券和结构性存款实际上都是利率衍生产品，而且有不断向前发展的趋势，但国内目前对利率衍生产品定价和保值的研究还比较落后，本文希望在这方面做一些比较深入的研究，以供业界参考。

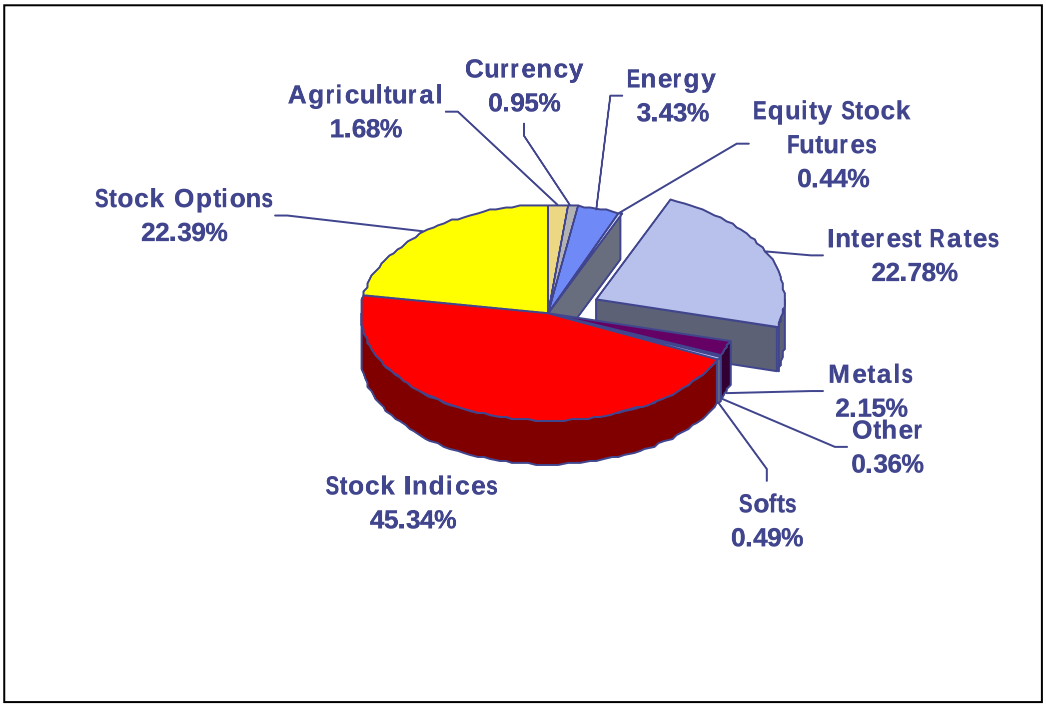


图 1　交易所交易衍生产品分布概况（2002）

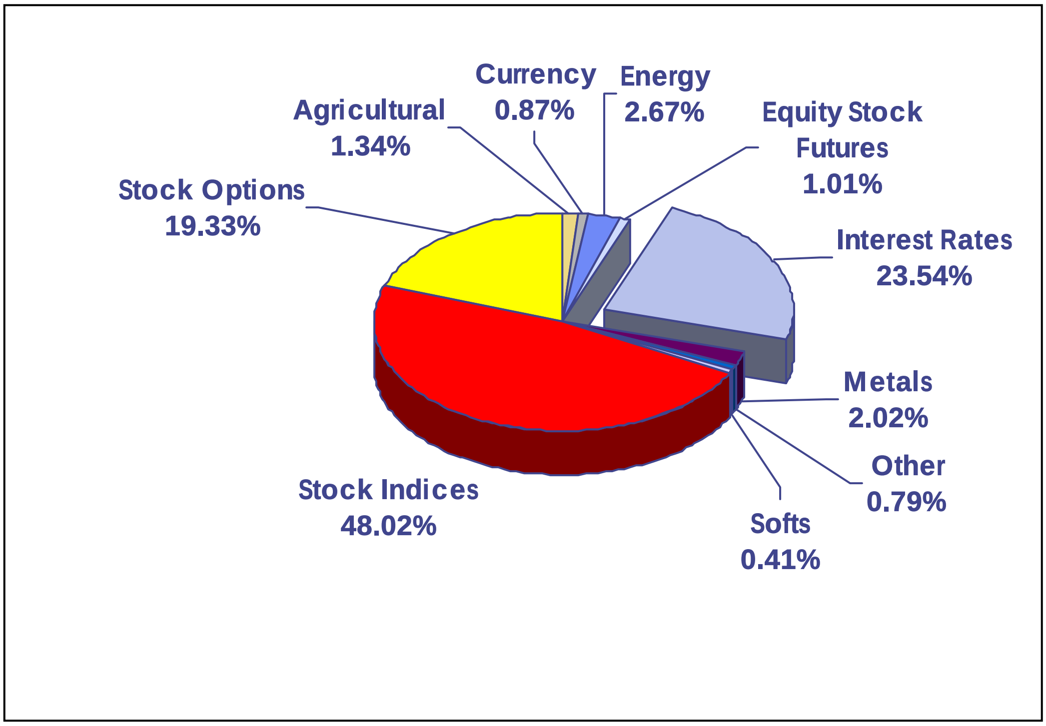


图 2　交易所交易衍生产品分布概况（2003 年 1－10 月）

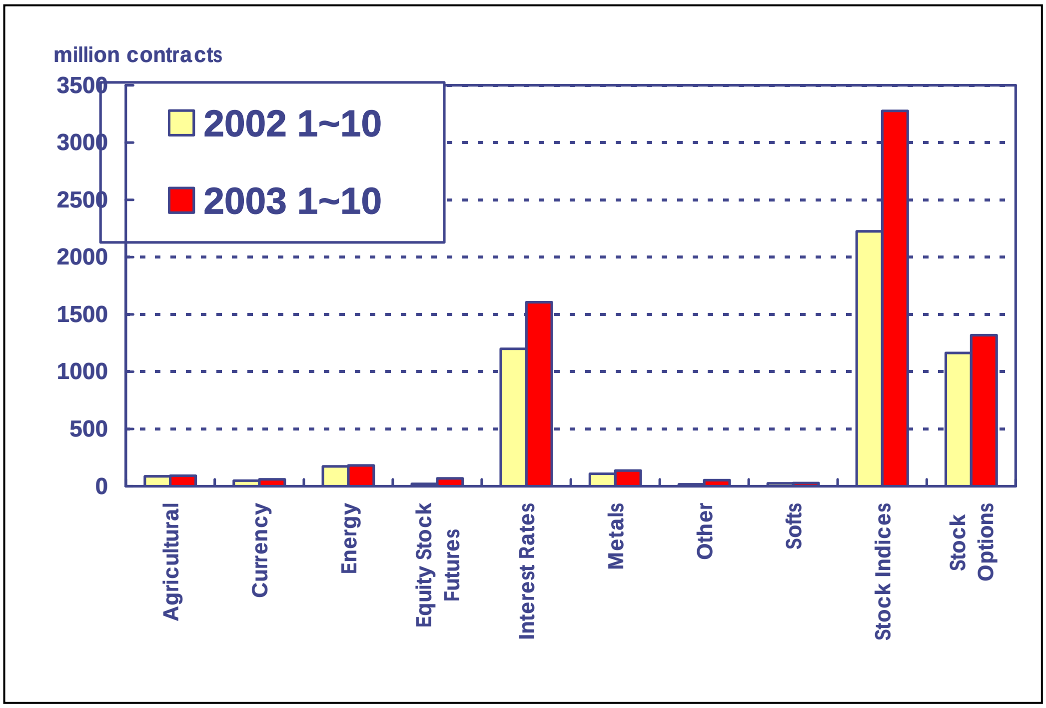


图 3　交易所交易衍生产品增长概况

和股票期权一样，利率衍生产品的价格也依赖于其标的资产——利率。例如债券期权的价格依赖于利率的变动，因此利率衍生产品定价的核心问题是如何估计利率的变动过程。未来是难以预测的，利率也是如此，但是借助随机过程这一有力的工具，我们可以有效地估计利率的动态过程。具体而言，在估计利率的动态过程上我们使用的是期限结构模型（Term Structure Model），包括利率的期限结构模型和利率波动率（Volatility）的期限结构模型。

利率的期限结构模型也称为收益率曲线模型，描述的是所有期限的利率的动态，它们比用来描述股票价格和汇率变动的随机过程更复杂，这是因为它要描述的是收益率整体变动，而不是单个变量的变动。随着时间的推移，某个期限的收益率在变动，收益率曲线的形状也可能在变动。

初期的期限结构模型是单因素模型，其波动率是恒定的。新的模型已

经发展成为包涵多因素、均值回归、随机波动和制度变迁（regime-switching）等的复杂模型。新的分析方法可使人们对利率的随机过程的描述更为精确，从而大大推动了利率衍生产品市场的发展，交易量逐年递增，产品日趋复杂。

现实世界是离散的世界，为了能够将连续的利率模型运用于现实世界，我们需要用蒙特卡罗模拟、二叉树和有限差分等技术来估计利率模型。本文首先建立一个利率衍生产品定价和保值的一般框架，接着介绍用随机过程描述利率动态的理论依据和基本模型、以及估计方法，然后运用数值算法将这些理论运用于中国利率衍生产品的定价和保值。

1　利率衍生产品定价和保值的一般原理

1.1 利率衍生产品简介

1.1.1 利率衍生产品的产生和发展

自上世纪 70 年代起，利率的不确定性开始逐渐加剧，以致越来越多的金融机构不愿对长期利率做出承诺。1973 年～1974 年间，利率急剧上涨并大幅波动，贷方开始采用浮动利率。到 1980 年代，浮动利率已被广泛应用于借贷领域，其结果使得贷方更能控制其利率风险暴露，但与此同时利率风险也就被转嫁给了借方。于是，能有效控制利率风险的金融工具开始产生，并在市场上受到了欢迎。

期货是最早引入以帮助企业控制利率风险的金融工具。基于美元的利率期货合同最早在 Chicago Board of Trade (CBOT)和 Chicago Mercantile Exchange (CME)被引入。到了 1980 年代，英国、日本、加拿大、澳大利亚、法国、德国、香港等国家和地区先后推出了各自的利率期货。期货交易在利率风险管理产品中已占据了领先地位。终于，银行也开始提供类似的金融工具。其中，利率互换最早在 1982 年出现，1983 年初出现了远期利率协议（FRAs）。与外汇市场一样，期权也很快被引入利率产品。基于期货的期权合同交易在 CBOT 和 CME 被引入。1983 年，银行以柜台交易（Over-the-counter，简称 OTC）的形式引入了利率期权，包括利率上限（Cap）、利率下限（Floor）和利率双限（Collar）。

尽管利率衍生产品的产生晚于外汇衍生产品，但因投资者的对冲利率风险的需求强烈，其在衍生产品中所占的市场份额逐年迅猛增长。根据 Comptroller of the Currency (OCC) 2003 年第三季度衍生产品报告，该季度利率衍生产品合同的名义总额已占所有衍生产品名义总额（Notional

Amount）的 86.8%。

1.1.2 主要利率衍生产品介绍

大致而言，利率衍生产品主要可以分为以下几种：

（1） 远期利率协议（Interest Rate Forward Rate Agreement），合约双方同意在未来某日期按事先确定的利率借贷的合约。

（2） 利率期货（Interest Rate Futures），利率期货是以固定收益工具或利率为基础资产的期货。是指由交易双方签订的，约定在将来某一时间按双方事先商定的价格，交割一定数量的与利率相关的金融资产的标准化期货合约。

（3） 利率互换（Swap），是指双方同意在未来的一定期限内根据同种货币的同样的名义本金交换现金流，其中一方的现金流根据浮动利率计算出来，而另一方的现金流根据固定利率计算。订约双方不交换本金，本金只是作为计算基数。

（4） 债券期权（Bond Options），以债券为标的资产的期权。

（5） 利率上限（Cap），交易双方确定一个利率上限水平，在此基础上，利率上限的卖方向买方承诺，在规定的期限内，如果市场参考利率高于协定的利率上限，则卖方向买方支付市场利率高于协定利率上限的差额部分；如果市场利率低于或等于协定的利率上限，卖方无任何支付义务，同时，买方由于获得了上述权利，必须向卖方支付一定数额的期权手续费。

（6） 利率下限（Floor），交易双方规定一个利率下限水平，卖方向买方承诺，在规定的有效期内，如果市场参考利率低于协定的利率下限，则卖方向买方支付市场参考利率低于协定利率下限的差额部分，若市场参考利率大于或等于协定的利率下限，则卖方没有任何支付义务。作为补偿，卖方向买方收取一定数额的手续费。

（7） 利率双限（Collar），是指将利率上限和利率下限两种金融工具结合使用。具体地说，购买一个利率双限，是指在买进一个利率上限的同时，

卖出一个利率下限，以收入的手续费来部分抵消需要支出的手续费，从而达到既防范利率风险又降低费用成本的目的。而卖出一个利率双限，则是指在卖出一个利率上限的同时，买入一个利率下限。

（8） 互换的期权或互换期权（Swaptions）是基于利率互换的期权，它是另一种越来越流行的利率期权。它给予持有者一个在未来某个确定时间进行某个确定的利率互换的权利（当然持有者并不是必须执行这个权利)。许多向其公司客户提供利率互换合约的大型金融机构也会向其客户出售或购买互换期权。

1.1.3 内嵌（Embedded）的利率衍生产品

利率期货、利率互换、利率上限和利率下限等这些利率衍生产品的结构比较简单，是直接在利率的基础上衍生出来的产品，它们在交易所和场外市场直接交易。这些利率衍生产品的定价和保值一般使用 Black（Black，1976）模型就可以解决，不需要估计利率的动态过程。可是在很多情况下大量的利率衍生产品不是单独交易，而是内嵌在其他证券之中的。

1．银行资产和负债中内嵌的利率衍生产品

银行的资产和负债之中内嵌了大量的利率期权。几乎所有的贷款都含有提前偿还条款，它允许借款人在贷款到期前提前偿还负债。贷款可以看成是借款人发行的债券，而提前偿还权相当于一个债券看涨期权，在利率下跌，债券价格上涨时，借款人可以买入债券，赎回贷款。此外，几乎所有的存款中都含有提前支取条款，它允许存款人在存款到期之前提前支取。存款可以看成是银行发行的债券，而提前支取权相当于一个债券看跌期权，在利率上涨，债券价格下跌时，存款人可以出售债券，取回存款。

2．结构化票据中内嵌的利率衍生产品

在全球利率及股市走低后，投资人开始寻找低风险却高利润的投资标的，而结构性票据保本的保息却又有机会获取高收益的特性，正符合投资人的需求，因此造成结构性票据在近年来的金融市场上大行其道。

结构性票据的英文名称为 Structure Notes，其产品种类包括利率关联票据（Interest rate-linked Note）、股票关联型票据（Equity-linked Note）、货币关联票据（Currency-linked Notes）、商品关联票据（Commodity-linked Notes）、信用关联票据（Credit-linked Notes）、通胀指数关联票据（Inflation-indexed-linked Notes）、保险关联票据（Insurance-linked Notes）等等。结构性票据通过与不同期权的搭配，可针对不同投资人对于市场多空预期、报酬与风险的要求量身订作，将投资人资金作最有效率的运用。

大量的结构性票据以保本为特征，所以又称为保本型票据（Principal Guarantee Note, PGN），保本型票据的结构是将一般的固定收益证券和衍生产品加以结合，为了达到保本的要求，绝大部份的投资本金必须配置在无风险资产，而仅将利息的部分投资于相关的期权市场以参与标的证券的涨跌。

要了解保本型票据必须先了解保本率和参与率。

保本率就是到期时保证拿回本金的比例。为保障投资人的权益，一般规定保本型票据的保本率至少要有 80%。若保本率为 95%，则代表到期之时，即使标的涨跌状况不如预期，也可拿回 95%的原始投入本金；保本率越高，可购买期权的金额比例越少，报酬率相对就会降低；例如连结同一个标的的票据，100%保本的票据比 80%保本的票据可拿来投资于期权的金额比例就少了 20%，所获得的报酬率就相对较低。

参与率就是参与未来标的价格上涨的比例，参与率越高，参与标的上涨的部分就越多。

保本型票据的投资报酬，在固定收益票据部份，无论市场上涨或下跌，投资人皆可领回约定的保障本金。而在期权方面，则视标的证券的涨跌幅决定报酬的多寡。

对于既想要保本又愿意以少部份资金投资于高杠杆工具的投资者，可以投资保本型票据，通过期权以小搏大的特性，扩大参与市场涨跌的收益。

保本型票据的潜在风险在契约签订之时即已事先确知，最大损失就是100%减去保本率。例如保本率为95%，最大的损失就是5%（100%－95%）。

无论是保本型票据还是其它结构化产品，都是在债券的基础上嵌入了一个衍生产品，如果结构性票据中嵌入的是利率衍生产品，那么整个产品可以看成是利率衍生产品。

以最简单，最常见的可赎回债券为例，在美国长期公司债券一般是息票债券，而且是可赎回的，赎回条款允许发行公司在特定的时间以特定的价格从投资者手中买回债券，即发行公司拥有一个内嵌在债券合约中的看涨期权。这个赎回条款在本质上是一个利率期权，因为赎回条款的价值依赖于债券的价值，而债券的价值依赖于利率。几年前发行的美国国库券也有赎回条款，但现在没有了。广泛存在的赎回条款说明内嵌的利率期权大量存在，这些内嵌的利率期权对债券的市场价值有显著影响，我们将看到，债券的期权特征会影响债券价格对利率变动的反应方式，进而影响其利率风险的衡量。

内嵌的利率衍生产品的定价一般比较复杂，需要估计利率模型和使用数值算法。不过此类利率衍生产品有很大的生命力，所以研究它们的定价和保值也是很重要的。

1.2 利率衍生产品定价和保值的一般原理

1.2.1 文献回顾

衍生产品定价和保值的核心是标的资产动态过程的描述，利率衍生产品定价理论的演变过程体现了描述利率随机过程技术的不断完善。

对利率衍生产品的定价和保值的研究始于1973年Black-Scholes期权定价模型的创立，在假设标的资产服从几何布朗运动（对数正态分布）的条件下，我们可以用Black-Scholes期权定价模型和该模型的在期货期权上的推广——Merton（1973）模型来为利率衍生产品定价。

上述做法在本质上是假设债券价格服从几何布朗运动，即直接套用股票衍生产品定价的模型，这种做法有一定的缺陷，因为假设债券的价格和股票的价格服从相同的随机过程是不合理的。股票价格的运动接近随机游走（Random Walk），可是债券在临近到期日会趋于面值。这样做还有一个问题是，Black-Scholes 期权定价模型假设波动率是常数，可是债券价格的波动率在临近到期日时会减小。所以只有在债券到期日和债券期权合约到期日之间有较大的时间间隔时，Black-Scholes 期权定价模型和 Merton 模型才可以用来给债券期权近似定价，否则会产生较大的偏差。

Black-Scholes 方法的缺陷促使人们寻找一个更合理的模型来描述债券价格或者利率的变动，因此有了收益率曲线模型。由于利率有明显的均值回归的特征，以 Vasicek（1977）为代表，人们开始用具有均值回归特征的随机过程来描述利率的动态。Cox，Ingersoll 和 Ross（1985）在保留了短期利率均值回归性质的基础上将利率期限结构理论推广到一般均衡模型之中。Vasicek 模型和 CIR 模型都是均衡模型，均衡模型建立在坚实的经济理论基础上，成为 20 世纪 80 年代的主流模型。初期的均衡模型是单因子模型，瞬时短期利率是唯一的状态变量，随后的发展出的多因子模型中，长期利率的均值，短期利率的波动率和各种期限的利率都成为可能的状态变量。

由于有坚实的理论基础，均衡模型可以用来解释利率期限结构的形状和对未来进行预测，所以均衡模型得到了经济学家的偏爱，但均衡模型在实际运用中出现了一定的困难，均衡模型的估计结果经常和实际数据不一致，因此产生了实务界偏爱的套利模型，代表性的套利模型有 Black-Derman-Toy（1990）模型、Hull-White（1994）模型、Ho-Lee 模型和 Health-Jarrow-Morton（1992）模型。BDT 模型和 Hull-White 模型的均值回归项是可变的，所以可以拟和任意形状的初始收益率曲线。HJM 模型则是建立在瞬时远期利率上的利率模型。

HJM 模型之后新模型层出不穷，有市场模型、随机弦模型，随机域模型、跳跃模型、定价核模型等等。随机弦模型或随机域模型是 Kennedy（1994）首创，后由 Goldstein（2000）等人发展而来。利率期限结构模型还在不断地完善和发展之中。

利率衍生产品定价理论的发展伴随着大量的实证研究。Chen 和 Scott（1993）、Pearson 和 Sun（1990）使用最大似然法，Heston（1989）、Gibbons 和 Ramaswamy（1993）使用广义矩法，Litterman 和 Scheinman（1991）使用因素分析法得出单因素模型不能很好地拟和收益率曲线的结论。De Munnick 和 Schotman（1992）使用荷兰债券市场的数据对 Vasicek、CIR 模型的检验得到了类似的结论。Chan，Karoly，Longstaff 和 Sanders（1992）使用美国市场的短期利率数据对单因素模型进行了检验，发现波动率的弹性系数为 1.5，即数据是不平稳的。Stambaugh（1998），Longstaff 和 Shwartz（1992），Litterman、Scheinman 和 Weiss（1991）的研究表明增加因素的数目可以改善拟和效果，但是使用多因素模型会使利率衍生产品的定价变得非常复杂。

1.2.2 利率衍生产品的定价方法

利率衍生产品地定价方法大致可以分为两类：偏微分方程（PDE）定价和风险中性定价。

（一）PDE 定价

偏微分方程定价的核心原理是动态复制，即通过标的资产和无风险证券的动态组合可以复制利率衍生证券的回报，反过来标的资产和利率衍生证券的动态组合可以构造出无风险证券，其内在原因是衍生证券和标的证券的风险源相同，所以我们可以通过动态地调整标的证券和衍生证券的比例来消除风险源对组合价值的影响，由此我们可以得出衍生证券价格必须满足的偏微分方程，进而求出衍生证券的价格。

假设利率衍生产品的价格为 f，其标的服从一个几何布朗运动：

$$dS/S = \mu dt + \sigma dz$$

其中，μ 表示收益率，σ 表示资产的波动率。无风险资产的变动可以表示为：$dB = rBdt$。B 表示无风险资产的价格。

考虑一个利率衍生产品、标的资产以及无风险资产的组合。

$$V = Q_f f + Q_S S + B,$$

Q_f 表示衍生证券的数量，Q_S 表示标的的数量。根据伊托引理，

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(dS)^2 = (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2})dt + \frac{\partial f}{\partial S}dS$$

所以，

$$dV = Q_f(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2})dt + Q_f \frac{\partial f}{\partial S}dS + Q_s dS + rBdt,$$

因此，只要令

$$Q_f \frac{\partial f}{\partial S}dS + Q_s dS = 0\text{，即 } Q_s = -Q_f \frac{\partial f}{\partial S}$$

就可以将组合中的随机项（风险源）消除掉，从而整个资产组合无风险，必须获得无风险收益。设 $Q_f = -1, Q_S = \frac{\partial f}{\partial S}$，令初始投资 $V = 0$，即 $B = -Q_f f - Q_s S = f - \frac{\partial f}{\partial S}S$。则

$$dV = (-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2})dt + r(f - \frac{\partial f}{\partial S}S)dt = rVdt = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS\frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0$$

这也就是 B-S 的偏微分方程。PDE 结合各种边界条件就可以求得各种利率衍生产品的价格。PDE 不一定有解析解，所以有时我们要借助数值算法。

多因素的情形类似，以两因素为例。设 $r(t)$ 和 $l(t)$ 是两个因素，它们服

从如下随机过程

$$dr(t) = u_r dt + \sigma_r dz_1$$
$$dl(t) = u_l dt + \sigma_l dz_2$$

设 ρ 是 dz_1 和 dz_2 的相关系数，那么利率衍生产品的价格必须满足

$$F_t + (u_r - \lambda_r \sigma_r) F_r + (u_l - \lambda_l \sigma_l) F_l + \frac{1}{2}\sigma_r^2 F_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_l^2 F_{ll} - rF = 0$$

（二）风险中性定价

风险中性定价的基本原理是当市场不存在套利机会时，则必然存在一个与客观概率等价的风险中性测度，此时按无风险利率贴现的资产价格服从鞅过程（Harrison Kleps，1979；Harrison Priska，1981）。T 时刻的不确定性现金流 F_T 在 t 时刻的贴现为（以 t 时刻可获得的信息为条件）

$$F(t) = E_t^Q \left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds \right) F_T \right]$$

其中，r_s 代表即期无风险利率。风险中性价的关键在于确定风险中性测度 Q，或者说 Q 和客观概率 P 之间的关系。

证明如下：

假设利率衍生产品的价格服从下面的随机过程

$$dF(t)/F(t) = \mu_F dt + \sigma_F dz$$

其中 dz 是客观概率下的维纳过程。令 $d\tilde{z} = dz + \dfrac{\mu_F - r(t)}{\sigma_F} dt$，则

$$dF(t)/F(t) = \mu_F dt + \sigma_F (d\tilde{z} - \frac{\mu_F - r(t)}{\sigma_F} dt) = r(t)dt + \sigma_F d\tilde{z}$$

$F(t)$ 在新的测度中的漂移率变成了无风险利率，所以这个新测度是风险中性测度 Q。无风险资产 $B(t)$ 服从

$$dB(t)/B(t) = r(t)dt$$

则在风险中性世界中

$$
\begin{aligned}
d\frac{F(t)}{B(t)} &= F(t)d\frac{1}{B(t)}+\frac{dF(t)}{B(t)} \\
&= -\frac{F(t)}{B(t)}r(t)dt+\frac{r(t)F(t)dt+\sigma(t)F(t)d\tilde{z}}{B(t)} \\
&= \frac{\sigma(t)F(t)}{B(t)}d\tilde{z}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\frac{F(t)}{B(t)}=\frac{F(0)}{B(0)}+\int_0^t\frac{\sigma_F F\left(t\right)}{B(t)}d\tilde{z}\text{，}\quad E_0(\frac{F(t)}{B(t)})=\frac{F(0)}{B(0)}
$$

即，$\frac{F(t)}{B(t)}$ 为一个鞅过程。所以[①]

$$
F\left(t\right)=B(t)E_t^Q[F(T)/B(T)]=E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)F_T\right] \tag{1.1}
$$

1.2.3 利率衍生产品定价的基本模型——Black 模型

对于利率上限和利率下限等利率衍生产品，我们可以直接推出这些产品价格服从的偏微分方程和利率风险参数的表达式，所以金融市场的实际从业者其实主要运用 Black 模型（Black，1976）来对这些利率衍生产品进行定价和套期保值。

（一）基本的 **Black** 模型——欧式利率期权定价

我们可以把利率期权转化为期货期权，利用Black推广的期货期权定价公式进行定价。此方法的前提是期货价格收敛于现货价格。在无风险利率为常数的假定下，远期价格与期货价格相等，而远期价格收敛于现货价格，故此前提是合理的。

我们先不考虑利率的特殊性，简单的应用Black-Scholes公式对利率期权进行定价，假设利率期权的标的按几何布朗运动变化，则我们可以利用

① 因为 $dB(t)/B(t)=r(t)dt$，所以 $d\ln B(t)=r(t)dt$，$\ln B(T)/B(t)=\int_t^T r(s)ds$，$\frac{B(t)}{B(T)}=\exp(-\int_t^T r(s)ds)$。

Black-Scholes公式对该利率期权进行定价。

考虑一个基于变量V的欧式看涨期权，假设无风险利率是常数并定义：

T：期权到期日

F：在期限为T的合约中的V的期货价格，即$F=Ve^{rT}$

X：期权的执行价格

r：期限为T的零息票收益

σ：F的波动率

V_T：在时刻T时V的价值

F_T：在时刻T时F的价值

在时刻T，期权的盈利状态是$\max(V_T-X,0)$，由于无风险利率为常数，期货价格等于远期价格，而且远期价格收敛于现货价格，所以$F_T=V_T$，因此我们可认为在T时刻的期权盈利状态为$\max(F_T-X,0)$，根据期货期权的定价公式，Black模型给出0时刻欧式看涨期权的价值c为：

$$c=e^{-rT}[FN(d_1)-XN(d_2)] \tag{1.2}$$

其中$d_1=\dfrac{\ln(F/X)+\sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}}$，$d_2=\dfrac{\ln(F/X)-\sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}}=d_1-\sigma\sqrt{T}$。

相应的欧式看跌期权的价值p为：

$$p=e^{-rT}[XN(-d_2)-FN(-d_1)] \tag{1.3}$$

（二）**Black模型的扩展**

Black模型假设F的波动率为常数，我们可以稍微放松这个假设。由于我们是为欧式期权进行估值，我们并不关心时刻T之前的V值或F值。我们仅只是要求在T时刻V服从对数正态分布。由于F是V_T在风险中性世界中的期望值，我们能够利用风险中性估值方法推导出方程式前面两个定价方程的充分条件如下：

1．V_T的概率分布是对数正态分布；

2．$\ln V_T$ 的标准偏差是 $\sigma\sqrt{T}$ ；

3．无风险利率是非随机变量。

当无风险利率是非随机变量时，期货价格和远期价格是相同的。因此，对 T 时刻到期的某个合约而言，变量 F 可定义为 V 的期货价格。

总之，只要假设无风险利率是非随机变量，期权到期时标的变量服从对数正态分布，任何时候我们都可以利用前面的公式为欧式期权估值。在方程式中的变量 F 可定义为 T 时刻到期的某个合约中的标的变量的远期价格。

由于我们并没有假设 V 和 F 的变化遵循几何布朗运动，那么定义变量 σ 为波动率并不严格。现实中，它不过是一个具有如下特性的变量，即 $\sigma\sqrt{T}$ 是 $\ln V_T$ 的标准偏差。为了强调这一点，我们定义 σ 为 T 时刻 V 的波动率测度（Volatility Measure）。

进一步扩展 Black 模型，我们可允许给出盈利的时刻不是 T 时刻，例如假设从 T 时刻的变量 V 的值计算出期权的盈利，但是该盈利延迟到 T^* 时刻，其中 $T^* \geq T$ 。在这种情况下，有必要从时刻 T^* 而不是从时刻 T 贴现该盈利。我们定义 r^* 为到期日为 T^* 的零息票收益率，于是

$$c = e^{-r^*T}[FN(d_1) - XN(d_2)]$$

$$p = e^{-r^*T}[XN(-d_2) - FN(-d_1)]$$

其中，$d_1 = \dfrac{\ln(F/X) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$ ，$d_2 = \dfrac{\ln(F/X) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ 。

（三）Black 模型适用的利率

人们广泛使用 Black 模型为利率期权估值。变量 V 可以是利率、债券价格、或两个利率之间的价差。变量 F 等于 V 的远期价格。用于贴现的变量 r 和 r^* 是计算出来的零息票收益率。

当 Black 模型按这种方式运用时，使用了两个近似条件：

1．假设 V 的远期价格等于它的期货价格，因此等于 V_T 在风险中性世界中的期望值，但是，当利率是随机变量时，远期价格和期货价格并不相等。

2．即使计算期权盈利时刻这些利率假设为随机变量，也假设用来贴现的这些利率为常数。

当上述条件不满足时，这两个近似具有相互抵消的效应。因此，在为欧式利率期权估值时，Black 模型比所期望的具有更强的理论基础。

（四）欧式债券期权的定价

欧式债券期权是在未来一个确定日期按一个确定价格购买或出售某个债券的选择权。如果假设在期权到期日标的债券的价格服从对数正态分布，令 F 等于债券远期价格，则可用 Black 模型为该期权估值。变量 σ 是这样定义的，$\sigma\sqrt{T}$ 是期权到期时债券价格对数值的标准偏差。

从即期债券价格 B 可以计算出 F，公式如下：

$$F=(B-I)e^{rT}$$

其中 I 是在期权有效期内所支付的息票的现值。在这个公式中，即期债券价格和远期债券价格都是现金价格（Cash Prices）而不是报价（Quoted Prices）。

债券价格对数的标准偏差会随时间变化。今天的标准偏差为零，因为今天债券的价格没有不确定性。在债券的到期日标准偏差也是零，因为我们知道到期时债券价格将等于它的面值。在今天和债券到期日之间，标准偏差开始是增加的，然后减少。在为债券的欧式期权进行估值时，所使用的波动率测度 σ 为：

$$\frac{\text{期权到期时债券价格对数的标准偏差}}{\sqrt{\text{期权到期时的时间长度}}}$$

一般来说，随着期权有效期限的增加，σ 减少。当期权有效期限保持固定时，它是债券有效期限的一个函数。

（五）利率上限、利率下限和利率双限的定价

1．将利率上限分解成利率期权的组合

利率上限确保在任何给定时刻所支付的借款利率是市场当前利率与上限利率中的较小者。假如一个本金为1,000万美元的贷款利率每3个月按3个月期LIBOR重新设定一次，而一家金融机构提供了一项年利率10%的利率上限（由于是每季支付一次利息，这个上限利率也是按季度计复利来表示的）。为了履行利率上限协议规定的义务，该金融机构在每个季末必须向那个借款人支付（以百万美元为单位）：

$$0.25\times10\times\max（R\text{-}0.1，0）$$

其中R是每季度开始时的3个月期LIBOR利率（按季度计复利来表示）。表达式max（R-0.1，0）是基于R的看涨期权所得的收益。因此可把利率上限看成是一个基于R的看涨期权的组合。包含在利率上限中的单独期权有时称之为利率期权元（Caplets）。

一般而言，若利率上限为R_X，本金为L，从利率上限有效期开始在$\tau,2\tau,\cdots,n\tau$时刻支付利息，则利率上限的出售方在$(k+1)\tau$时刻须支付的金额为：

$$\tau L\max(R_k-R_X,0) \tag{1.4}$$

其中R_k是$k\tau$时刻被限定的利率。这是一个在$k\tau$时刻观察到的基于利率的看涨期权，其收益在$(k+1)\tau$时刻出现。通常是这样构造利率上限，使得τ时刻没有任何基于零时刻利率的收益。因此，在$2\tau,\cdots,n\tau$时刻利率上限具有潜在的收益。

2．将利率上限分解成债券期权的组合

利率上限也可以看作是一个基于贴现债券的看跌期权组合，这些看跌期权的收益出现在计算它们的那个时刻。在$(k+1)\tau$时刻方程式(1.4)中的收益等于$k\tau$时刻的：

$$\frac{\tau L}{1+\tau R_k}\max(R_k-R_X,0)$$

经过代数变换它化简为：

$$\max\left[L-\frac{L(1+R_X\tau)}{1+\tau R_k},0\right] \tag{1.5}$$

表达式$\dfrac{L(1+R_X\tau)}{1+\tau R_k}$是一个在$(k+1)\tau$时刻面值为$L(1+R_X\tau)$的贴现债券的贴现值，$L$可以看成看跌期权的执行价格。这就证明了利率上限是一个基于贴现债券的欧式看跌期权组合的观点。

3．利率下限和利率双限

利率下限和利率双限的定义与利率上限相似。利率下限对要支付的利率设置了一个下限，利率双限对要支付的利率既规定了上限又规定了下限。类似于利率上限的讨论，我们可以将一个利率下限看成是一个基于利率的看跌期权的组合或是一个基于贴现债券的看涨期权的组合。一个利率双限是由一个利率上限的多头和一个利率下限的空头组合而成的。在构造利率双限时，通常使得利率上限的价格等于利率下限的价格，于是利率双限的净成本为零。

在利率上限价格和利率下限价格之间存在着类似看涨期权－看跌期权平价关系，即

利率上限价格=利率下限价格+互换价格

在这个关系中，利率上限和利率下限具有同样的执行价格R_X。这里的互换是这样一个协议，即收取浮动利率并支付R_X的固定利率。所有三个金融工具具有同样的有效期，同样的支付频率。从平价关系可以看出利率上限多头与利率下限空头组合给出了与互换相等的现金流。

4．利率上限和利率下限的估值

正如(1.4)式所示，对应于$k\tau$时刻所观察到的利率期权元给出了$(k+1)\tau$时刻的收益为

$$\tau L\max(R_k-R_X,0)$$

如果假设R_k服从对数正态分布，其波动率测度是σ_k，方程式(1.2)给出了这个利率期权元的值为

$$\tau L e^{-r^*}[F_k N(d_1) - R_X N(d_2)] \tag{1.6}$$

其中$d_1 = \dfrac{\ln(F_k / R_X) + \sigma_k^2 k\tau / 2}{\sigma_k \sqrt{k\tau}}$，$d_2 = \dfrac{\ln(F_k / R_X) - \sigma_k^2 k\tau / 2}{\sigma_k \sqrt{k\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{k\tau}$。

F_k为在$k\tau$与$(k+1)\tau$时刻之间那个期间的远期利率。从(1.3)式得到对应的利率下限估值的表达式为：

$$\tau L e^{-r^*(k+1)\tau}[R_X N(d_2) - F_k N(d_1)] \tag{1.7}$$

在这些方程中，r^*是到期日为$(k+1)\tau$的按连续复利计息的零收益率曲线利率。R_X和F_k都是按τ的频率计复利来表示的。

（六）欧式互换期权的定价

1．互换期权与债券期权的关系

利率互换可看作是把固定利率债券换成浮动利率债券的协议。在互换的开始，浮动利率债券的价值总是等于互换的本金的金额。因此，一个互换期权可以看作是一个把固定利率债券换成互换的本金的期权。如果一个互换权给予它的持有者支付固定利息和收取浮动利息的权利，它就是一个执行价格等于本金的固定利率债券的看跌期权。如果一个互换期权给予它的持有者支付浮动利息和收取固定利息的权利，它就是一个执行价格等于本金的固定利率债券的看涨期权。

2．欧式互换期权的估值

在为欧式互换期权估值时，通常假设期权到期日的互换率是对数正态分布的。考虑如下互换期权，有一个利率互换在T年后开始，持续n年，我们具有对这个互换支付固定利率R_X，收取浮动利率的权利，我们假设该互换本金为L，每年支付m次。

假设在互换期权到期日的互换率为R（R和R_X都按每年计m次复利频

率来表示）。将固定利率为 R 的互换现金流与固定利率为 R_X 的现金流进行比较，我们看到该互换的收益由一系列的现金流组成，这些现金流等于：

$$\frac{L}{m}\max(R-R_X,0)$$

在互换有效期限的 n 年内每年接收 m 次现金流，即他们交换现金流的时刻为 $T+1/m, T+2/m, \cdots T+mn/m$，从今天开始，单位是年。每个现金流是执行价格为 R_X 的基于 R 的看涨期权的收益。

假设 $t_i = T+i/m$，在 t_i 时刻收到的现金流的价值是：

$$\frac{L}{m}e^{-r_i t_i}[FN(d_1)-R_X N(d_2)]$$

其中，$d_1=\dfrac{\ln(F/R_X)+\sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$，$d_2=\dfrac{\ln(F/R_X)-\sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}=d_1-\sigma\sqrt{T}$ 。F 是远期互换率，r_i 是期限为 t_i 的按连续复利计息的零息票利率。

该互换期权的总价值为

$$\sum_{i-1}^{mn} e^{-r_i t_i}[FN(d_1)-R_X N(d_2)]$$

定义 A 为在 t_i 时刻（$1\le i\le mn$）支付\$1 的合约的价值，则互换期权的价值为

$$\frac{LA}{m}[FN(d_1)-R_X N(d_2)] \tag{1.8}$$

其中 $A=\sum_{i-1}^{mn} e^{-r_i t_i}$ 。

如果互换期权给持有者收取 R_X 固定利率而不是支付 R_X 的利率的话，该互换期权的收益为

$$\frac{L}{m}\max(R_X-R,0)$$

这是一个基于 R 的看跌期权。与前面一样，在 t_i 时刻（$1\le i\le mn$）得到收益。该互换期权的价值为：

$$\frac{LA}{m}[R_X N(-d_2) - FN(-d_1)]$$

1.2.4 复杂利率衍生产品的定价

Black 模型有很大的局限性，它是用几何布朗运动来描述债券价格，这和实际情况不符。因此有了后来一系列的利率期限结构模型和相应的利率衍生产品的定价技术，这些内容我们将在介绍利率期限结构模型的同时介绍。

此外，由于大多数内嵌利率衍生产品的随机支付比较复杂，因此想推出这些产品的价格和利率风险参数的直接表达式不是很容易的事情，有些时候根本就没有解析解。为了给这些利率衍生产品进行定价和套期保值，我们在要用如下数值算法计算：

1．蒙特卡罗（Monte Carlo）模拟，这种方法先根据一定的利率动态模型建立风险中性世界中利率的各种演变路径，然后通过求各条路径利率衍生产品价值的平均值来定价。

2．二叉树法或三叉树法，这种方法通过离散的利率树图描述利率的动态过程，然后从后面回推衍生产品的价格。

3．有限差分法（Finite Difference Methods），这种方法通过将偏微分方程离散化来求利率衍生产品的价格。

第一种方法适合对路径依赖的衍生产品进行定价，而当我们必须推导期权的最优执行策略时，我们通常用第二和第三种方法对期权定价。

1.2.5 利率衍生产品保值的一般性原则

由于任何现金流的现值都依赖于利率，并且随利率的变化而变化，因此对利率风险进行套期保值显得十分重要。下面我们以泰勒展开式为基础介绍管理利率风险的一般性原则。

1．基本框架

假设

V_t 是要套期保值的资产组合在 t 时刻的价值；

H_t 是用来套期保值的资产组合在 t 时刻的价值；

H_t^j 是用来套期保值的第 j 种金融工具在 t 时刻的价值， $j=1,\cdots,J$ ；

ϕ_t^j 是在 t 时刻投资于用来套期保值的第 j 种金融工具的数量， $j=1,\cdots,J$ ；

我们有

$$H_t=\sum_{j=1}^{J}\phi_t^j H_t^j$$

$\alpha_t=\left(\alpha_t^k\right)_{k=1\cdots K}^T$ 是第 K 个风险因子在时刻 t 的价值，在这里就是利率。而且 $V_t=V\left(\alpha_t\right)$，$H_t^j=H^j\left(\alpha_t\right)$，假设 V_t 和 H_t^j 都存在一阶和二阶导数且连续。

下面我们考虑 V_t 和 H_t^j 在 α_t 附近的泰勒展开，我们有

$$\begin{aligned}dV\left(\alpha_t\right)&=V\left(\alpha_t+d\alpha_t\right)-V\left(\alpha_t\right)\\&=\nabla V\left(\alpha_t\right)^T\bullet d\alpha_t+\frac{1}{2}d\alpha_t^T\bullet\nabla^2 V\left(\alpha_t\right)^T d\alpha_t+o\left(\left\|d\alpha_t\right\|^2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dH^j\left(\alpha_t\right)&=H^j\left(\alpha_t+d\alpha_t\right)-H^j\left(\alpha_t\right)\\&=\nabla H^j\left(\alpha_t\right)^T\bullet d\alpha_t+\frac{1}{2}d\alpha_t^T\bullet\nabla^2 H^j\left(\alpha_t\right)^T d\alpha_t+o\left(\left\|d\alpha_t\right\|^2\right)\end{aligned}$$

其中 ∇f 和 $\nabla^2 f$ 分别代表函数 f 的梯度向量和汉森距阵，$\bullet$ 代表内积，$\|\bullet\|$ 代表模。

套期保值的整体思想就是使下面的式子成立

$$dH\left(\alpha_t\right)=\sum_{j=1}^{J}\phi_t^j dH^j\left(\alpha_t\right)=-dV\left(\alpha_t\right)$$

如果我们假设风险因子的变化是无穷小的，那么有下面的近似关系

$$dV\left(\alpha_t\right)\approx\nabla V\left(\alpha_t\right)^T\bullet d\alpha_t$$

因此，对资产组合实现套期保值实际上就等于求解下面的方程

$$\sum_{j=1}^{J}\phi_t^j \nabla H^j\left(a_t\right)=-\nabla V\left(\alpha_t\right)$$

上面描述的是如何实现一阶条件下的套期保值，如果我们要实现二阶的套期保值，必须有下面的等式成立

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{J}\phi_t^j \nabla H^j\left(a_t\right)=-\nabla V\left(\alpha_t\right)\\ \sum_{j=1}^{J}\phi_t^j \nabla^2 H^j\left(a_t\right)=-\nabla^2 V\left(\alpha_t\right)\end{cases}$$

2．交易成本

从前面的推导可以看出，套期保值比例ϕ_t^j是时间的函数，也就是说这是一个动态的保值策略，理论上我们可以求出在任意时刻的ϕ_t^j，不过如果ϕ_t^j是随着时间的变动而不断变动的，我们就必须连续地、动态地调整保值头寸才能实现完全的套期保值，但在实际操作中，这会带来很大的交易成本。此时就存在一个如何在给定的交易成本下最大化保值效果或在给定的保值目标下最小化交易成本的问题。

3．自融资约束

整个套期保值过程中我们还必须满足两个自融资约束：初始自融资约束和动态保值过程中的自融资约束，这两个条件可以综合写成

$$\sum_{j=1}^{J}\phi_{t+dt}^j H_{t+dt}^j=\sum_{j=1}^{J}\phi_t^j H_{t+dt}^j$$

或者$\sum_{j=1}^{J}d\phi_t^j H_{t+dt}^j=0$，也就是说，在套期保值期间，我们不会增加也不会减少对套期保值资产组合的投资。

2　资产价格动态和利率动态

我们首先要找出合适的描述利率动态过程的模型，因为偏微分方程是建立在利率动态的基础上的，蒙特卡罗模拟也是建立在利率动态的基础上的，利率树图和有限差分甚至风险中性定价都是建立在利率动态模型的基础上的，所以利率期限结构模型是衍生产品定价和保值的理论基础。

更一般地讲，资产的价值来源于现金流，而现金流分可以分两种：确定性的现金流和不确定性的现金流。

当现金流可以预先确定时，资产的定价问题只涉及到确定资金的时间价值问题，即估计利率期限结构，根据现值计算法则，我们可以用现值关系来表示时间价值：

$$V_t\left(F_T\right)=B\left(t,T\right)F_T$$

其中，$V_t\left(F_T\right)$代表的是在 T 时刻收到的确定性的现金流F_T在 t 时刻的合理价值，$B\left(t,T\right)$代表的是在 T 时刻支付 1 元的贴现债券（零息票债券）在 t 时刻的价格，它是利率的倒数。如果现实生活中存在任意期限的零息票债券，那么$B\left(t,T\right)$总是已知的，对确定性的现金流的定价就十分简单了。遗憾的是，现实生活中交易的债券大多是息票债券，所以我们必须用一整套系统的方法来从息票债券中剥离出隐含的零息票债券的价格，关于这方面的内容郑振龙和林海（2004，2003，2002）已经做了充分而深入的研究。

本文关注的重点是非确定性现金流的定价问题。当资产的现金流是非确定性的、无法预先知道的时候（例如利率期权涉及的现金流），要进行资产的定价和套期保值，我们必须同时解决资金的时间价值问题和风险价值问题，为此我们需要运用“风险中性定价”这一现代金融理论的核心原理。该原理可以表述如下：

当市场不存在套利机会时，则必然存在一个等价鞅测度（EMM），此

时贴现价格服从鞅过程（Harrison Kleps，1979；Harrison Priska，1981）。因此 T 时刻的不确定的现金流 F_T 在 t 时刻的贴现（以 t 时刻可获得的信息为条件）为

$$V_t\left(F\left(t\right)\right)=E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)F\left(T\right)\right]$$

其中，r_s 代表无风险即期利率。由于在风险中性世界中 $F\left(T\right)$ 容易确定，所以剩下的任务就是确定 r_s，为此我们必须找到合理的模型来描述利率的动态过程。

从上面的论述可以看出，确定利率的动态过程是为利率衍生产品的定价和保值的基础，我们将论证用一些特殊的随机过程描述利率动态过程的合理性，然后介绍描绘利率动态过程的基本随机过程的性质及其估计方法。

2.1 用随机过程描述利率动态的合理性

2.1.1 柯莫哥洛夫后向方程（Kolmogorov backward equation）：均值和方差以外的参数不重要

Merton（1992）证明：只需要假设在任意短的时间内资产价格存在不确定性、并且方差有界，我们就可以用一个随机过程（Stochastic process）描述资产价格动态。如果进一步假设资产价格满足马尔可夫（Markov）条件[①]，可以证明资产价格的条件概率服从的偏微分方程——柯莫哥洛夫后向方程（Kolmogorov backward equation），只和资产价格的均值和方差有关，而与分布的具体形式无关，也就是说马尔可夫条件只是对资产价格分布的均值和方差进行了约束。

$$0=\frac{1}{2}\sigma^2(x,t)p_{11}(x,t)+\alpha(x,t)p_1(x,t)+p_2(x,t)$$

[①]马尔可夫过程是一种特殊类型的随机过程。在这个过程中，只有变量的当前值才与未来的预测有关，变量过去的历史和变量从过去到现在的演变方式与未来的预测无关。如果证券价格遵循马尔可夫过程，则其未来价格的概率分布只取决于该证券现在的价格。

因此在资产价格满足马尔可夫过程的条件下，我们可以用均值和方差满足一定条件的随机过程描述资产价格动态。具体而言，我们可以假设资产价格服从伊藤过程（Ito process，随机冲击项服从正态分布的随机过程）、二叉树过程（随机冲击项服从二项分布的随机过程）甚至三叉树过程等等。只要拟合了资产价格的均值和方差，这些假设并不会对资产定价的结果产生很大的影响。

2.1.2 伊藤过程（Ito process）：描述资产价格动态的基本连续时间模型

（一）伊藤过程

根据前面的论证，用伊藤过程（Ito process）描述资产价格动态几乎对经济未加任何不切实际地限制，因此在连续时间模型中伊藤过程（Ito process）已经成为描述资产价格动态基本方法。

所谓伊藤过程（Ito Process）是指如下随机过程：

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)\varepsilon\sqrt{dt} \tag{2.1}$$

其中，dz 是一个标准布朗运动（后面会说明它是马尔可夫过程的一种特殊形式），a、b 是变量 x 和 t 的函数。

我们先看看什么是标准布朗运动，设 Δt 代表一个小的时间间隔长度，Δz 代表变量 z 在 Δt 时间内的变化，遵循标准布朗运动的 Δz 具有两个特征：

特征 1：$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$

其中，ε 代表从标准正态分布（即均值为 0、标准差为 1.0 的正态分布）中取的一个随机值。

特征 2：对于任何两个不同时间间隔 Δt，Δz 的值相互独立。

从特征 1 可知，Δz 本身也具有正态分布特征，其均值为 0，标准差为 $\sqrt{\Delta t}$，方差为 Δt。从特征 2 可知，标准布朗运动符合马尔可夫过程，因此是马尔可夫过程的一种特殊形式。

现在我们来考察遵循标准布朗运动的变量 z 在一段较长时间 T 中的变

化情形。我们用$z(T)-z(0)$表示变量 z 在 0 到 T 时刻的变化量，它可被看作是在 N 个长度为Δt的小时间间隔中 z 的变化总量，其中$N=T/\Delta t$，因此，

$$z(T)-z(0)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$$

其中ε_i(i=1，2，……N）是标准正态分布的随机抽样值。从特征 2 可知，ε_i是相互独立的，因此$z(T)-z(0)$也具有正态分布特征[①]，其均值为 0，方差为 NΔt=T，标准差为$\sqrt{T}$。

由此我们可以发现两个特征：①在任意长度的时间间隔 T 中，遵循标准布朗运动的变量的变化值服从均值为 0、标准差为$\sqrt{T}$的正态分布。②对于相互独立的正态分布，标准布朗运动方差具有可加性，而标准差不具有可加性。

当Δt→0 时，我们就可以得到极限的标准布朗运动：

$$dz=\varepsilon\sqrt{dt}$$

我们再回过头看(2.1)

$$E(dx)=a(x,t)dt$$
$$Var(dx)=b^2(x,t)Var(\varepsilon)dt=b^2(x,t)dt$$

所以我们称变量 x 的漂移率为 a，方差率为 b^2。

（二）从伊藤过程到对数正态分布

什么样的伊藤过程比较符合资产价格的变化过程呢？也许不同的金融资产有自己独特的价格动态特征，不能一概而论，但对于像股票一样的金融资产，我们知道在达到弱式效率的市场上，股票具有随机游走（Random Walk）的特征，因此假设资产价格的漂移率为常数与实际不符[②]。在现实中我们可以观察到的是，无论价格高低，其收益率的波动范围不会很大，因此我们也许可以假设资产价格的变动比例服从如下过程：

[①] 相互独立的服从正态分布的随机变量的和仍然是正态分布。
[②] 随机游走最基本的特征无法预测它会像哪里运动，因此没有向均值回归的趋势。

$$\frac{dS}{S}=\mu dt+\sigma dz$$

即资产价格的变动比例等于一个均值加上一个随机冲击。在上式两边同乘以 S 得

$$dS=\mu Sdt+\sigma Sdz$$

也就是说，用漂移率为 μS、方差率为 σ^2S^2 的伊藤过程来表示资产价格的动态。

在短时间 Δt 后，资产价格比率的变化值 $\Delta S/S$ 为：

$$\frac{\Delta S}{S}=\mu\Delta t+\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

可见，$\Delta S/S$ 也具有正态分布特征，其均值为 $u\Delta t$，标准差为 $\sigma\sqrt{\Delta t}$，方差为 $\sigma^2\Delta t$。换句话说

$$\frac{\Delta S}{S}\sim\phi(\mu\Delta t,\sigma\sqrt{\Delta t})$$

其中 $\phi(m,s)$ 表示均值为 m，标准差为 s 的正态分布。

下面我们看看资产价格的对数服从什么样的过程，这需要用伊藤引理[①]来推导。

令 $G=\ln S$，由于

$$\frac{\partial G}{\partial S}=\frac{1}{S},\frac{\partial^2G}{\partial S^2}=-\frac{1}{S^2},\frac{\partial G}{\partial t}=0$$

我们就可以得出证券价格对数 G 所遵循的随机过程为：

$$dG=(\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma dz$$

由于 u 和 σ 是常数，所以上式说明证券价格对数 G 也遵循普通布朗运

[①]若变量 x 遵循伊藤过程，则变量 x 和 t 的函数 G 将遵循如下过程：

$$dG=(\frac{\partial G}{\partial x}a+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2G}{\partial x^2}b^2)dt+\frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

动，它具有恒定的漂移率$u-\frac{\sigma^2}{2}$和恒定的方差率σ^2。由前面的分析可知，在当前时刻 t 和将来某一时刻 T 之间 G 的变化都是正态分布的，其均值为$\left(u-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$，方差为$\sigma^2(T-t)$。

令 t 时刻 G 的值为 $\ln S_t$，T 时刻 G 的值为 $\ln S_T$，其中 S_t 表示 t 时刻（当前时刻）的证券价格，S_T 表示 T 时刻（将来时刻）的证券价格，则在 T－t 期间 G 的变化为：

$$\ln S_T-\ln S_t$$

这意味着：

$$\ln S_T-\ln S_t\sim\phi[(\mu-\tfrac{\sigma^2}{2})(T-t),\sigma\sqrt{T-t}]$$

也就是说，证券价格对数的变化呈正态分布。如果一个变量的自然对数服从正态分布，则称这个变量服从对数正态分布。根据正态分布的特性，可以得到：

$$\ln S_T\sim\phi[\ln S_t+(\mu-\tfrac{\sigma^2}{2})(T-t),\sigma\sqrt{T-t}]$$

这表明 S_T 服从对数正态分布。$\ln S_T$ 的标准差与$\sqrt{T-t}$成比例，这说明证券价格对数的不确定性（用标准差表示）与我们考虑的未来时间的长度的平方根成正比。

2.1.3 二叉树过程：描述资产价格动态的基本离散时间模型

（一）二叉树过程

Cox、Ross 和 Rubinstein 于 1979 年首先将二项分布运用于描述股票价格运动，从此以后二叉树过程被广泛运用于衍生产品的定价，成为构造离散时间价格运动的基本模型。它提供了对复杂随机行为的直观理解，因此是实践中最为常用的数值方法的基础。

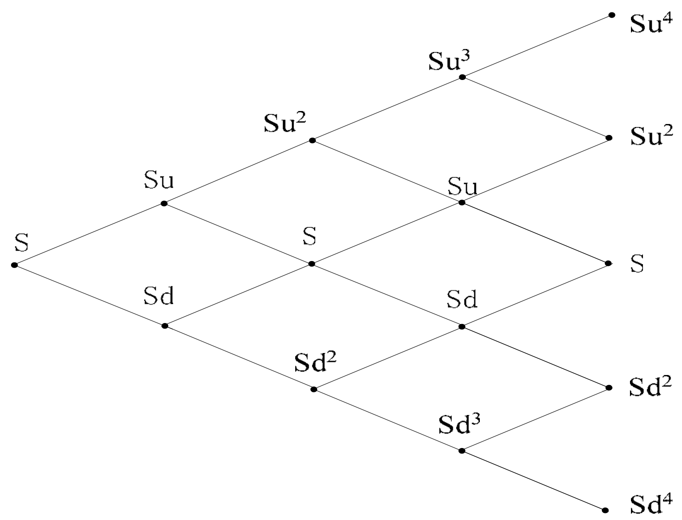
二叉树过程首先把时间分为很多很小的时间间隔Δt，并假设在每一个

时间间隔Δt内证券价格只有两种运动的可能：从开始的S上升到原先的u倍，即到达Su；下降到原先的d倍，即Sd。其中，$u>1$，$d<1$（一般假设$u=\frac{1}{d}$），价格上升的概率假设为p，下降的概率假设为$1-p$。

$$S\left\langle \begin{matrix} Su \\ Sd \end{matrix} \right.$$

当时间为 0 时，证券价格为S。时间为Δt时，证券价格要么上涨到Su，要么下降到Sd；时间为$2\Delta t$时，证券价格就有三种可能：Su^2、Sud（等于S）和Sd^2，以此类推。一般而言，在$i\Delta t$时刻，证券价格有$i+1$种可能，它们可用符号表示为：

$$Su^j d^{i-j} \qquad \text{其中 } j=0,1,\cdots\cdots,i$$



在较大的时间间隔内，这种二值运动的假设当然不符合实际，但是当时间间隔非常小的时候，比如在每个瞬间，资产价格只有这两个运动方向的假设是可以接受的。因此，二叉树过程实际上是在用大量离散的小幅度二值运动来模拟连续的资产价格运动。

（二）对数正态分布的近似：二项分布

前面我们说过，假设资产价格服从对数正态分布是比较合理的，用二

叉树过程描述资产价格动态也是同样的，我们希望能够找到一个与对数正态分布有类似的性质的二叉树过程，或者说可以近似对数正态分布的二叉树过程。实际上，只要参数满足一定的条件二叉树模型会收敛于对数正态分布（Cox 和 Miller，1990）。

具体而言，如果我们知道$\ln\left[S(t+1)/S(t)\right]$服从正态分布，那么它近似的二项分布为：

$$r=\ln\left[S(t+1)/S(t)\right]=\begin{cases} uh+\sigma\sqrt{h} & 1/2 \\ uh-\sigma\sqrt{h} & 1/2 \end{cases}$$

通过简单的运算就可以证明

$$E(r)=uh$$
$$Var(r)=\sigma^2 h$$

我们可以发现，这个二叉树模型的均值和方差和时间间隔也是成比例的。它还满足独立同分布的性质（这是金融计量研究中经常出现的一个假设，也是被普遍接受的假设）。

2.1.4 用随机过程描述利率动态过程的合理性

利率不是一般的金融资产的价格，它是货币的价格，利率的动态显然有自己独特的特征，那么是否可以用随机过程来描述利率的动态呢？如果可以，什么样的随机过程比较合适呢？

前面我们说过，只需要假设在任意短的时间内资产价格存在不确定性且方差有界，我们就可以用随机过程来描述资产价格动态，利率的不确定性是很明显的，至于利率的方差，显然，利率的波动率比一般金融资产的波动率更小，因此我们就可以用随机过程描述利率（货币价格）的动态。

具体而言，我们也可以用伊藤过程（连续时间利率模型）、二叉树过程（离散时间利率模型）甚至其他随机过程（如三叉树过程）来描述利率的动态。

2.2 利率动态过程的估计

（一）衍生产品定价的核心：确定标的资产遵循的动态过程

衍生产品是价格依赖于标的资产价格变动的资产，正是由于衍生产品的这个特殊性，我们一旦确定了标的资产遵循的动态过程，就可以确定衍生产品的价格。这在著名的 Black-Scholes 微分方程的推导过程中得到直接体现，从这个角度看我们可以说，衍生产品定价的核心就是确定标的资产遵循的动态过程。

（二）无套利定价和均衡定价：确定利率动态过程的两种基本方法

我们可以用各种方法确定标的资产遵循的动态过程，由此产生了各种各样的定价方法。无套利定价和均衡定价实际上可以看成是确定资产价格动态的两种基本方法。

无套利定价的基本思想是让模型拟合市场数据以保证无套利性质，通过这样来确定资产价格动态的参数。而均衡定价的基本思想从人们的理性行为特征（主要是风险厌恶，即要让投资者承担额外的风险必须给其额外的风险回报）来推导出资产价格的动态。简单地说无套利模型认为市场价格必然是合理的价格（即假设市场已经达到强式效率），而均衡模型并不这么认为。两种定价方法各有优缺点，下面我们做一个简单地比较。

1．获取估计模型所需数据的难度

无套利模型只需要市场上即期利率期限结构的数据，而均衡模型要估计风险的价格（通常用历史数据估计），所需资料相对较难获得，所以在这方面无套利模型具有优势。

2．对数据偏差的敏感性

一些市场报价是不合理的，这可能是计算错误造成的，也可能是流动性或其他因素造成的。由于无套利模型将市场上的即期利率期限结构视为合理的，所以市场数据的任何偏差都会被纳入模型之中，这是无套利模型的一个缺点。而均衡模型不存在这个问题，它们可以剔除数据偏差带来的

影响，这是均衡模型的特色。

由于无套利模型存在这方面的缺点，在使用无套利模型前必须经过谨慎的评估。当然，这并不会影响无套利模型的实用性，因为这个问题可以通过一些专门的技巧来加以控制，如利率期限结构估计中平滑技巧（Smoothing Techniques），其宗旨就是挖掘市场数据中有价值的信息，降低噪音带来的影响。

3．模型的稳定性

无套利模型拟合的只是当前的市场数据，市场数据一变，其估计的模型参数也会随着改变，因此无套利模型缺乏稳定性。

相反，均衡模型是在综合历史数据和对投资者行为的基本特征概括的基础上建立的，所以模型的参数不会每天都变，或者变动可以忽略，所以它在具有较好的稳定性。概括地说，无套利模型用参数的不断调整来适应市场，强调模型的针对性，均衡模型用稳定的参数来拟合市场，强调模型的普遍性。

（三）主要的均衡模型和无套利模型

根据上述思想，我们可以将利率模型做一个简单的分类：

第一类就是均衡模型，根据市场的均衡条件求出利率所必须遵循的一个过程，在这些模型中，相关的经济变量是输入变量，利率水平是输出变量；这类模型有 Vaesicek 模型（Vasicek，1977），CIR 模型（Cox，Ingersoll and Ross，1985a,b）等；第二类是无套利模型，通过相关债券等资产之间必须满足的无套利条件进行分析，求出利率的动态过程，然后定价，此时利率水平是一个输入变量，相关金融工具的价格是输出变量。这类模型有 HJM 模型（Heath，Jarrow 和 Morton 1992），BDT 模型（Black，Derman 和 Toy，1990）等。

2.3 基本的连续利率模型

根据前面的论述，我们可以用形如 $dx = a(x,t)dt + b(x,t)\varepsilon\sqrt{dt}$ 的连续时间随机过程——伊藤过程来拟和利率的变化过程，在这里我们分别按均衡模型和无套利模型来介绍。

2.3.1 均衡模型

均衡模型是在真实世界测度下建立的模型，考虑了市场参与者的风险偏好、投资机会、风险价格等因素，假设瞬时利率遵循的随机过程，由市场出清的条件推导出均衡的利率期限结构。此类模型依状态变量的多寡分为单因子模型以及多因子模型。

1. 单因子模型（Single-factor models）

（1）Merton（1973）

Merton 在 1973 年首先提出了一个最简单的单因子模型

$$dr(t) = udt + \sigma dz$$

其中 u 和 σ 为常数。然而，假设利率的随机过程与股价的随机过程相同并不合理，因为利率的波动具有明显的均值回归（mean reversion）的特征，即长期而言，利率会趋向长期利率的平均值，但股票价格没有这种趋势。此外，在上述模型中，利率可能出现负值。

（2）Vasicek（1977）

这个模型体现了利率的均值回归性质。假设瞬时利率于风险中性概率测度下满足下列 SDE：

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz$$

其中 a 为均值回归调整速度，b 为瞬时利率的平均值，σ 为瞬时利率的标准差。a、b 以及 σ 均为正值常数。该模型采用 Ornstein-Uhlenbeck 过程，也称为弹性的随机漫步（elastic random walk）。一般的随机漫步或维纳过程

为非稳态的过程（unstable process），经过一段长时间以后将会发散至无限大的值；而 O-U 过程为稳态分布（stable distribution），其瞬时趋势项$a\left(b-r\right)$表示瞬时利率将以a的调整速度趋向长期平均值，此性质使得短期利率动态过程表现出均值回归。假定目前的瞬时利率为$r\left(t\right)$，则未来某一时点 k 其瞬时利率的条件期望值与方差为

$$E_t\left[r\left(k\right)\right]=b+\left(r\left(t\right)-b\right)e^{-a\left(k-t\right)}\quad t\le k$$

$$Var_t\left[r\left(k\right)\right]=\frac{\sigma^2}{2a}\left(1-e^{-2a\left(k-t\right)}\right)\quad t\le k$$

给定风险价格λ，在时点 t 时，到期日为 T 的零息债券价格为

$$P\left(t,T,r\right)=\exp\left[\frac{1}{a}\left(1-e^{-a\left(T-t\right)}\right)\left(R\left(\infty\right)-r\right)-\left(T-t\right)R\left(\infty\right)-\frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a\left(T-t\right)}\right)^2\right]$$

其中

$$R\left(\infty\right)=b+\sigma\lambda/a-\frac{1}{2}\sigma^2/a^2$$

而利率期限结构为

$$R\left(t,T\right)=R\left(\infty\right)+\left(r\left(t\right)-R\left(\infty\right)\right)\frac{1}{aT}\left(1-e^{-aT}\right)+\frac{\sigma^2}{4a^3T}\left(1-e^{-aT}\right)^2$$

此模型可反映出利率期限结构的各种型态，如向上、向下趋势、驼峰状、水平状。然而，由于这里$r\left(t\right)$服从正态分布，利率可能出现负值。

（3）Cox, Ingersoll & Ross(1985)

Vasicek（1977）等人的模型通过假设风险价格为常数来实现无套利机会，该假设隐含了利率模型本身与个人的偏好无关，或是个人的效用函数为一特定形式，如对数效用（logrithmic utility）。这种部分均衡的观念，将导致在市场不完全的情况下，产生内部不一致的情形而存在套利机会。

CIR 舍弃了部分均衡的观念，从一般均衡的角度切入，将消费者偏好、生产过程、个人投资以及消费行为等当作模型的输入变量，解决了内部不

一致的问题，并消除了不完全市场中的套利机会；因此，利率期限结构以及利率的 SDE 均由模型本身决定。此外，这个模型还解决了 Vasicek 设定的瞬时利率的随机过程服从正态分布，从而可能造成利率呈现负值的问题。CIR 将瞬时利率随机过程的随机项的系数，设定成与瞬时利率平方根大小成正比，也即

$$dr = a\left(b-r\right)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

此设定的经济含意为当利率增加时，利率的波动也会跟着比例增加，同时解决了 Vasicek 模型瞬时利率有可能为负值的问题。$r\left(k\right)$的条件期望值与方差为

$$E_t\left[r\left(k\right)\right] = b + \left(r\left(t\right)-b\right)e^{-a\left(k-t\right)}$$
$$Var_t\left[r\left(k\right)\right] = r\left(t\right)\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)\left(e^{-a\left(k-t\right)} - e^{-2a\left(k-t\right)}\right) + b\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)\left(1-e^{-2a\left(k-t\right)}\right)^2$$

该分布的期望值与 Vasicek 模型所得到的期望值相同，不同的是 O-U 过程的利率过程的随机项系数为一常数，而 CIR 模型为$r\left(t\right)$的函数，因此方差也为$r\left(t\right)$的函数。

2. 多因子模型

由于单因子模型假设债券价格仅受单一因子（瞬时利率）影响，而债券收益通常可以表示为此单因子的线性组合，导致不同到期日的债券价格变化在某一时点为完全相关。因此，由单因子模型所估计出来的利率期限结构可能存在着相当的偏误，多因子模型可以解决这个问题。

（1）Brennan 和 Schwartz（1979）

Brennan 和 Schwartz 认为期初的长期利率隐含了对未来即期利率的预期，因此模型中的状态变量为瞬时利率 r 与长期利率 l。也即

$$dr = \beta_1\left(r,l\right)dt + \zeta_1\left(r,l\right)dz_1$$
$$dl = \beta_2\left(r,l\right)dt + \zeta_2\left(r,l\right)dz_2$$

其中$dz_1 dz_2 = \rho dt$，ρ为长期利率与瞬时利率的相关系数。l 假设为在市

场上交易的永续债券的到期收益率，其风险价格 λ_l 可以由 l、r、β_2 以及 ζ_2 的表达式取代。给定期初的 r、l 以及未知的参数 λ_r，通过有限差分法可以求利率衍生证券的价格。此外，该模型也具有利率不为负以及瞬时利率向长期利率回归的特性。

（2）Longstaff 和 Schwartz（1992）

Longstaff 和 Schwartz 认为利率衍生证券的价值应同时反映期初利率与波动率的水准。他们承袭了 Cox, Ingersoll & Ross(1985a)一般均衡模型的框架， 将原本无法观察到的变量（产出报酬与产出的变异）转换成可观察到的因子，也即瞬时利率与瞬时利率的波动；此外，此两个因子的随机过程以及风险价格皆为内生决定。通过该两因子模型，Longstaff 和 Schwartz 推导出零息债券以及零息债券选择权的价格。

综合而言，均衡模型推导出来的利率未必会与市场利率一致，这会造成应用上的难题，因为在尽可能地让模型符合市场信息的目标下，除了要估计无法量化的风险价格外，又必须用统计方法将调整速度、长期平均利率等估计出来。虽然多因子模型所推导出来的利率期限结构动态变化较有弹性，并且减少了估计的偏误，然而多因子模型的参数结构相当庞大，而且模型中部分的输入变量无法直接观察，造成参数的估计与运算并不容易执行。理论上，增加变量的数目即可减少估计偏误，然而此法所需增加的成本是很可观的。

上述的问题让市场对于均衡模型的定价结果没有信心，导致部分学者转而研究无套利模型，属于此种分类的利率模型便具有完全吻合期初市场信息的能力，进而作为衍生性金融商品的定价工具。

2.3.2 无套利模型

无套利模型强调在风险中性概率测度下进行模型的建构。均衡模型是通过假设瞬时利率的随机过程，并且在无套利机会的条件下来确定零息债

券的价格，无套利模型则不需要估计或假设瞬时利率的风险价格。此类模型容许模型内的部分参数随时间而改变，并且将市场所观察到的利率期限结构当作输入变量，模型中相关参数或变量的设定不得使利率期限结构的动态变化过程出现套利机会。

（1）Ho－Lee 模型（Ho 和 Lee，1986）

Ho 和 Lee 于 1986 年首先提出无套利利率模型。该模型视期初的利率期限结构为输入变量，以二项分布结构推导出利率期限结构的动态变化。在连续时间下，瞬时利率的 SDE 为

$$dr = u\left(t\right)dt + \sigma dz$$

其中σ为常数，$u\left(t\right)$趋势项为时间的函数，以确保模型与期初利率期限结构一致。

（2）Original Salmon Brothers 模型（Kopprasch et al.，1987）

Ho 和 Lee 模型假设瞬时利率的概率分布为正态分布，因此，利率可能会变为负值；而且该模型假设利率的波动率为常数与经验不符，为了避免上述缺点，Salmon 模型假设瞬时利率的概率分布为对数正态分布，也即

$$d\ln r = u\left(t\right)dt + \sigma dz$$

此时短期利率的标准差为σ，也即瞬时利率的波动与利率水准本身为正相关。

（3）BDT 模型（Black, Derman 和 Toy，1990）

Black, Derman 和 Toy 假设瞬时利率为对数正态分布，模型中除了包含期初利率期限结构的信息，也将波动率利率期限结构视为输入变量。此时由于利率的波动率为时间的函数，使得利率的动态变化具有均值回归的特征。此外，为了避免出现非结合（non-recombining）的树图结构，模型允许在同一时点利率上升与下降的趋势项不同。连续的 BDT 模型的 SDE 为

$$d\ln r = \left(\theta\left(t\right) - \phi\left(t\right)\ln r\right)dt + \sigma\left(t\right)dz$$

其中均值回归调整速度$\phi(t)=\dfrac{\partial\sigma(t)/\partial t}{\sigma(t)}$，是$\sigma(t)$的函数。$\theta(t)/\phi(t)$为均数回归的平均水准。

（4）Black 和 Karasinkai（1991）

在 BDT 模型中，通过纳入波动率期限结构使得利率的动态变化具有均值回归的特征。然而，此举可能会不当的拟和均值回归与未来短期利率的波动率（local volatility），造成定价时的偏误。因此，Black 和 Karasinkai 的模型除了包含期初利率期限结构、波动率期限结构的信息外，再加上利率上限曲线（cap curve）来推导利率的动态过程。Black 和 Karasinkai 的 SDE 如下

$$d\ln r=\phi(t)\left(\ln u(t)-\ln r\right)dt+\sigma(t)dz$$

其中$\phi(t)$为均值回归调整速度，$u(t)$为瞬时利率的平均值，$\phi(t)$与$u(t)$无关。然而，如同 BDT 模型为了避免可能出现非结合（non-recombining）结构的问题，Black 和 Karasinkai 模型允许时间间隔长度为时间的函数。则在时点 t 时的均值回归参数必须满足

$$\phi_t=\frac{1}{\Delta_t}\left(1-\frac{\sigma_t\sqrt{\Delta_t}}{\sigma_{t-1}\sqrt{\Delta_{t-1}}}\right)\quad t=1,2\cdots,T$$

（5）Hull 和 White（1990,1994a）

Hull 和 White（1990）对 Vasicek 模型与 CIR 模型加以延伸，使模型本身与期初的利率期限结构一致，且模型中参数的设定由市场数据决定。该模型是利率模型随机过程最一般化的形式

$$dr=\left[\theta(t)-a(t)(b-r)\right]dt+\sigma(t)r^{\beta}dz$$

此模型几乎可以涵盖所有的无套利单因子模型。当$a(t)$与$\sigma(t)$为常数、b 与β为 0 时，上式简化为

$$dr=\left[\theta(t)-ar\right]dt+\sigma dz$$

模型中引入了波动率期限结构。Hull 和 White（1994a）以三项式结构拟和利率的动态过程，使得利率波动能够反映均值回归。

（6）HJM 模型（Heath, Jarrow 和 Morton，1990,1992）

多因子均衡模型中所称的因子为长期以及短期利率。而 HJM 模型中的因子为对利率期限结构的冲击（random shocks），如利率期限结构可能上升或下降，以及变得较陡峭或变得较平坦。Heath, Jarrow, 和 Merton（1990,1992）提出的 N 因子连续时间模型，以外生方式指定远期利率的波动，而利率期限结构为远期利率的函数。HJM 模型的远期利率随机过程为

$$df\left(t,T\right)=\alpha\left(t,T\right)dt+\sum_{i=1}^{2}\sigma_i\left(t,T\right)dz_i$$

多因子模型将利率期限结构的波动描述的更为完整，但该类模型需要更多的输入变量，此外某些输入变量的信息并不容易取得，这种模型也需要相当长的计算时间。

综合文献中所提出的利率模型，依状态变量为单因子或多因子、模型中的参数为外生给定或为时间的函数，整理如下表：

表 1 利率模型的分类

	均衡模型	无套利模型
单因子	Merton（1973）；Vasicek（1977）；Dothan（1978） Rendleman 和 Bartter（1980）；Courtadon（1982） Cox, Ingersoll 和 Ross(1985)	Ho 和 Lee（1986）；Kopprasch et al.（1987）；Black, Derman 和 Toy（1990）；Hull 和 White（1990,1994a）；Black 和 Karasinkai（1991）
多因子	Richard（1978）；Brennan 和 Schwartz（1979）；Langetieg（1980）；Schaefer 和 Schwartz（1984）；Chaplin（1987）；Chen 和 Scott（1992）；Longstaff 和 Schwartz（1992）	Heath, Jarrow 和 Morton（1990,1992）；Hull 和 White（1994b）

2.4 基本的离散利率模型：二叉树模型

离散利率模型实际上会收敛于连续利率模型，所以离散模型只不过是连续利率模型的近似，近似过程中使用的技术有树图（二叉树、三叉树）、有限差分、蒙特卡罗，我们重点介绍二叉树模型。

布鲁斯.塔克曼（1999）采用了一个简单易懂的框架解释了离散的利率模型，我们将沿用他的框架来组织离散时间利率模型。

2.4.1 基础模型：利率服从二项分布、利率的波动率不变但趋势可变

这个模型是 Ho－Lee 模型的离散形式，假定 r 代表短期利率，τ 是以年表示的时间间隔（即如果短期利率在一年内变动 N 次，则$\tau = 1/N$）。我们假设短期利率服从如下过程：

$$r \begin{cases} \overset{1/2}{\nearrow} \; r + m\tau + \sigma\sqrt{\tau} \\ \underset{1/2}{\searrow} \; r + m\tau - \sigma\sqrt{\tau} \end{cases}$$

也就是说，下一期的短期利率等于前期的短期利率加上一个常数乘以时间间隔（$m\tau$），再加上或减去另一个常数乘以时间间隔的平方根（$\sigma\sqrt{\tau}$）。利率无论是上行还是下行，都加上$m\tau$，所以我们称它为短期利率的趋势变量（Drift）。另外，由于τ是以年表示的时间间隔，所以 m 是年度趋势变量。利率上行时是加上$\sigma\sqrt{\tau}$，下行时是减去$\sigma\sqrt{\tau}$，所以$\sigma\sqrt{\tau}$代表短期利率在趋势上的随机偏离（Random Deviation）。随后将说明，$\sigma\sqrt{\tau}$是短期利率的波动率（Volatility），即短期利率的标准差（Standard Deviation）。而且σ是短期利率的年波动率，证明如下：

令$\tau = 1$，并设r'是下一期的短期利率，即在利率上行时$r' = r + m\tau + \sigma$，在利率下行时$r' = r + m\tau - \sigma$。那么r'的期望值为：

$$E(r') = \frac{1}{2}(r + m\tau + \sigma) + \frac{1}{2}(r + m\tau - \sigma) = r + m$$

r'的方差为：

$$Var(r')=\frac{1}{2}\left[r+m\tau+\sigma-E(r')\right]^2+\frac{1}{2}\left[r+m\tau-\sigma-E(r')\right]^2=\sigma^2$$

所以r'的标准差（波动率）为σ。在这里波动率是以基点[①]表示的，所以这个波动率又称为“基点波动率”（Basis Point Volatility）。

离散无套利利率模型的核心就是选取上述模型中的两个参数 m 和σ，以确保不存在套利机会，然后用其来描述利率动态。σ的数值可以根据对利率波动率的某些观点、历史数据或者用求解隐含波动率的方法来设定[②]。

举个例子，假设 6 个月期、1 年期和 1.5 年期的市场利率分别为 3.99％、4.16％和 4.33％（这些数据可以从债券价格数据中计算出来），利率的年基点波动率σ为 0.45％并令$\tau=0.5$，即 6 个月，那么$\sigma\sqrt{\tau}=0.45\sqrt{0.5}=0.00318198$。市场上 6 个月期的利率为 3.99％，所以$r=3.99\%$。单期的利率树图为：

$$r\begin{cases}\xrightarrow{1/2} r+m/2+0.318198\% \\ \xrightarrow{1/2} r+m/2-0.318198\%\end{cases}$$

模型的参数（在这里是m）必须确保模型对零息债券的定价等于市场价格。

根据模型的假设，1 年期的零息债券价格的树图应该是：

$$P\begin{cases}\xrightarrow{1/2} \dfrac{1}{1+\dfrac{3.99\%+m/2+0.318198\%}{2}} \begin{cases}\xrightarrow{1/2} 1 \\ \xrightarrow{1/2} 1\end{cases} \\ \xrightarrow{1/2} \dfrac{1}{1+\dfrac{3.99\%+m/2-0.318198\%}{2}} \begin{cases}\xrightarrow{1/2} 1 \\ \xrightarrow{1/2} 1\end{cases}\end{cases}$$

其中

① 一个基点等于 0.01％。

② 用求解隐含波动率的方法来设定σ是指，以衍生资产的价格来倒推某一定价模型所要求的σ值，即将价格代入模型中来求σ的值。求解过程一般需要不断地调整σ值，直到定价模型给出的价格等于市场价格，

$$P=\frac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{3.99\%+m/2+0.318198}{2}}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{3.99\%+m/2-0.318198}{2}}}{1+\dfrac{3.99\%}{2}}$$

我们假设市场数据是合理的，所以模型对 1 年期零息债券（面值为 1 美元）的定价必须等于市场价格，即 $P=1/\left(1+0.0416/2\right)^2=0.959663$。代入上式解得 $m=0.342089\%$，所以单期的利率树图应该为：

$$3.99\%\begin{cases}\overset{1/2}{\nearrow}\ 4.64884\% \\ \underset{1/2}{\searrow}\ 4.01244\%\end{cases}$$

接着假设基点波动率不会随时间和利率水准的变动而变动，再将树图延伸一期，延伸之后的利率树图为：

$$3.99\%\begin{cases}\overset{1/2}{\nearrow}\ 4.64884\%\begin{cases}\overset{1/2}{\nearrow}\ 3.99\%+\left(m+m'\right)/2+2\sigma\sqrt{\tau} \\ \underset{1/2}{\searrow}\ 3.99\%+\left(m+m'\right)/2\end{cases} \\ \underset{1/2}{\searrow}\ 4.01244\%\begin{cases}\overset{1/2}{\nearrow}\ 3.99\%+\left(m+m'\right)/2 \\ \underset{1/2}{\searrow}\ 3.99\%+\left(m+m'\right)/2-2\sigma\sqrt{\tau}\end{cases}\end{cases}$$

根据单期利率树图的计算，利率树图可以改写为：

$$3.99\%\begin{cases}\overset{1/2}{\nearrow}\ 4.64884\%\begin{cases}\overset{1/2}{\nearrow}\ 4.64884\%+m'/2+\sigma\sqrt{\tau} \\ \underset{1/2}{\searrow}\ 4.64884\%+m'/2-\sigma\sqrt{\tau}\end{cases} \\ \underset{1/2}{\searrow}\ 4.01244\%\begin{cases}\overset{1/2}{\nearrow}\ 4.01244\%+m'/2+\sigma\sqrt{\tau} \\ \underset{1/2}{\searrow}\ 4.01244\%+m'/2-\sigma\sqrt{\tau}\end{cases}\end{cases}$$

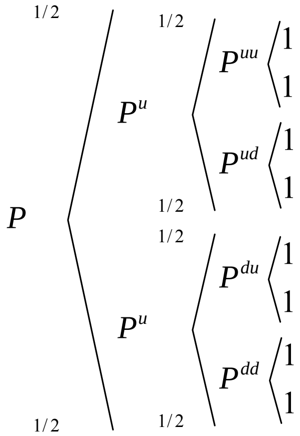
因为 $\sigma\sqrt{\tau}=0.00318198$，所以

$$4.64884\%+m'/2-\sigma\sqrt{\tau}=4.01244\%+m'/2+\sigma\sqrt{\tau}$$

所以 1 年以后 6 个月期的利率可能有三个：

$$\begin{gathered}4.79744\%+m'/2\\4.16105\%+m'/2\\3.52465\%+m'/2\end{gathered}$$

我们将 1.5 年期的零息债券价格树图表示为：



那么，

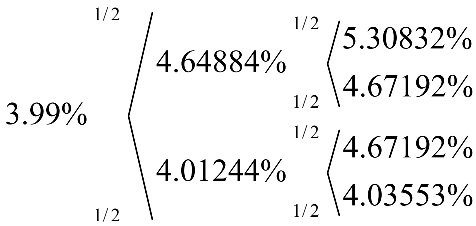
$$
\begin{aligned}
P^{uu} &= 1/\left[1+\left(4.79744\% + m'/2\right)/2\right] \\
P^{ud} &= P^{du} = 1/\left[1+\left(4.16105\% + m'/2\right)/2\right] \\
P^{ud} &= 1/\left[1+\left(3.52465\% + m'/2\right)/2\right] \\
P^{u} &= \left(0.5\times P^{uu} + 0.5\times P^{ud}\right)/\left(1+4.64884\%\right) \\
P^{d} &= \left(0.5\times P^{du} + 0.5\times P^{dd}\right)/\left(1+4.01244\%\right)
\end{aligned}
$$

此外，对 1.5 年期的零息债券的定价必须等于市场价格，即

$$
P = 1/\left(1+4.33\%/2\right)^3 = 0.937764
$$

$$
0.937764 = \left(0.5\times P^{u} + 0.5\times P^{d}\right)/\left(1+3.99\%\right)
$$

总共有 6 个方程和 6 个未知数，解得 $m' = 1.36176\%$。代入两期的利率树图可得



依此类推，我们可以建立任何期限的利率动态树图。

2.4.2 模型改进：利率的对数服从二项分布、利率的波动率不变但趋势可变

Ho－Lee 模型有两个缺陷，一是利率在不断下行的过程中可能出现负值，二是短期利率的波动率是不变的，即利率的波动率和利率高低没有关系，可是相当一部分业内人士认为，当利率水平比较高的时候短期利率的波动率应该比较大。为了解决上述问题，需要对模型加以改进。改进后为 Original Salmon Brothers 模型的离散形式。

我们可以假设短期利率服从如下过程：

$$
r \begin{cases} \xrightarrow{1/2} re^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}} \begin{cases} \xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau+2\sigma\sqrt{\tau}} \\ \xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau} \end{cases} \\ \xrightarrow{1/2} re^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}} \begin{cases} \xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau} \\ \xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau-2\sigma\sqrt{\tau}} \end{cases} \end{cases}
$$

对树图的每个节点取自然对数，则：

$$
\ln r \begin{cases} \xrightarrow{1/2} \ln r+m\tau+\sigma\sqrt{\tau} \begin{cases} \xrightarrow{1/2} \ln r+(m+m')\tau+2\sigma\sqrt{\tau} \\ \xrightarrow{1/2} \ln r+(m+m')\tau \end{cases} \\ \xrightarrow{1/2} \ln r+m\tau+\sigma\sqrt{\tau} \begin{cases} \xrightarrow{1/2} \ln r+(m+m')\tau \\ \xrightarrow{1/2} \ln r+(m+m')\tau-2\sigma\sqrt{\tau} \end{cases} \end{cases}
$$

我们发现，在短期利率的形式永远都是$re^{u\tau+i\sigma\sqrt{\tau}}$，其中$u$代表趋势变量（Drift），$i$代表某个整数。所以如果最初的短期利率$r>0$，则随后的短期利率必然也是正数。所以这个模型解决了负利率[①]的问题。

设r'是下一期的短期利率，那么

$$
E(\ln r')=\frac{1}{2}\left(\ln r+m\tau+\sigma\sqrt{\tau}\right)+\frac{1}{2}\left(\ln r+m\tau+\sigma\sqrt{\tau}\right)=\ln r+m\tau
$$

[①] 在没有特别指明的时候，我们一般指的名义利率，名义利率一般不会出现负值。

$$Var(\ln r') = \frac{1}{2}\left[\left(\ln r + m\tau + \sigma\sqrt{\tau}\right) - \left(\ln r + m\tau\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\ln r + m\tau - \sigma\sqrt{\tau}\right) - \left(\ln r + m\tau\right)\right]^2 = \sigma^2\tau$$

令 $\ln r^u = \ln r + m\tau + \sigma\sqrt{\tau}, \ln r^d = \ln r + m\tau - \sigma\sqrt{\tau}$，那么

$$E(\ln r') = \frac{1}{2}\ln r^u + \frac{1}{2}\ln r^d$$

$$\begin{aligned} Var(\ln r') &= \frac{1}{2}\left[\ln r^u - E(\ln r')\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\ln r^d - E(\ln r')\right]^2 \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln r^u - \frac{1}{2}\ln r^d\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{r^u}{r^d}\right)\right]^2 \end{aligned}$$

所以

$$\sigma\sqrt{\tau} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{r^u}{r^d}\right) \tag{2.2}$$

这个公式可以用于在已知利率时求波动率。并且

$$E(r') = \frac{1}{2}re^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}re^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{1}{2}r\left(e^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}} + e^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

$$\begin{aligned} Var(r') &= \frac{1}{2}\left[re^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}} - E(r')\right]^2 + \frac{1}{2}\left[re^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}} - E(r')\right]^2 \\ &= \frac{1}{4}r^2\left(e^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}} - e^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2 \end{aligned}$$

所以短期利率的基点波动率为

$$\frac{1}{2}r\left(e^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}} - e^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

注意，基点波动率是短期利率的函数，r 越大，基点波动率也越大。实际上，随着 τ 趋向于 0，基点波动率将收敛于 $r\sigma\sqrt{\tau}$[①]，即基点波动率将收敛于利率的某一比例，所以在这个模型中 σ 称为短期利率的比例波动率。许多业内人士认为假设比例波动率为常数优于假设基点波动率为常数。

---

① $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 + x$，所以

$$\lim_{\tau\to 0}\left[\frac{1}{2}r\left(e^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}} - e^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right] = \frac{1}{2}r\left(1 + m\tau + \sigma\sqrt{\tau} - 1 - m\tau + \sigma\sqrt{\tau}\right) = r\sigma\sqrt{\tau}$$。

我们假设 6 个月期和 1 年期市场利率分别为 3.99％和 4.16％（和前面一样），比例波动率 $\sigma = 12\%$，用前面同样的方法，我们可以求得利率树图和零息票债券树图如下：

$$3.99\% \begin{cases} {}^{1/2}\; 4.69740\% \begin{cases} {}^{1/2}\; 5.49723\% \\ {}_{1/2}\; 4.63919\% \end{cases} \\ {}_{1/2}\; 3.96420\% \begin{cases} {}^{1/2}\; 4.63919\% \\ {}_{1/2}\; 3.91507\% \end{cases} \end{cases}$$

$$0.937764 \begin{cases} {}^{1/2}\; 0.952909 \begin{cases} {}^{1/2}\; 0.973249 \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} \\ {}_{1/2}\; 0.977330 \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} \end{cases} \\ {}_{1/2}\; 0.960036 \begin{cases} {}^{1/2}\; 0.977330 \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} \\ {}_{1/2}\; 0.980800 \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

接下来我们看如何利用上述树图求解不同期限的利率树图及其波动率。

设 1 年期的利率树图为：

$$4.16\% \begin{cases} {}^{1/2}\; y^u \\ {}_{1/2}\; y^d \end{cases}$$

半年后，1.5 年期的零息票债券已经变成 1 年期的零息票债券。则：

$$0.952909 = \frac{1}{\left(1 + y^u / 2\right)^2}$$

$$0.960036 = \frac{1}{\left(1 + y^d / 2\right)^2}$$

解这两个方程可得 $y^u = 4.88222\%, y^d = 4.12032\%$。根据(2.2)，1 年期利

率的半年期比例波动率为：$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^u}{y^d}\right)=8.48346\%$。依此类推，我们可以建立任何期限利率的动态树图，并计算其波动率。

2.4.3 BDT 模型（Black－Derman－Toy Model）：利率的对数服从二项分布、波动率可变，回归行为受到波动率期限结构的影响

在 Black，Derman 和 Toy（1990）的单因子模型中，所有证券的价格和利率都只依赖于一个变量——短期利率。

许多业内人士认为，利率具有均值回归（Mean Reversion）的性质，即利率水准偏高时，它的趋势变量（Drift）相对较小，甚至为负值，当利率水准偏低时，它的趋势变量相对较大。BDT 模型就均有均值回归的性质，但这个性质是通过波动率的期限结构体现的，即利率水准对趋势变量的影响取决于短期利率波动率的演变过程。这种方法存在一个小小的问题，模型为了拟合所需要的波动率期限结构，可能导致以不精确的方式呈现均值回归的性质，这会对定价产生不利影响。所以，改进模型的一个方向或许是在不受波动率过程的影响下单独考虑均值回归的性质。

BDT 模型与其他无套利模型一样，它要求对模型给出的零息票债券价格等于市场价格，同时它要求短期利率波动率的期限结构也和市场观察到的一致，也就是说 BDT 模型允许短期利率的波动率随着时间的变动而变动，所以这种波动率也称为“局部波动率”（Local Volatility）。

BDT 模型的基本结构如下：

$$
r \begin{cases} \overset{1/2}{\ } re^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}} \begin{cases} \overset{1/2}{\ } re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}} \\ \underset{1/2}{\ } re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}} \end{cases} \\ \underset{1/2}{\ } re^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}} \begin{cases} \overset{1/2}{\ } re^{(m+m')\tau-\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}} \\ \underset{1/2}{\ } re^{(m+m')\tau-\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}} \end{cases} \end{cases}
$$

我们可以发现，利率动态出现了非结合的树图（Non-recombining Tree）

这是由于 BDT 模型允许短期利率的波动率随着时间的变动而变动引起的。为了解决这个问题，唯一的解决办法是让利率上行和下行过程中具有不同的趋势变量。假定 m' 是利率上行时的趋势变量，m'' 是利率下行过程中的趋势变量，那么短期利率的树图变成：

$$
r \begin{cases} \overset{1/2}{\nearrow}\; re^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}} \begin{cases} \overset{1/2}{\nearrow}\; re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}} \\ \underset{1/2}{\searrow}\; re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}} \end{cases} \\ \underset{1/2}{\searrow}\; re^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}} \begin{cases} \overset{1/2}{\nearrow}\; re^{(m+m'')\tau-\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}} \\ \underset{1/2}{\searrow}\; re^{(m+m'')\tau-\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}} \end{cases} \end{cases}
$$

要使利率树图重合，我们必须设定

$$re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}} = re^{(m+m'')\tau-\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}}$$

即

$$\left(m''-m'\right)\sqrt{\tau} = 2\left(\sigma-\sigma'\right) \tag{2.3}$$

此时有

$$
\begin{aligned}
re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}} &= re^{(m+m'')\tau-(\sigma-\sigma')\sqrt{\tau}} = re^{(m+m'')\tau-\frac{(m''-m')\tau}{2}} \\
&= re^{\left(m+\frac{m'+m''}{2}\right)\tau} = \sqrt{re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}}re^{(m+m'')\tau-\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}}}
\end{aligned}
$$

也就是说，为了让模型中的波动率期限结构和实际数据相符，我们必须假设波动率会随着时间的变动而变动，进一步，为了要求利率树图的重合，要求趋势变量和波动率的演变存在一定的对应关系。

上述框架虽然有助于理解 BDT 模型的动态性质，但在具体运用 BDT 模型构造短期利率树图时，换一个角度更为方便。

假设 6 个月期、1 年期和 1.5 年期的市场利率分别为 3.99％、4.16％和 4.33％（这些数据可以从债券价格数据中计算出来），$\tau = 0.5$，6 个月期和 1 年期的利率年波动率 σ 分别为 12％和 11％。前面在解释离散时间利率模型时我们证明了随着 τ 趋向于 0，基点波动率将收敛于 $r\sigma\sqrt{\tau}$，所以在这里年度的基点波动率为 3.99％×0.12，约 47.88 个基点。

我们将 6 个月期的利率树图表示如下：

$$3.99\% \left\langle \begin{array}{l} r^{u} \left\langle \begin{array}{l} r^{uu} \\ r^{ud} \end{array}\right. \\[2ex] r^{d} \left\langle \begin{array}{l} r^{du} \\ r^{dd} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

用前面解释的方法，我们可以求得 6 个月后的短期利率。

$$3.99\% \begin{array}{c} 1/2 \\[10ex] 1/2 \end{array} \left\langle \begin{array}{l} 4.69740\% \begin{array}{c} 1/2 \\[3ex] 1/2 \end{array} \left\langle \begin{array}{l} r^{uu} \\ r^{ud} \end{array}\right. \\[4ex] 3.96420\% \begin{array}{c} 1/2 \\[3ex] 1/2 \end{array} \left\langle \begin{array}{l} r^{du} \\ r^{dd} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

在解其他三个未知利率时，我们必须用到三个条件。第一，模型对 1.5 年期的零息债券的定价必须等于其市场价格 $1/(1+4.33\%/2)^3 = 0.937764$ 。第二，1 年期利率的年度波动率必须等于 11%。第三，利率上行和利率下行的过程中波动率 σ' 必须相等。设一年期的利率树图为：

$$4.16\% \begin{array}{c} 1/2 \\[3ex] 1/2 \end{array} \left\langle \begin{array}{l} y^{u} \\ y^{d} \end{array}\right.$$

将上述条件写成数学表达式：

$$\frac{1}{\left(1+\dfrac{y^{u}}{2}\right)^{2}} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{r^{uu}}{2}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{r^{ud}}{2}}\right)}{1+\dfrac{0.0469740}{2}}$$

$$\frac{1}{\left(1+\dfrac{y^{d}}{2}\right)^{2}} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{r^{du}}{2}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{r^{dd}}{2}}\right)}{1+\dfrac{0.0396420}{2}}$$

$$0.937764=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{y^u}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{y^d}{2}\right)^2}\right)}{1+\frac{0.0399}{2}}$$

$$0.5\times\left[\ln\left(y^u/y^d\right)\right]=0.11$$

$$0.5\times\ln\left(r^{uu}/r^{ud}\right)=0.5\times\ln\left(r^{du}/r^{dd}\right)$$

根据前面两个方程式可以解得 $y^u=4.85040\%, y^d=4.15161\%$。将这个两个数值代入后面得方程式解得 $r^{uu}=5.35998\%, r^{ud}=r^{du}=4.64827\%, r^{dd}=4.03106\%$。

2.4.4 回归行为不受波动率期限结构影响的模型

如果我们希望利率回归均值的趋势不会像 BDT 模型中那样受到波动率期限结构的影响，应该如何设置模型呢？Black 和 Karasinkai 的模型能够实现这一目标：

假设 u 是短期利率的长期趋势（均值），ϕ 是利率回归均值的速度，那么可以令短期利率的自然对数的趋势变量是：

$$\phi\left(\ln u-\ln r\right)\tau$$

其中，r 是当时的短期利率，τ 是时间间隔长度。当 $u>r$ 的时候，趋势变量为正值，当 $u>r$ 的时候，趋势变量为负值，所以利率呈现出一种回归均值的趋势，而且 ϕ 代表了回归的速度。

再加上随机冲击 σ，那么短期利率将按如下方式演变：

$$r\begin{cases} \overset{1/2}{\nearrow}\ re^{\phi(\ln u-\ln r)\tau+\sigma\sqrt{\tau}}\equiv r'e^{\sigma\sqrt{\tau}} \\ \underset{1/2}{\searrow}\ re^{\phi(\ln u-\ln r)\tau-\sigma\sqrt{\tau}}\equiv r'e^{-\sigma\sqrt{\tau}} \end{cases}$$

其中 $r'\equiv re^{\phi(\ln u-\ln r)\tau}$。为了使利率树图重合，趋势变量和利率波动率之间必须保持某种关系。为了说明这一点，我们将树图延伸一期：

$$r\begin{cases}\xrightarrow{1/2} r'e^{\sigma\sqrt{\tau}}\begin{cases}\xrightarrow{1/2} r'e^{\sigma\sqrt{\tau}}e^{\phi'\left(\ln u'-\ln r'-\sigma\sqrt{\tau}\right)\tau+\sigma'\sqrt{\tau}}\\ \xrightarrow{1/2} r'e^{\sigma\sqrt{\tau}}e^{\phi'\left(\ln u'-\ln r'-\sigma\sqrt{\tau}\right)\tau-\sigma'\sqrt{\tau}}\end{cases}\\ \xrightarrow{1/2} r'e^{-\sigma\sqrt{\tau}}\begin{cases}\xrightarrow{1/2} r'e^{-\sigma\sqrt{\tau}}e^{\phi'\left(\ln u'-\ln r'+\sigma\sqrt{\tau}\right)\tau+\sigma'\sqrt{\tau}}\\ \xrightarrow{1/2} r'e^{-\sigma\sqrt{\tau}}e^{\phi'\left(\ln u'-\ln r'+\sigma\sqrt{\tau}\right)\tau-\sigma'\sqrt{\tau}}\end{cases}\end{cases}$$

只有当$\phi'=\left(\sigma-\sigma'\right)/\sigma\tau$时，树图才会具有再结合的性质。可是当这个条件成立的时候，模型仍然像 BDT 模型一样：均值回归行为会受到波动率期限结构的影响。

为了让均值回归行为保持独立性，一个可行的办法是让时间间隔长度可变①，则利率树图变为：

$$r\begin{cases}\xrightarrow{1/2} r'e^{\sigma\sqrt{\tau}}\begin{cases}\xrightarrow{1/2} r'e^{\sigma\sqrt{\tau}}e^{\phi'\left(\ln u'-\ln r'-\sigma\sqrt{\tau}\right)\tau+\sigma'\sqrt{\tau'}}\\ \xrightarrow{1/2} r'e^{\sigma\sqrt{\tau}}e^{\phi'\left(\ln u'-\ln r'-\sigma\sqrt{\tau}\right)\tau-\sigma'\sqrt{\tau'}}\end{cases}\\ \xrightarrow{1/2} r'e^{-\sigma\sqrt{\tau}}\begin{cases}\xrightarrow{1/2} r'e^{-\sigma\sqrt{\tau}}e^{\phi'\left(\ln u'-\ln r'+\sigma\sqrt{\tau}\right)\tau+\sigma'\sqrt{\tau'}}\\ \xrightarrow{1/2} r'e^{-\sigma\sqrt{\tau}}e^{\phi'\left(\ln u'-\ln r'+\sigma\sqrt{\tau}\right)\tau-\sigma'\sqrt{\tau'}}\end{cases}\end{cases}$$

此时要使利率树图具有再结合的性质，必须有：

$$\phi'=\frac{1-\dfrac{\sigma'\sqrt{\tau'}}{\sigma\sqrt{\tau}}}{\tau'}$$

2.5 利率二叉树模型的估计

2.5.1 基本的估计步骤

根据前面的论述，我们将两个具有代表性的利率二叉树模型的估计步骤总结如下：

（一）利率的对数服从二项分布、利率的波动率不变但趋势可变的利

① 用三叉树模型也可以解决这个问题（Hull，2000）。

率模型的估计步骤

设τ为利率二叉树的时间间隔和计算利息的间隔，已知τ年期、2τ年期和3τ年期的市场利率（年利率）分别为r^{τ}、$r^{2\tau}$和$r^{3\tau}$，利率的年波动率为σ。估计利率二叉树的步骤如下：

1．求两期的利率动态树图。

设单期的利率树图为：

$$r^{\tau}\begin{cases} \overset{1/2}{\nearrow}\ r^{\tau}e^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}} \\ \underset{1/2}{\searrow}\ r^{\tau}e^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}} \end{cases}$$

那么2τ年期的零息票债券的价格应该为

$$P=\frac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+r^{\tau}e^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}}\tau}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+r^{\tau}e^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}}\tau}}{1+r^{\tau}\tau}=\frac{1}{\left(1+r^{2\tau}\tau\right)^{2}}$$

令 P 等于市场价格，则这个方程中只有 m 一个未知数，所以可以求解。

2．求 3 期的利率动态树图。

两期的利率树图为：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \overset{1/2}{\nearrow} & r^{\tau}e^{(m+m')\tau+2\sigma\sqrt{\tau}} \\
 & \overset{1/2}{\nearrow} & r^{\tau}e^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}} & & \\
 & & & \underset{1/2}{\searrow} & r^{\tau}e^{(m+m')\tau} \\
r^{\tau} & & & & \\
 & & & \overset{1/2}{\nearrow} & r^{\tau}e^{(m+m')\tau} \\
 & \underset{1/2}{\searrow} & r^{\tau}e^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}} & & \\
 & & & \underset{1/2}{\searrow} & r^{\tau}e^{(m+m')\tau-2\sigma\sqrt{\tau}}
\end{array}$$

三期的零息票债券价格树为：

$$P\left\langle\begin{array}{l}\overset{1/2}{} P^{u}\left\langle\begin{array}{l}\overset{1/2}{} P^{uu}\left\langle\begin{array}{l}1\\1\end{array}\right.\\ P^{ud}\left\langle\begin{array}{l}1\\1\end{array}\right.\\ \underset{1/2}{}\end{array}\right.\\ P^{u}\left\langle\begin{array}{l}\overset{1/2}{} P^{du}\left\langle\begin{array}{l}1\\1\end{array}\right.\\ P^{dd}\left\langle\begin{array}{l}1\\1\end{array}\right.\\ \underset{1/2}{}\end{array}\right.\\ \underset{1/2}{}\end{array}\right.$$

那么

$$P^{uu}=1/\left[1+r^{\tau}e^{(m+m')\tau+2\sigma\sqrt{\tau}}\tau\right]$$

$$P^{ud}=P^{du}=1/\left[1+r^{\tau}e^{(m+m')\tau}\tau\right]$$

$$P^{ud}=1/\left[1+r^{\tau}e^{(m+m')\tau-2\sigma\sqrt{\tau}}\tau\right]$$

$$P^{u}=\left(0.5\times P^{uu}+0.5\times P^{ud}\right)/\left(1+r^{\tau}e^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}}\tau\right)$$

$$P^{d}=\left(0.5\times P^{du}+0.5\times P^{dd}\right)/\left(1+r^{\tau}e^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}}\tau\right)$$

此外，对 3τ 年期的零息债券的定价必须等于市场价格，即

$$1/\left(1+r^{3\tau}\tau\right)^{3}=\left(0.5\times P^{u}+0.5\times P^{d}\right)/\left(1+r^{\tau}\tau\right)$$

这样，共有 6 个方程和 6 个未知数，可以求出 m'，从而得到 3 期的 τ 年期利率的动态树图。

3．求 $n\tau$ 年期利率的动态树图。

设 2τ 年期利率的动态树图为

$$r^{2\tau}\left\langle\begin{array}{l}\overset{1/2}{} y^{u}\\ \underset{1/2}{} y^{d}\end{array}\right.$$

τ 年后，3τ 年期的零息票债券已经变成 2τ 年期的零息票债券。则：

$$\frac{1}{P^{u}}=\frac{1}{\left(1+y^{u}\tau\right)^{2}}$$

$$\frac{1}{P^{d}}=\frac{1}{\left(1+y^{d}\tau\right)^{2}}$$

解这两个方程可得 y^{u},y^{d}，2τ 年期的比例波动率为：$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^{u}}{y^{d}}\right)$。

依此类推，我们可以建立任何期限利率的动态树图。

（二）利率的对数服从二项分布、波动率可变，回归行为受到波动率期限结构的影响的利率模型（BDT 模型）的估计步骤

设 τ 为利率二叉树的时间间隔和计算利息的间隔，已知 τ 年期、2τ 年期和 3τ 年期的市场利率（年利率）分别为 r^{τ}、$r^{2\tau}$ 和 $r^{3\tau}$，对应的利率年波动率为 σ^{τ}、$\sigma^{2\tau}$ 和 $\sigma^{3\tau}$。设利率树图如下：

$$r^{\tau}\left\langle\begin{array}{l} r^{u}\left\langle\begin{array}{l} r^{uu}\\ r^{ud}\end{array}\right.\\ \\ r^{d}\left\langle\begin{array}{l} r^{du}\\ r^{dd}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

估计步骤为：

1．求两期的利率动态树图。

单期的利率树图为：

$$r^{\tau}\begin{array}{c}{\scriptstyle 1/2}\\ \\ \\ {\scriptstyle 1/2}\end{array}\left\langle\begin{array}{l} r^{u}=r^{\tau}e^{m\tau+\sigma^{\tau}\sqrt{\tau}}\\ r^{d}=r^{\tau}e^{m\tau-\sigma^{\tau}\sqrt{\tau}}\end{array}\right.$$

2τ 年期的零息票债券的价格应该为

$$P=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+r^{\tau}e^{m\tau+\sigma^{\tau}\sqrt{\tau}}\tau}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+r^{\tau}e^{m\tau-\sigma^{\tau}\sqrt{\tau}}\tau}}{1+r^{\tau}\tau}=\frac{1}{\left(1+r^{2\tau}\tau\right)^{2}}$$

这个方程中只有 m 一个未知数，所以可以求解。

2．求 3 期的利率动态树图。

在解其他三个未知利率时，我们必须用到三个条件。第一，模型对 3τ 年期的零息债券的定价必须等于其市场价格 $1/\left(1+r^{3\tau}\tau\right)^3$。第二，$2\tau$ 年期利率的年度波动率必须等于 $\sigma^{2\tau}\sqrt{2\tau}$。第三，利率上行和利率下行的过程中波动率必须相等。设 2τ 年期的利率树图为：

$$r^{2\tau} \begin{cases} \overset{1/2}{\nearrow} y^u \\ \underset{1/2}{\searrow} y^d \end{cases}$$

将上述条件写成数学表达式：

$$\frac{1}{\left(1+y^u\tau\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+r^{uu}\tau}+\frac{1}{1+r^{ud}\tau}\right)}{1+r^u\tau}$$

$$\frac{1}{\left(1+y^d\tau\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+r^{du}\tau}+\frac{1}{1+r^{dd}\tau}\right)}{1+r^d\tau}$$

$$1/\left(1+r^{3\tau}\tau\right)^3=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(1+y^u\tau\right)^2}+\frac{1}{\left(1+y^d\tau\right)^2}\right)}{1+r^{\tau}\tau}$$

$$0.5\times\left[\ln\left(y^u/y^d\right)\right]=\sigma^{2\tau}\sqrt{2\tau}$$

$$0.5\times\ln\left(r^{uu}/r^{ud}\right)=0.5\times\ln\left(r^{du}/r^{dd}\right)$$

根据前面两个方程式可以解得 y^u,y^d。将这个两个数值代入后面得方程式解得 $r^{uu},r^{ud},r^{du},r^{dd}$。依此类推，我们可以推导出利率整个的动态过程。

2.5.2 利用 Excel 估计利率二叉树模型的步骤

从前面的论述我们可以看出，如果按前面的方式来估计利率二叉树模型，在理论上没有任何问题，不过经过细心考察我们就会发现，如果用前面的估计方法估计利率动态，一旦期限超过 3 期，计算将变得非常麻烦。为此我们在实际估计时需要使用一定的技巧来降低计算量。这里以 BDT 模型为例子介绍一种在 Excel 中改进的估计方法来解决这个问题。

根据(2.3)，我们有

$$
\begin{aligned}
re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}} &= re^{(m+m'')\tau-(\sigma-\sigma')\sqrt{\tau}} = re^{(m+m'')\tau-\frac{(m''-m')\tau}{2}} \\
&= re^{\left(m+\frac{m'+m''}{2}\right)\tau} = \sqrt{re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}}\,re^{(m+m'')\tau-\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}}}
\end{aligned}
$$

设利率树图如下：

$$
r^{\tau}\left\langle
\begin{array}{l}
r^{u}\left\langle \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \end{array}\right. \\[2ex]
r^{d}\left\langle \begin{array}{l} r_2 \\ r_3 \end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

根据前面的推导，我们有

$$r_2=\sqrt{r_1 r_3}$$

我们猜测这是否是一个一般规律。即对于一个 4 期的 BDT 利率树图（重合的）我们应该有

$$r_2=\sqrt[3]{(r_1)^2 r_4},\ r_3=\sqrt[3]{r_1(r_4)^2}$$

对于一个 k 期的利率树图（重合的）我们有

$$r_j=\sqrt[k-1]{(r_1)^{(k-1)-(j-1)}(r_k)^{j-1}}\qquad j=2,\dots,k-1 \tag{2.4}$$

上述等式实际上是成立的，它有助于改善我们的估计速度。

证明如下：

$$
\begin{aligned}
(r_1)^{(k-1)-(j-1)}(r_k)^{j-1} &= r^{k-1}e^{[(k-1)-(j-1)][(m+m_1+\cdots+m_{k-1})+(\sigma_1+\cdots+\sigma_{k-1})\sqrt{\tau}]}re^{(j-1)[(m+m_1+\cdots+m_{k-1})-(\sigma_1+\cdots+\sigma_{k-1})\sqrt{\tau}]} \\
&= r^{k-1}e^{(k-1)[(m+m_1+\cdots+m_{k-1})]+(k-1-2(j-1))[(\sigma_1+\cdots+\sigma_{k-1})\sqrt{\tau}]}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
r_j &= \sqrt[k-1]{(r_1)^{k-(j-1)}(r_k)^{j-1}} \\
&= re^{\frac{(k-1)[(m+m_1+\cdots+m_{k-1})]+(k-1-2(j-1))[(\sigma_1+\cdots+\sigma_{k-1})\sqrt{\tau}]}{k-1}} \\
&= re^{(m+m_1+\cdots+m_{k-1})+\frac{(k-1-2(j-1))[(\sigma_1+\cdots+\sigma_{k-1})\sqrt{\tau}]}{k-1}}
\end{aligned}
$$

根据前面的推导，利率树图要重合必须满足的唯一条件为

$$r_j=\left(r_{j-1}r_{j+1}\right)^{\frac{1}{2}}\quad j=2,\ldots,k-1 \tag{2.5}$$

当 $j\neq 2,k-1$ 时，(2.4)满足条件(2.5)

$$\begin{aligned}\left(r_{j-1}r_{j+1}\right)^{\frac{1}{2}}&=\left(re^{\left(m+m_1+\cdots+m_{k-1}\right)+\frac{\left(k-1-2\left(j-2\right)\right)\left[\left(\sigma_1+\cdots+\sigma_{k-1}\right)\sqrt{\tau}\right]}{k-1}}re^{\left(m+m_1+\cdots+m_{k-1}\right)+\frac{\left(k-1-2j\right)\left[\left(\sigma_1+\cdots+\sigma_{k-1}\right)\sqrt{\tau}\right]}{k-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=re^{\left(m+m_1+\cdots+m_{k-1}\right)+\frac{\left(k-1-2\left(j-1\right)\right)\left[\left(\sigma_1+\cdots+\sigma_{k-1}\right)\sqrt{\tau}\right]}{k-1}}\\&=r_j\end{aligned}$$

根据前面的推导，当 $j=2,k-1$ 时，(2.4)满足条件(2.5)。所以(2.4)是条件(2.5)的一个解。

由于当 r_1 和 r_k 确定时解是唯一的，所以(2.4)是条件(2.5)唯一的一个解。

有了上述结论，我们可以大大简化利率二叉树图的估计。除了上述条件，我们还要利用 Excel 中的规划求解功能，这样每个步骤均只用到两个方程。

设 τ 为利率二叉树的时间间隔和计算利息的间隔，已知 τ 年期直至 kτ 年期的市场利率（年利率）分别为 $r^{\tau},\cdots,r^{k\tau}$，对应的利率年波动率为 $\sigma^{\tau},\cdots,\sigma^{k\tau}$。要估计出 k 期的利率树图，我们只要循环使用下面的步骤。

假设我们要估计的是第 j 期的利率树图，那么

1. 任意指定 r_1 和 r_j，只需要让 $r_1>r_j$。

2. 根据方程(2.4)计算出 r_2 至 r_{j-1}。

3. 利用上述利率和前面阶段估计出来的利率计算出 $\left(j-1\right)\tau$期债券的价格 P^u 和 P^d。

4. 用 $\left(j-1\right)\tau$期债券的价格倒推 $\left(j-1\right)\tau$期利率 y^u 和 y^d。

5. 第 j 期的利率都必须满足的两个估计方程是

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\left(y^u / y^d\right) = \sigma^{(j-1)\tau} \\ \dfrac{\dfrac{1}{2}\left(P^u + P^d\right)}{1+r^\tau} = \dfrac{1}{1+r^{(j-1)\tau}} \end{cases} \tag{2.6}$$

利用 Excel 中的规划求解功能和上述两个方程式，我们就可以估计出第 j 期的所有利率。

2.5.3 多期利率二叉树动态过程的一次性估计

在运用 Excel 中的规划求解功能以后，利率树图的估计虽然得到大大简化，但仍然是一步一步地估计每期的利率，有没有一次就能将整个利率树图估计出来的方法呢？大体而言有两个解决思路：

（一）改进利用 Excel 估计利率二叉树模型的方法

我们可以在上述利用 Excel 估计方法的基础上将每个估计阶段的目标函数加总起来，就可以实现一次估计的目的。具体而言，我们先将(2.6)改写一下

$$\begin{cases} a_j = \left[\dfrac{1}{2}\ln\left(y^u / y^d\right) - \sigma^{(j-1)\tau}\right]^2 \\ b_j = \left[\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(P^u + P^d\right)}{1+r^\tau} - \dfrac{1}{1+r^{(j-1)\tau}}\right]^2 \end{cases} \tag{2.7}$$

在前面，每个阶段的估计目标是

$$\min_{r_1 > r_j}\left\{a_j + b_j\right\} \text{或} \begin{cases} a_j = 0 \\ b_j = 0 \end{cases}$$

我们只要按前面的步骤将利率树图表示出来，然后设定一个总的目标函数

$$\min_{r_1 > r_j}\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(a_j + b_j\right)\right\} \text{或} \sum_{j=1}^{k}\left(a_j + b_j\right) = 0$$

接着利用 Excel 中的规划求解功能，就可以估计出整个利率树图。

（二）运用 Matlab 强大的数据运算功能迭代求解

上述办法虽然是一次性估计出了利率树图，但是仍然没有从根本上解决多期利率树图的估计问题。当我们需要 10 年，15 年甚至 30 年的利率树图时，上述办法将十分繁琐，如果时间允许还不会有很大的问题，当我们面对瞬息万变的市场，需要在短时间内做出准确的决策时，就不能依靠 Excel 软件了。

Matlab 是解决上述问题的一个好工具。Matlab 的优点是有强大的数据处理功能，但不是很直观，不过在 Matlab6.5 的金融衍生产品工具箱中可以直接实现对 BDT 利率树的估计，附录中详细介绍了如何利用 Matlab 命令来估计 BDT 利率树图。

2.6 风险中性定价和二叉树方法的一般定价过程

2.6.1 利率二叉树模型的理论基础——风险中性定价

离散利率模型的理论基础是风险中性定价，根据风险中性定价的基本原理，当市场不存在套利机会时，则必然存在一个与客观概率等价的风险中性测度，此时按无风险利率贴现的资产价格服从鞅过程（Harrison Kleps，1979；Harrison Priska，1981）。T 时刻的不确定的现金流 F_T 在 t 时刻的贴现（以 t 时刻可获得的信息为条件）为

$$F(t)=E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)F_T\right]$$

由于这个风险中性测度对所有资产都是相同的，所以我们一般是先利用零息票债券价格来寻找风险中性测度，然后用来给其他资产定价。对于零息票债券的价格 $B(t)$，我们有

$$B(t)=E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\right]$$

零息票债券的价格 $B(t)$ 和利率的期限结构在本质上是一致的，因为

$r(t,T) = -\ln B(t,T)/(T-t)$,其中$= -\ln B(t,T)$是到期期限为 T-t 的贴现债券的连续复利收益率。

下面以二叉树模型为例子介绍如何通过零息票债券价格求解风险中性测度。对于贴现债券价格$B_{s,t}(*)$，在初始时刻为零状态，记为$B(*) = B_{0,0}(*)$，经过一时刻后，在时刻 1，贴现债券价格可能出现两种状态：上升状态和下降状态，贴现债券价格分别为$B_{1,1}(*)$和$B_{0,1}(*)$，其中第一个小标表示状态下标，第二个下标表示时间下标。以后每经历一个上升状态，状态下标 s 增加 1，否则不增加；时间下标 t 在每一时刻后增加 1。这样，在时刻 2 有贴现债券价格$B_{2,2}(*), B_{1,2}(*), B_{0,2}(*)$。也就是说，这里的二叉树是重合的，所以出现一种路径无关现象，即贴现债券价格经历一次上升后下降$B_{0,0}(*) \to B_{1,1}(*) \to B_{1,2}(*)$和经历一次下降后上升$B_{0,0}(*) \to B_{0,1}(*) \to B_{1,2}(*)$完全相同，$B_{s,t}(*)$只与经历的上升次数和下降次数有关而与时间路径无关。

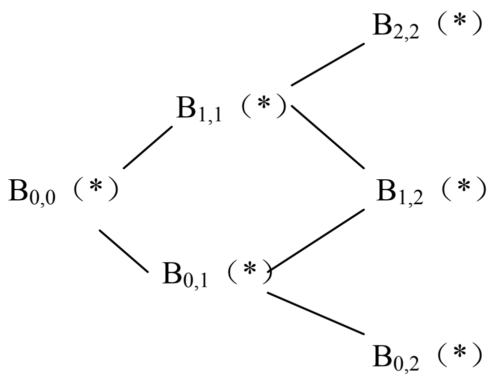


图 4 离散利率模型的二元格点结构

得到风险中性测度的关键条件是无套利，它现在已经成为离散时间框架基础上利率期限结构模型的一般原则。

假定贴现债券价格依据下列原则随时间进行变化, 对所有（s, t）和 T=1, 2, ⋯, n,

$$\begin{cases} B_{s+1,\,t+1}(\mathrm{T}) = \dfrac{B_{s,\,t}(\mathrm{T}+1)}{B_{s,\,t}(1)} hu(T) \\ B_{s,\,t+1}(\mathrm{T}) = \dfrac{B_{s,\,t}(\mathrm{T}+1)}{B_{s,\,t}(1)} hd(T) \end{cases} \tag{2.8}$$

其中 $hu(T),hd(T)$ 被称为扰动函数(Perturbation function)。$\dfrac{B_{s,\,t}(\mathrm{T}+1)}{B_{s,\,t}(1)}$ 是在结点（s,t）处隐含的 T 期远期利率。扰动函数 $hu(T),hd(T)$ 分别衡量了期限结构中上升状态和下降状态下利率同隐含远期利率的差额，因此期限结构的波动性就隐含在扰动函数中。依据无套利假设，有 $B_{s,t}(0)=1, B_{s,t}(T+1)>B_{s,t}(T)$，对所有（s,t）和 T= 1,2,…,n；由于无套利机会，因此在点（s,t）处存在参数π，一个不随（s,t）变化的常数，使得 T+1 期贴现债券在（s,t）的价格等于一时刻后债券价格的现值，即

$$B_{s,t}(T+1)/B_{s,t}(1) = \pi B_{s,t+1}(T) + (1-\pi) B_{s+1,t+1}(T), T=1,2,....n \tag{2.9}$$

代入(2.8)式变化后，有

$$\pi hd(T) + (1-\pi) hu(T) = 1 \tag{2.10}$$

经过一番复杂的推导可以得到扰动函数 $hu(T)$ 的唯一解为

$$hu(T) = 1/[\pi + (1-\pi)\delta^T] \tag{2.11}$$

所以

$$hd(T) = \delta^T / [\pi + (1-\pi)\delta^T] \tag{2.12}$$

这样，我们得到了扰动函数的一般表达式，即可由初始的贴现债券价格 $B_{0,0}(T)$ 和参数 π,δ 来完全确定利率期限结构的变化。在更复杂模型的推广模型中，参数 π,δ 被看作是随状态 s 和时间 t 而变化。

参数π被看作是一种风险中性概率，即恰好使得本时刻的 T 期限债券的价格等于本时刻后预期价格现值的概率，$\pi=(r-d)/(u-d)$，这里 r 是无风险收益率，u 和 d 分别是上升状态和下降状态的无风险收益。参数δ的解释稍稍复杂一些，δ决定了两个扰动函数 $hu(T)$ 和 $hd(T)$ 间的差额，差额越

大，则期限结构的可变性越大，因此参数δ同期限结构的可变性直接相关，而且呈负相关关系，即δ越大，波动性越小。

$$\delta = 1/[(1-\pi)hu(1)] - \pi/(1-\pi) \tag{2.13}$$

因此δ越大，$hu(1)$越小，即波动性越小。

参数π、δ的估计，必须使用非线性估计方法来决定，使得某些或有要求权的理论价格能最好地符合观察到的价格。具体来说，是通过一个反复试错的过程来估计π,δ的值。首先观察一组不同期限的或有要求权的价格，以此来计算初始的π,δ，随后用它们来估计理论价格，再依据理论价格和观察到价格之间的差价来调整π,δ，使得理论价格尽可能符合观察到的价格。这一过程一直重复下去，直到最后理论价格充分接近市场价格。

2.6.2 利用二叉树为衍生产品定价的一般过程

估计出利率二叉树以后，我们就可以用它来为利率衍生产品定价。

我们以看跌期权为例解释，假设把该期权有效期划分成N个长度为Δt的小区间，令$f_{ij}(0 \le i \le N, 0 \le j \le i)$表示在时间$i\Delta t$时第j个结点处的美式看跌期权的价值，我们将$f_{ij}$称为结点$(i,j)$的期权价值。同时用$Su^j d^{i-j}$表示结点$(i,j)$处的证券价格。由于美式看跌期权在到期时的价值是$\max(X - S_T, o)$，所以有：

$$f_{N,\ j} = \max(X - Su^j d^{N-j}, 0)\text{，其中 } j = 0,1,\cdots\cdots,N$$

当时间从$i\Delta t$变为$(i+1)\Delta t$时，从结点(i,j)移动到结点$(i+1,j+1)$的概率为p，移动到$(i+1,j)$的概率为$1-p$。假定期权不被提前执行，则在风险中性条件下：

$$f_{ij} = e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]$$

其中 $0 \le i \le N-1, 0 \le j \le i$ 。如果考虑提前执行的可能性的话，式中的 f_{ij} 必须与期权的内在价值比较，由此可得：

$$f_{ij} = \max\{X - Su^j d^{i-j}, e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p) f_{i+1,j}]\}$$

按这种倒推法计算，当时间区间的划分趋于无穷大，或者说当每一区间 Δt 趋于 0 时，就可以求出美式看跌期权的准确价值。根据实践经验，一般将时间区间分成 30 步就可得到较为理想的结果。

2.7 蒙特卡罗模拟和有限差分

除了二叉树模型，人们经常采用的数值方法还有蒙特卡罗模拟（Monte Carlo Simulation）和有限差分方法（Finite Difference Methods）。蒙特卡罗模拟适合衍生产品收益依赖于标的变量所遵循的历史路径，或是取决于多个标的变量的时候。而二叉树图和有限差分方法则适用于有提前执行可能性的期权。

2.7.1 蒙特卡罗模拟

我们以单因子利率模型为例解释蒙特卡罗模拟的运用，设利率服从如下随机过程

$$dr = u(r,t)dt + \sigma(r,t)dz$$

把 $[t,T]$ 分成一系列小的时间间隔，即选择 $0 = t_1 < t_2 < t_3 \cdots < t_N = T$ 。我们可以用下面的过程来近似利率动态

$$\Delta r_n = u(r_n,t_n)\Delta t + \sigma(r_n,t_n)\Delta z_n$$

其中 $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ ， $\Delta z_n = z_{n+1} - z_n$ 。 z 是标准布朗运动， Δz_n 服从均值为 0，标准差为 $\sqrt{\Delta t_n}$ 的正态分布。通过模拟产生布朗运动就可以得到模拟的利率过程。

蒙特卡罗方法的实质是模拟标的变量的随机运动，预测其衍生产品的

平均回报，并由此得到衍生产品价格的一个概率解。

蒙特卡罗模拟的主要优点包括：

1. 在大多数情况下，人们可以很直接地应用蒙特卡罗模拟方法，而无需对期权定价模型有深刻的理解，所用的数学知识也很基本；为了获得更精确的答案，只需要进行更多的模拟；无需太多工作就可以转换模型。这个优点使得蒙特卡罗方法成为一个相当广泛和强大的期权定价技术。

2. 蒙特卡罗模拟的适用情形相当广泛，其中包括：

（1）衍生产品的回报仅仅取决于标的变量的最终价值的情况；

（2）衍生产品的回报依赖于标的变量所遵循的路径，即路径依赖的情形；

（3）衍生产品的回报取决于多个标的变量的情况，尤其当随机变量的数量增加时，蒙特卡罗模拟的运算时间近似为线性增长而不像其他方法那样以指数增长，因此该方法对依赖三种以上风险资产的多变量期权模型很有竞争力。

因此，蒙特卡罗模拟可以适用于复杂随机过程和复杂终值的计算，奇异期权和路径依赖期权，同时，在运算过程中蒙特卡罗模拟还能给出估计值的标准误差，这也是该方法的优点之一。

蒙特卡罗模拟的缺点主要是：

1. 只能为欧式期权定价，难以处理提前执行的情形。尝试使用蒙特卡罗模拟技巧来为美式期权定价，成为近年来这个领域的发展方向之一。

2. 为了达到一定的精确度，一般需要大量的模拟运算。尤其在处理三个以下的变量时，蒙特卡罗模拟相对于其他方法来说偏慢，例如在处理一些路径依赖期权时，人们常常用二叉树模型等来取代蒙特卡罗模拟，就是因为其耗费的计算时间太多。

2.7.2 有限差分方法

有限差分方法的主要思想是：应用有限差分方法将衍生证券所满足的

偏微分方程转化为一系列近似的差分方程，

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf$$

即用离散算子逼近$\frac{\partial f}{\partial t}$、$\frac{\partial f}{\partial S}$和$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$各项，之后用迭代法求解得到衍生产品价值。

有限差分方法和树图方法是相当近似的，可以解决相同类型的衍生证券定价问题，尤其是那些具有提前执行特征的期权。在标的变量小于三个的时候，这一方法是相当有效率的，但是超过三个变量时蒙特卡罗模拟方法就更有效了。有限差分方法也不适合处理衍生产品价值取决于标的变量历史路径的情况。

3 可赎回债券和可回售债券的定价

3.1 引言

债券中经常会包含一种或数种内嵌期权（Embedded Options），当债券中包含的期权和债券无法分开交易时，称为“内嵌期权”。可提前赎回债券（Callable Bonds）就属于这种类型。这种债券允许发行人根据一组预先设定的赎回价格（Callable Price）来赎回债券，可是赎回权不可以单独交易。可回售债券（Puttable Bonds）也是如此，这种债券允许投资者根据一组预先设定的回售价格（Puttable Price）来回售债券，而回售权不可以单独交易。我们要研究的就是这些内嵌着赎回权和回售权的债券的定价问题。

3.1.1 典型的赎回条款和回售条款

设 A 公司于 2004 年 3 月 15 日发行了一份期限为 30 年的可赎回债券，到期日为 2034 年 3 月 14 日。该债券在最初的 10 年不得赎回（Call protected for the-first 10 years），这经常写成“NC10”，并读为“non-call 10”。在 2014 年 3 月 15 日开始，A 公司可以根据下表的价格向投资者赎回债券。

表 2　债券的赎回价格

日期	赎回价格
2014 年 3 月 15 日	103．16
2015 年 3 月 15 日	102．85
2016 年 3 月 15 日	102．53
2017 年 3 月 15 日	102．21
2018 年 3 月 15 日	101．90
2019 年 3 月 15 日	101．58
2020 年 3 月 15 日	101．26
2021 年 3 月 15 日	100．95
2022 年 3 月 15 日	100．63
2023 年 3 月 15 日	100．32
2024 年 3 月 15 日	100．00

表中显示，在 2014 年年 3 月 15 日至 2015 年年 3 月 15 日之间，A 公司随时有权力根据 103.16 元的价格赎回面值为 100 元的债券。此后赎回价格下跌，在 2015 年 3 月 15 日至 2016 年年 3 月 15 日之间，A 公司随时有权力根据 102.85 元的价格赎回债券。在 2024 年年 3 月 15 日至到期日之间，A 公司随时有权力根据面值赎回债券。A 公司如果在息票日之间赎回债券，除了赎回价格之外，它还必须支付应付利息，因为只要时间经过，利息就已经计提。

上述例子是典型的赎回条款，赎回价格最初高于平价，而后逐年下降为平价，一旦赎回价格触及平价，便会维持该水准至到期日为止。赎回价格通常是以线性的方式逐年下降的，换言之，每年下降的金额大致相等。以目前的例子来说，赎回价格每年大约下降 0.32 元。回售条款和赎回条款类似。

3.1.2 可赎回（可回售）债券与普通债券关系

我们先分析可赎回债券，然后稍加调整即可直接应用到可回售债券上。

1．可赎回债券

对于可赎回债券，当债券发行以后，如果利率上升，发行人将获利，因为他能够以相对偏低的利率借款，反之，如果利率下降，则发行人将受损，因为他以相对偏高的利率借款。所以发行人的提前执行是出现在利率下降，债券价格上升的时候。由此可知，发行人持有的赎回权是一个在标的价格上升的时候购买标的资产的权力，所以它是一个债券看涨期权。在发行人持有赎回权的情况下，发行人有权根据设定的价格赎回债券，这将限制投资者因为债券价格上升而获得的利润。

在可提前赎回债券与对应的普通债券之间，存在一种重要的关系。所谓“对应”是指除了赎回条款之外，两种债券的其他性质完全相同。设 P_C 和

P_{NC} 分别代表可提前赎回债券和普通债券的价格，C 代表赎回权的价格，则

$$P_C = P_{NC} - C$$

因为发行人拥有选择权，所以可提前赎回债券的价格加上选择权的价格等于普通债券的价格。对于投资者而言，可提前赎回债券的价格等于普通债券的价格扣除选择权的价格。这是一个无套利等式，如果这个等式不成立，就存在无风险的套利机会。

证明如下：

（1）如果 $P_C < P_{NC} - C$，则下面投资组合可以获得无风险的利润。

买入 P_C 和 C，卖空 P_{NC}

因为如果利率下降，发行人执行赎回权，投资者将可赎回债券交割获得 P_C，同时执行 C，即以 P_C 的价格买入不可赎回的债券，然后它来交割债券空头头寸，这样投资者不会发生任何净现金流；同理如果利率上升，发行人没有执行赎回权，投资者用可提前赎回的债券交割债券空头头寸即可，这样投资者同样不会发生任何净现金流。

由于 $P_C < P_{NC} - C$，所以投资者在期初有现金流入，而整个组合在未来任何情况下都不会有净现金流，所以该组合可以获得无风险的利润。

（2）如果 $P_C > P_{NC} - C$，则下面投资组合可以获得无风险的利润。

卖空 P_C 和 C，买入 P_{NC}

因为如果利率下降，发行人执行赎回权，C 也会被执行，投资者将不可赎回债券交割获得 P_C，同时用 P_C 去执行债券空头，这样投资者不会发生任何净现金流；同理如果利率上升，发行人没有执行赎回权，投资者用到期的普通债券交割债券空头头寸即可，这样投资者同样不会发生任何净现金流。

由于 $P_C > P_{NC} - C$，所以投资者在期初有现金流入，而整个组合在未来

任何情况下都不会有净现金流，所以该组合可以获得无风险的利润。

总之，为了保证市场不不存在无风险的套利机会，必须有

$$P_C = P_{NC} - C$$

由此可见，在发行人持有赎回权的情况下，发行人可以通过最大化赎回权的价值来降低投资者持有的可赎回债券的价值。实际上发行人持有一个标的资产的看涨期权。

2．可回售债券

对于可回售债券，当债券发行以后，如果利率上升，债券价格下跌，投资者将受损，因为他只能获得相对偏低的利率收入，而且债券价格上也有损失。反之，如果利率下降，债券价格上升，投资者将获利。所以投资者的提前执行是出现在利率上升，债券价格下跌的时候。在存在回售条款的情况下，持有人有权根据设定的价格回售债券，这将限制投资者因为利率下降而遭受的损失。由此可知，投资者持有的回售权是一个在标的价格下跌的时候出售标的资产的权力，所以它是一个看跌期权。

此时在可提前回售债券与对应的普通债券之间，也存在一种重要的关系。设 P_P 和 P_{NP} 分别代表可提前回售债券和普通债券的价格，P 代表投资者持有的回售权的价格，则

$$P_P = P_{NP} + P$$

因为投资者拥有选择权，所以可回售债券的价格减去选择权的价格等于普通债券的价格。对于投资者而言，可回售债券的价格等于普通债券的价格加上选择权的价格。实际上，投资者就是持有了一个标的债券的看跌期权。

3.2 运用二叉树模型为可赎回（回售）债券定价

假设我们已经估计出了利率的二叉树图，由此可以计算普通债券的价格树图（除息后的，ex-coupon），我们用 P_{NC} 代表普通债券在某一个节点的价值，r 代表该节点对应的利率，P_C 为可赎回债券的价格，X 代表赎回价格，C^u 和 C^d 代表上行和下行状况的赎回权的价值，而 C 代表该节点的选择权的价值，那么计算可赎回债券价值的一般法则是：

$$C_{持有} = \frac{0.5C^u + 0.5C^d}{1+r}$$
$$C_{执行} = Max\left(0, P_{NC} - X\right)$$
$$C = Max\left(C_{持有}, C_{执行}\right)$$
$$P_C = P_{NC} - C$$

在发行人持有赎回权的情况下，发行人通过最大化赎回权的价值可以降低投资者持有的可赎回债券的价值。

对于可回售债券，计算债券价值的一般法则是：

$$P_{持有} = \frac{0.5P^u + 0.5P^d}{1+r}$$
$$P_{执行} = Max\left(0, X - P_{NP}\right)$$
$$P = Max\left(P_{持有}, P_{执行}\right)$$
$$P_P = P_{NP} + P$$

例子：每 6 个月为一个时间阶段，利率上行和下行的概率都是 0.5，利率均为年利率，每半年支付一次利息，根据上述原则，在利率二叉树已知的条件下，有一个三年期的可赎回债券，债券息票率为 6%，第 1 年后的赎回价格是 103，第 1.5 年后的赎回价格是 102，第 2 和第 2.5 年后的赎回价格是 101，到期日的赎回价格是 100，那么它的价格估计如下：

表 3 可赎回债券的定价

利率树：每 6 个月一个时间段，上行与下行的概率都是 0.5

					8.413%
				7.345%	
			6.375%		7.100%
		5.497%		6.199%	
	4.704%		5.380%		5.992%
3.989%		4.639%		5.231%	
	3.969%		4.540%		5.056%
		3.915%		4.415%	
			3.832%		4.267%
				3.726%	
					3.601%

普通债券除息（ex-coupon）价格树：年息票 6%，半年付一次利息

						100.00
					98.84	
				98.54		100.00
			98.94		99.47	
		99.93		99.65		100.00
	101.43		100.42		100.00	
103.36		101.70		100.60		100.00
	103.41		101.70		100.46	
		103.23		101.42		100.00
			102.79		100.85	
				102.11		100.00
					101.18	
						100.00
0 年	0.5 年	1 年	1.5 年	2 年	2.5 年	3 年
赎回价格		103	102	101	101	100

赎回权价值树：MAX（持有，执行）

						0.00
					0.00	
				0.00		0.00
			0.00		0.00	
		0.00		0.00		0.00
	0.05		0.00		0.00	
0.17		0.10		0.00		0.00
	0.29		0.20		0.00	
		0.49		0.42		0.00
			0.79		0.00	
				1.11		0.00
					0.18	
						0.00

可提前赎回的债券除息（ex-coupon）价格树：年息票 6%，半年付一次利息

						100.00
					98.84	
				98.54		100.00
			98.94		99.47	
		99.93		99.65		100.00
	101.38		100.42		100.00	
103.20		101.60		100.60		100.00
	103.12		101.50		100.46	
		102.74		101.00		100.00
			102.00		100.85	
				101.00		100.00
					101.00	
						100.00

3.3 研究设计

根据上述原理，我们尝试给 2001 年以来我国发行的具有代表性的可赎回债券和可回售债券进行定价，希望能够得出一些有益的结论。按照目前中国的税法规定，除国债投资的利息所得免征利息税外，其他的债券品种

都要按照 20％的税率征收利息税。因而在对金融债券进行收益分析时同时要考虑到税收的因素给债券收益带来的影响。

3.3.1 研究中使用的利率模型

我们使用流行的 BDT 模型（Black，Derman 和 Toy，1990）估计利率动态，BDT 模型的基本结构如下：

$$
r \begin{cases} \xrightarrow{1/2} re^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}} \begin{cases} \xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}} \\ \xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}} \end{cases} \\ \xrightarrow{1/2} re^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}} \begin{cases} \xrightarrow{1/2} re^{(m+m'')\tau-\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}} \\ \xrightarrow{1/2} re^{(m+m'')\tau-\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}} \end{cases} \end{cases}
$$

3.3.2 利率基准问题

要估计利率动态首先要有利率期限结构的数据，我们知道金融债是在银行间市场进行交易的，所以一般情况下应该使用银行间市场的利率期限结构作为定价的利率基准。不过由于目前我国银行间市场的债券交易采用的是柜台交易，在数据采集方面存在困难，所以我们决定使用更加全面和真实的交易所债券数据。同时，我们要定价的含权金融债是国家开发银行发行的，其风险级别和国债相同，所以我们用交易所国债的利率期限结构作为定价基准。

我们使用多元回归样条估计和上交所 2001 年至 2004 年 6 月每天的国债交易数据估计了上交所在此期间每个交易日的利率期限结构，然后在此基础上根据 BDT 模型来估计利率的二叉树图。

3.3.3 拟定价的可赎回债券和可回售债券

国家开发银行从 2001 年以来共发行了 90 几只金融债，其中有一部分是可以赎回或可以回售的，我们将对这些具有赎回（回售）性质的债券进

行定价，最终选定的样本包括 5 只可回售债券和 6 只可赎回债券。

3.4 定价结果与分析

3.4.1 可赎回债券定价结果

我们选起息日为定价日，所选样本债券都是按面值 100 发行的。所以如果债券的理论价格高于 100，说明债券被低估，反之债券被高估。

表 4 国开行可赎回债券基本条款与定价结果

债券简称	02 国开 06	02 国开 15	02 国开 18	03 国开 02	03 国开 13	03 国开 14
债券代码	20206*	20215*	20218*	30202*	30213*	30214*
债券全称	2002 六期国开金融债	2002 十五期国开金融债	2002 十八期国开金融债	2003 二期国开金融债	2003 十三期国开金融债	2003 十四期国开金融债
面值(元)	100	100	100	100	100	100
发行价格(元)	100	100	100	100	100	100
计划发行数量(亿元)	100	100	100	200	200	100
实际发行数量(亿元)	100	100	100	200	200	100
债券期限(年)	10	10	10	10	10	10
票面利率(%)	2.15	3.29	3.3	2.87	2.77	2.77
发行起始日期	2002-6-12	2002-10-23	2002-12-4	2003-3-19	2003-7-23	2003-8-7
发行终止日期	2002-6-21	2002-10-31	2002-12-12	2003-4-8	2003-7-31	2003-8-18
上市日期	2002-6-25	2002-11-4	2002-12-13	2003-4-10	2003-8-4	2003-8-20
发行对象	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员
发行方式	票面利率招标	采用利率招投标方式发行	单一利率招标	采用利率招投标方式发行	公募	公募
起息日	2002-6-16	2002-10-26	2002-12-10	2003-3-31	2003-7-29	2003-7-29
到期日	2012-6-16	2012-10-26	2012-12-10	2013-3-31	2013-7-29	2013-7-29
计息方式	单利	单利	单利	单利	单利	单利
付息日说明	每年 6 月 16 日付息,节假日顺延	每年 10 月 26 日付息,节假日顺延	每年 12 月 10 日付息,节假日顺延	每年 3 月 31 日付息,节假日顺延	每年 7 月 29 日支付利息节假日顺延	每年 7 月 29 日支付利息节假日顺延
付息频率	1	1	1	1	1	1
利率类型	固定利率	固定利率	固定利率	固定利率	固定利率	浮动利率

偿还方式	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付
利率说明	20020616至20070615,2.1466%;20070616至20120616,3.3466%	20021026-20071025五年期间的票面利率为3.2939%，20071026-20121026五年期间的票面利率为4.5939%	前五年(20021210-20071210)利率为3.3%，后五年(20071210-20121210)利率在前五年利率基础上加130个基点	前五年20030331-20080331利率由本次招投标确定,后五年20080331-20130331利率在前五年利率基础上加130个基点	2008年7月29日－2013年7月29日票面利率在前5年基础上加130个基点。	2003年7月29日-2008年7月29日期间的票面利率为2.77%，2008年7月29日-2013年7月29日期间的票面利率为4.07%
赎回条款	本期债券仅设定一次发行人选择提前赎回的权利，即发行人可选择在2007年6月16日以面值全部赎回债券，发行人选择赎回前，将至少提前一个月，即于2007年5月16日之前告知全体债券持有人，同时通知中央国债登记结算有限责任公司。	本期债券仅设定一次发行人选择提前赎回的权利，即发行人可选择在2007年10月26日以面值全部赎回债券，发行人选择赎回前，将至少提前一个月，即于2007年9月26日之前告知全体债券持有人，同时通知中央国债登记结算有限责任公司。	本期债券仅设定一次发行人选择提前赎回的权利，即发行人可选择在2007年12月10日以面值全部赎回债券，发行人选择赎回前，将至少提前一个月，即于2007年11月10日之前告知全体债券持有人，同时通知中央国债登记结算有限责任公司。	本期债券仅设定一次发行人选择提前赎回的权利，即发行人可选择在2008年3月31日以面值全部赎回债券，发行人选择赎回前，将至少提前一个月，即于2008年2月29日之前告知全体债券持有人，同时通知中央国债登记结算有限责任公司。	本期债券仅设定一次发行人选择提前赎回的权利，即发行人可选择在2008年7月29日以面值全部赎回债券，发行人选择赎回前，将至少提前一个月，即于2008年6月29日之前告知全体债券持有人，同时通知中央国债登记结算有限责任公司。	本期债券仅设定一次发行人选择提前赎回的权利，即发行人可选择在2008年7月29日以面值全部赎回债券，发行人选择赎回前，将至少提前一个月，即于2008年6月29日之前告知全体债券持有人，同时通知中央国债登记结算有限责任公司。
普通债券价值	105.0684365	114.9402762	117.3093068	103.4307387	108.8045415	108.8045415
赎回权价值	10.78637469	15.26486145	15.58990965	12.67516535	13.08361781	13.08361781
可赎回债券价值	94.2820618	99.67541475	101.7193972	90.75557333	95.72092373	95.72092373

3.4.2 可回售债券定价结果

表 5 国开行可回售债券基本条款与定价结果

债券简称	01 国开 20	02 国开 05	03 国开 15	03 国开 16	04 国开 02
债券代码	10220*	20205*	30215*	30216*	40202
债券全称	2001 二十期国开金融债	2002 五期国开金融债	2003 十五期国开金融债	2003 十六期国开金融债	2004 二期国开金融债
面值(元)	100	100	100	100	100
发行价格(元)	100	100	100	100	100
计划发行数量(亿元)	100	100	100	100	200
实际发行数量(亿元)	100	100	100	100	200
债券期限(年)	10	20	10	20	10
票面利率(%)	3	2.65	2.77	3.14	3.51
发行起始日期	2001-12-12	2002-4-17	2003-8-20	2003-8-20	2004-2-13
发行终止日期	2001-12-26	2002-5-13	2003-9-1	2003-9-4	2004-2-27
上市日期	2001-12-31	2002-5-14	2003-9-3	2003-9-10	2004-3-2
发行对象	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员
发行方式	公募	票面利率招标	公募	公募	公募
起息日	2001-12-21	2002-5-9	2003-8-28	2003-9-4	2004-2-25
到期日	2011-12-21	2022-5-9	2013-8-28	2023-9-4	2014-2-25
计息方式	单利	单利	单利	单利	单利
付息日说明	每年 12 月 21 日付息,节假日顺延	每年 5 月 9 日、11 月 9 日付息,遇节假日顺延	每年 8 月 28 日支付利息节假日顺延	每年的 3 月 4 日和 9 月 4 日均为付息日节假日顺延	每年的 2 月 25 日为付息日(遇节假日顺延)。
付息频率	1	2	1	2	1
利率类型	固定利率	固定利率	固定利率	固定利率	固定利率
利率说明	0.03	0.0265	0.0277	0.0314	0.0351
回售条款	本期债券的任何持有人均可选择在 2006 年的付息日由发行人以本金全部或部分赎回债券,但需至少提前一个月,即于 2006 年 11 月 21 日之前告知中央国债登记结算有限责任公司托管部。本期债券不设定发行人主动赎回事项,仅设定持有人有选择赎回的权利。	本期债券的任何持有人均可选择在 2012 年的付息日由发行人以本金全部或部分赎回债券,但需至少提前一个月,即于 2012 年 4 月 9 日之前告知中央国债登记结算有限责任公司。本期债券不设定发行人主动赎回事项,仅设定持有人有选择赎回的权利。	本期债券的任何持有人均可选择在 2008 年 8 月 28 日由发行人以本金全部或部分赎回债券,但需至少提前一个月,即于 2008 年 7 月 28 日之前告知中央国债登记结算有限责任公司。本期债券不设定发行人主动赎回事项,仅设定持有人有选择赎回的权利。	本期债券的任何持有人均可选择在 2013 年 9 月 4 日由发行人以本金全部或部分赎回债券,但需至少提前一个月,即于 2013 年 8 月 4 日之前告知中央国债登记结算有限责任公司。 本期债券不设定发行人主动赎回事项,仅设定持有人有选择赎回的权利。	本期债券的任何持有人均可选择在 2009 年 2 月 25 日要求发行人全部或部分赎回债券本金,但需至少提前一个月,即于 2009 年 1 月 25 日之前告知中央国债登记结算有限责任公司。 本期债券不设定发行人主动赎回事项,仅设定持有人有选择赎回的权利。
普通债券价值	104.9632573	122.6119391	106.5016263	130.5783624	108.3197654
回售权价值	0	0	0	0	0
可回售债券价值	104.9632573	122.6119391	106.5016263	130.5783624	108.3197654

3.5 结论与建议

从定价结果可以看出，可赎回债券的价值接近发行价格，说明市场对这种债券的定价是比较合理的，不过可回售债券的定价结果表明回售权基本上不会被执行，说明现在市场利率比较低，而债券票面利率比较高，利率上升使债券价格下跌到面值以下，从而触发回售权的可能性很小。

此外，要注意的是本文使用的利率期限结构是从上海证券交易所的国债数据[①]中剥离出来的，这样做的一个隐含假定是上交所的利率期限结构是合理的，不过由于我国债券市场还处于发展初期，其利率期限结构有明显的不合理之处，这可能会对上述结论造成一定的影响。

[①]由于银行间市场国债采用柜台交易，所以数据的有效性比较低，因此没有用银行间市场的国债期限结构作为定价基准。

4　外汇结构性存款的定价

4.1 引言

4.1.1 背景

在我国利率一直受到严格的管制，对于存款利率的管理尤为严格。人民银行根据存款性质、存款期限、存款币种等因素统一公布法定利率，各家银行一律执行相同的标准，没有任何灵活性。近年来，随着我国市场经济的不断发展，利率市场化（自由化）的呼声越来越高，人民银行选择了“先外币后人民币、先大额后小额、先对公后对私”循序渐进的利率市场化道路。

2000 年 9 月，我国进行了外币利率市场化改革，人民银行放开了大额外汇存款（等值 300 万美元以上）的利率上限，各家商业银行竞相通过提高利率来争取大额外汇存款，随着银行在传统货币市场的利差空间越来越小，寻求存款收益突破的需求越来越强烈，各家银行积极尝试把期权等衍生金融工具引入传统负债业务，通过产品创新大幅提高存款收益，外汇结构性存款就是在这样的背景下诞生的。

4.1.2 什么是外汇结构性存款（Structured Deposit）

所谓外汇结构性存款是指在普通外汇存款的基础上嵌入某种金融衍生工具（主要是各类期权），通过与利率、汇率、指数的波动挂钩或与某实体的信用情况挂钩从而使存款人在承受一定风险的基础上获得较高收益的产品。它是固定收益产品与选择权的组合。它通过选择权与固定收益产品间的组合，结构性产品的投资报酬与连接标的价格波动产生连动效应，可以达到在一定程度上保障本金并且获得较高投资报酬率的功能。

在结构性存款发展初期，银行只能对等值300万美元以上的大额外汇存

款提供这种产品。从2004年初开始，小额外汇结构性存款在我国流行起来，它们的名称各异，例如厦门中行的“汇聚宝”，厦门工行的“汇财宝”，厦门建行的“汇得利”都属于外汇结构性存款。从各行推出的这类产品看，它的特点是存款期限较长，短则一年（由银行决定）长则3至5年，投资者将资金以存款方式交于银行后，一般由银行向国外代理行叙做结构性存款，并给予大致在2.53％至2.63％之间（高于同期息率1—2倍）的固定收益。由于有高出同期存款数倍的较高收益，在外汇投资渠道狭窄，风险较高，收益较低的情况下，外汇结构性存款自然深受投资者的青睐和追捧。

外汇结构性存款之所以成为个人理财产品新宠，一方面是这些理财产品拓展了老百姓的理财渠道，让老百姓能获得更多的实惠；另一方面，金融衍生产品的概念开始进入老百姓的日常生活，金融衍生工具开始褪下其神秘的面纱，被中国老百姓所使用，开始为提高外汇资产的收益发挥作用。

结构性存款产品虽然在国内还处于起步阶段,但它在发达国家和地区却已被投资人广泛接受,普及面相当广。设立面向个人投资者结构性存款的目的，就是把众多小规模的外汇资金集中起来，以投资结构性存款的方式赚取高于国际市场同业拆放利率的收益。银行可以拿这笔钱，去香港、美国、英国市场，投资于汇率或利率挂钩的外汇期权。由于目前国内外币存款利率普遍低于国际市场利率，所以银行直接将其转存就可以获取收益，这也是风险管理水平还有限的国内商业银行目前采取的过渡性措施。

外汇结构性存款既可以对汇率、利率风险进行套期保值，又可用于增加短期资金收益，并且客户可以自由选择存款的币种、期限、目标收益率等。对那些有外汇存款并且希望增加存款收益的客户和有外汇兑换需要的进出口业务的客户等尤其合适。

4.1.3 结构性存款的分类

（1）按照可提前终止的次数划分

结构性存款的一个典型特征是银行有权力提前终止存款，而普通的定

期存款是客户有权提前终止存款。普通的定期存款不限制客户提前支取的时间和次数，但外汇结构性存款一般对提前终止的时间和次数有限制，只有一次提前终止权力的就是一次可提前终止结构性存款，有多次提前终止权力的则是多次可提前终止结构性存款。

表 6　一次可提前终止结构性存款

本金金额	USD3,000,000.00 以上
成交日	2004 年 3 月 10 日
起息日	2004 年 3 月 17 日
到期日	起息日后 3 年
存款期限	3 年（从起息日至到期日）
存款利率	2.90%
计息方式	实际存款天数/360
利息支付	每半年付息一次
到期偿还	100%本金
提前终止次数	1 次
提前终止规定	在第 6 个月的付息日，存款银行有权根据自己的决定，在支付前期利息的同时按 100%本金金额提前终止该存款。存款银行将提前 4 天通知存款人提前结束交易的决定。
备注	此报价仅供参考，并不代表正式的存款报价，银行有权根据市场变化在事先没有通知情况下更改报价。

表 7　多次可提前终止结构性存款

本金金额	USD3,000,000.00 以上
成交日	2004 年 3 月 10 日
起息日	2004 年 3 月 17 日
到期日	起息日后 3 年
存款期限	3 年（从起息日至到期日）
存款利率	3.10%
计息方式	实际存款天数/360
利息支付	每半年付息一次
到期偿还	100%本金
提前终止次数	5 次
提前终止规定	前 6 个月存款银行不能提前终止该存款。在第 6 个月及以后的任何一个付息日，存款银行都有权根据自己的决定，在支付前期利息的同时按 100%本金金额，提前终止该存款。存款银行将提前 4 天通知存款人提前结束交易的决定。
备注	此报价仅供参考，并不代表正式的存款报价，银行有权根据市场变化在事先没有通知情况下更改报价。

（2）按照本金有无风险划分

按照本金有无风险来分，目前市场上的外汇结构性存款可以分成两种类型,即"本金有风险类"和"本金无风险类"。

A 本金有风险类

它是存款和外汇期权的组合,在存款的同时,存款人卖给银行一个存款货币的看涨期权,期权费收入以利息方式反映,从而提高了收益。存款到期日如存款人卖出的期权被执行,则存款货币按事先约定的汇率转换成另一种货币。目前国内中行、建行等推出的"双货币存款"、"两得宝"、渣打银行的"汇利存款"、花旗银行的"优利帐户"、荷兰银行的"多利理财"等属于典型的"本金有风险类"产品。

B 本金无风险类

这类产品以存款产生的利息买入期权,以期权盈利提高收益,收益水平与 LIBOR(伦敦银行同业拆借利率)相关。包括建行的"汇得盈"、中行的"盈得多"、工行的"节节高"、花旗银行的"市场挂钩帐户"等产品均属于该类。

（3）按挂钩标的划分

A.与汇率挂钩的结构性存款

与汇率挂钩的结构性存款是指在存款期内，在选定的可接受的某币种（如人民币、欧元、港币等货币）的某个汇率区间，银行为客户提供的定期存款。在存款期内，如果所挂钩的货币汇率在约定的区间运行，到期后银行付给客户约定的存款利息。如果所挂钩的货币汇率超出了约定的汇率区间，则客户收益为零，银行按照事先约定比例返还客户本金。与利率挂钩的结构性存款原理和与汇率挂钩的结构性存款类似，只是汇率区间换为利率区间。

实际上，与汇率挂钩的结构性存款是根据自身对某种货币汇率波动的把握，通过期权组合，在承担一定利息损失风险的前提下，与银行签订结

构性存款协议，以争取获得比定期存款利率更高的收益率。

例：与汇率挂钩的结构性存款

A 公司 2004 年 8 月 10 日与银行签订如下结构性存款协议

存款期限：3 个月（从 2004 年 8 月 10 日至 11 月 10 日）

汇率区间：人民币兑美元的基准价在 8.2600-8.2800 之间

约定利率：年息 2.4%或年息 0.1%（即如果 2004 年 11 月 10 日人民币兑美元的基准价在 8.2600-8.2800 区间内，银行按年息 2.4%支付 A 公司利息；如果 2004 年 11 月 10 日人民币兑美元的基准价在 8.2600-8.2800 之外，银行按年息 0.1%支付 A 公司利息）。

假设 2004 年 11 月 10 日，人民币兑美元的基准价是 8.2771，那么银行要按年息 2.4%付给 A 公司利息。因此，A 公司获得比定期存款利率高出 1.2375%的利息收入。

B.与利率挂钩的结构性存款

即与 LIBOR、HIBOR 挂钩，此产品是基于对短期利率未来走势的预期而进行的较长期限的管理。

例：与利率挂钩的结构性存款

存款期限：3 年

利率：第一年固定为 4.5%，其余两年利率均为 10%－6 个月 LIBOR，每半年付息，银行有权在第一次付息日后每半年行使一次提前终止存款的权利。

产品优点：100%本金保证，高于市场利率的收益机会

C.与其他标的物挂钩的结构性存款

如与国际市场黄金价格挂钩、与英国北海原油价格挂钩、与特定地区天气状态挂钩等。投资于这类产品需对选定的挂钩标的物的波动趋势有深入的了解,判断失误将会导致收益率的降低。

例：与债券价格挂钩的结构性存款

三个月美元存款，收益率与十年期中海油债券价格走势挂钩。年收益率为 3.00%，中海油债券指定价格：96.15（报价当天价格为 98.60）。

本金返还条款：（1）期末中海油债券价格高于指定价格，本金 100%偿还；（2）期末中海油债券价格低于指定价格，将本金按照指定价格购买债券。

例：与信用挂钩的结构性存款

三年期美元存款，收益率与中国移动、香港和记黄埔、香港地铁、韩国发展银行的公司信用挂钩。年收益率为 4.09%，每季度付息一次。

本金返还条款：（1）存款到期前，如以上公司都没有发生任何信用违约行为（相关信用违约的定义在协议中规定），则本金 100%偿还；（2）存款到期前，只要以上任何一个公司发生任何信用违约行为（相关信用违约的定义在协议中规定），则其本金将会按照市值转变为相应的公司发行的债券。可提前终止条款：只要以上任何一个公司发生任何信用违约行为（相关信用违约的定义在协议中规定），银行按照协议将相应公司债券支付给客户后，该存款即告终止，双方权利义务终止。

（4）按收益率的类型划分

在收益率的选择上，银行设计了两种类型：一种是收益固定型，即承诺××％的回报。另一种是收益递进型。与前者不同的是，在整个投资期内，采取投资收益分段计息、分次支付的方式。如中行推出的“聚宝盆”，承诺第一个半年有 6％的回报，以后则按特定算法逐年变化，直到总收益达到 8％终止合同。

表 8　收益递进型结构性存款

本金金额	USD3,000,000.00 以上
成交日	2003 年 2 月 13 日
起息日	2003 年 2 月 20 日
到期日	起息日后 3 年
存款期限	3 年（从起息日至到期日）
计息期	每半年付息一次
存款利率	第 1 个付息期 2.75% 第 2 个付息期 3.00% 第 3 个付息期 3.25% (每个付息期利率上升 0.25％) 第 6 个付息期 4.00%（如果始终没有被银行提前终止，平均存款利率为 3.375％）
计息方式	实际存款天数/360
到期偿还	100%本金
提前终止次数	5 次
提前终止规定	前 6 个月存款银行不能提前终止该存款。在第 6 个月及以后的任何一个付息日，存款银行都有权根据自己的决定，在支付前期利息的同时按 100%本金金额，提前终止该存款。存款银行将提前 4 天通知存款人提前结束交易的决定。
备注	此报价仅供参考，并不代表正式的存款报价，银行有权根据市场变化在事先没有通知情况下更改报价。

4.2 外汇结构性存款的定价原理

外汇结构性存款的基本设计原理是把存款和期权工具进行打包，通过各种期权工具的运用，改变传统存款产品的特性，积极寻求合理的风险收益。常用的期权工具有：看涨期权、看跌期权、范围期权、两值期权、障碍期权、利率互换期权、利率上下限等。外汇结构性存款定价的关键在于给内嵌在其中的衍生产品定价。下面我们以与利率关联的结构性存款为例解释外汇结构性存款的定价方法。

实际上我们可以将与利率关联的外汇结构性存款看成是可赎回债券来

定价，因为它相当于赎回价格恒等于存款本金的可赎回债券，因此我们可以将可赎回债券的定价方法稍微调整以后就可以直接运用到结构性存款的定价上面。

举个例子，如果我们用利率二叉树来给可赎回债券定价，假设我们已经估计出了利率的二叉树图，由此可以计算普通债券的价格树图（除息后的，ex-coupon），我们用 P_{NC} 代表普通债券在某一个节点的价值，r 代表该节点对应的利率，P_C 为可赎回债券的价格，C^u 和 C^d 代表上行和下行状况的赎回权的价值，而 C 代表该节点的选择权的价值，为了保证市场不不存在无风险的套利机会，必须有

$$P_C = P_{NC} - C$$

在发行人持有赎回权的情况下，发行人可以通过最大化赎回权的价值来降低投资者持有的可赎回债券的价值。此时计算可赎回债券价值的一般法则是：

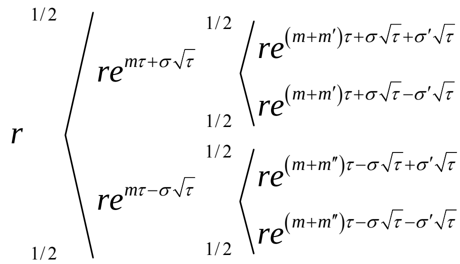
$$\begin{aligned}
&C_{\text{持有}} = \frac{0.5C^u + 0.5C^d}{1+r} \\
&C_{\text{执行}} = Max\left(0, P_{NC} - X\right) \\
&C = Max\left(C_{\text{持有}}, C_{\text{执行}}\right) \\
&P_C = P_{NC} - C
\end{aligned}$$

4.3 研究设计

根据上述原理，我们尝试给厦门主要商业银行在 2004 年初以来推出的代表性外汇结构性存款进行定价，希望能够得出一些有益的结论。

4.3.1 研究中使用的利率模型

我们使用流行的 BDT 模型（Black，Derman 和 Toy，1990）估计利率动态，BDT 模型的基本结构如下：



4.3.2 美元利率数据的获取

本文使用的美元利率数据为从美国财政部的官方网站[1]上下载的美国国债收益率曲线（Treasury Yield Curve）数据，收益率的波动率也是根据该数据估计而得。在美国债券市场，收益的报价使得它们仿佛每年进行 2 次资本化。这种独特惯例的反映这样一个事实，在美国，传统上债券每年付息两次，即不是每年复利，而是半年复利。

美国财政部官方公布的美国国债收益率曲线数据是根据每日债券收盘价格运用三次多项式（Cubic Polynomial）从息票债券中计算出来的[2]。

定义折现因子为

$$d(T)=\frac{1}{(1+y/2)^{2T}}$$

其中 y 就是国债收益率曲线中与期限为 T 年的年收益率。这种方法是要用一个三次函数来近似贴现因子

$$\hat{\mathrm{d}}(\mathrm{T})=\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1(\mathrm{T})+\mathrm{a}_2(\mathrm{T})^2+\mathrm{a}_3(\mathrm{T})^3$$

在 T＝0 时(可立即得到 1 美元)的折现因子必须为 1，因此 $a_0=1$，前面的等式可写成：

$$\hat{\mathrm{d}}(\mathrm{T})-1=\mathrm{a}_1(\mathrm{T})+\mathrm{a}_2(\mathrm{T})^2+\mathrm{a}_3(\mathrm{T})^3$$

息票债券的价格这时可以写成折现因子的函数(假定下面等式中所有的

[1] 网址为：http://www.ustreas.gov/offices/domestic-finance/debt-management/interest-rate/yield-hist.html

[2] 参见网站上的相关说明，地址为 http://www.ustreas.gov/offices/domestic-finance/debt-management/interest-rate/yield.html

息票是一样的，本金为 1 0 0 美元，到期支付)：

$$PV = CPN\left(dT_1\right) + CPN\left(dT_2\right) + \cdots + \left(CPN + 100\right)\left(dT_N\right)$$

利用三次多项式，上式变为：

$$\begin{aligned} PV = CPN\left[1 + a_1\left(T_1\right) + a_2\left(T_2\right)^2 + a_3\left(T_3\right)^3\right] \\ + \cdots + \left(CPN + 100\right)\left[1 + a_1\left(T_N\right) + a_2\left(T_N\right)^2 + a_3\left(T_N\right)^3\right] \end{aligned}$$

现在我们把等式各项按三次多项式的系数重新排列

$$\begin{aligned} PV = & 100 + \sum\left(CPN\right) \\ & + a_1\left[CPN \bullet T_1 + \cdots + \left(CPN + 100\right)T_N\right] \\ & + a_2\left[CPN\left(T_1\right)^2 + \cdots + \left(CPN + 100\right)\left(T_N\right)^2\right] \\ & + a_3\left[CPN\left(T_1\right)^3 + \cdots + \left(CPN + 100\right)\left(T_N\right)^3\right] \end{aligned}$$

现在我们得到

$$PV - \left(100 + \sum CPN\right) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$$

整个估计的核心就是我们取一个息票债券集，按前面的方法计算每一种息票债券，然后做线性回归找三次方程的最优系数。为简化计算，一般选取的都是半年的整数倍到期的债券，因为这样可以使得应计利息为零。

4.3.3 银行结构性产品的信用风险溢酬

由于结构性存款是银行发行的，所以和国债收益率之间存在一定的风险利差，即银行的信用风险溢酬，我们用 2003 年银行间 7 天同业拆借利率和交易所国债收益率的平均收益率利差作为银行信用风险溢酬代入，这个利差是 0.35％。

4.3.4 拟定价的结构性存款

我们选取了厦门中国银行、厦门工商银行和厦门建设银行推出的代表性外汇机构性存款进行定价。各家银行的结构性存款报价如下：

1．厦门中国银行：“汇聚宝”

表 9　厦门中行“汇聚宝”（第一期）美元

品种 特点	“期限可变”理财计划	“日进斗金”理财计划
资金募集期	2004 年 1 月 14 日—2004 年 1 月 18 日	仅 5 天
起息日	2004 年 1 月 20 日	2004 年 1 月 20 日
到期日	2007 年 1 月 20 日	2007 年 1 月 20 日
投资期限（不确定）	最短一年；最长三年	最短六个月；最长三年
	在理财计划执行后的第一年末决定是否终止该计划，	在每个计息日，中国银行有权决定是否终止该理财计划
	三年内，客户不可主动提前终止计划	三年内客户不可主动提前终止该计划
投资回报率高	年收益：确保 2.68% 相当于一年期银行存款年收益率 0.6875%的 3.9 倍	年收益：4.5%，高出当前银行存款年收益率数倍
投资风险低	本金 100%安全,收益丰厚	本金 100%安全,收益丰厚
	即便一年后银行终止理财计划,您可再投资其它理财产品	即便银行在某个付息日终止理财计划,您可再投资其它理财产品
免承担费用	不必交纳认购费和资金管理费	不必交纳认购费和资金管理费
计息基础	30/360(每月按 30 天计，每年按 360 天计)	Act (实际天数)/360(每年按 360 天计)
收益支付(每半年一次)	每半年付息一次，投资者可将收益进行再投资，等同享受复利的好处	每半年付息一次(按约定的计算方法)。投资者可将收益进行再投资，等同享受复利的好处。

2．厦门建设银行：汇得利

币　　种：　美元

预约时间：　2004 年 02 月 12 日至 18 日 15：00 时（周末照常可预约）

交易起始日：　2004 年 02 月 20 日

到　期　日：　2007 年 02 月 20 日

期　　限：　3 年。最短 3 个月，最长 3 年，视银行是否提前终止而定。

收　益　率：　2.68%，5000 美元以上 2.70%(暂定)

收益支付频率：每三个月支付一次收益

委 托 金 额：现钞或现汇不少于 1000 美元，不一定要是 1000 美元的整数倍；最小单位到元。

委 托 费 用：银行不收认购费和资金管理费。

提前终止权：每个付息日银行有权取消剩余期限的交易。

附属条件：结构性理财资金不得提前支取，不得挂失，不得转让。

3．厦门工商银行：“汇财宝”

起存金额 1000 美元，保证固定年收益率 3.30%，工行每 3 个月支付一次投资收益，并根据国际市场情况选择是否提前终止该理财产品，每 3 个月享有 1 次终止权。若工行没有选择提前终止，则本结构存款的实际期限为 5 年。第 5 年末将一次性支付全额本金和最后 3 个月的投资收益。发行期从 2004 年 2 月 25 日至 3 月 3 日，共 8 天。

4.4 定价结果与分析[1]

4.4.1 厦门中国银行“汇聚宝”的定价结果

由于“汇聚宝”期限较短，只有 3 年，所以对应的利率树图估计比较简单，直接用 EXCEL 的估计结果如下：

表 10　2004 年 1 月 20 日美国国债收益率二叉树

					0.1600
				0.1500	
			0.1483		0.0366
		0.0662		0.0287	
	0.0271		0.0176		0.0084
0.0097		0.0064		0.0055	
	0.0021		0.0021		0.0019
		0.0006		0.0010	
			0.0002		0.0004
				0.0002	
					0.0001

注：估计模型是 BDT 模型，期限为三年，每半年为一个时间间隔。

[1] 已经将利息税剔除。

在上述利率动态过程的基础上，对“汇聚宝”的两个品种定价如下：

1．“期限可变”理财计划

除息后存款的价值（不考虑提前赎回）

						1000
					934.3539	
				903.9732		1000
			891.3707		990.8789	
		925.5626		992.604		1000
	967.9062		1002.772		1004.778	
1004.811		1018.371		1012.588		1000
	1033.502		1022.584		1008.011	
		1032.937		1016.809		1000
			1026.068		1008.753	
				1017.694		1000
					1008.923	
						1000
现在	0.5 年	1 年	1.5 年	2 年	2.5 年	3 年

选择权价值树图：MAX(持有，执行)

						0
					0	
				0		0
			0		0	
		0		0		0
	9.185477		0		0	
17.36747		18.37095		0		0
	25.6096		0		0	
		32.93694		0		0
			0		0	
				0		0
					0	
						0
现在	0.5 年	1 年	1.5 年	2 年	2.5 年	3 年

存款的价值（考虑提前赎回）：不可赎回的存款价值－选择权价值＋利息

						1010.72
					945.0739	
				914.6932		1010.72
			902.0907		1001.599	
		936.2826		1003.324		1010.72
	969.4407		1013.492		1015.498	
987.4437		1010.72		1023.308		1010.72
	1018.613		1033.304		1018.731	
		1010.72		1027.529		1010.72
			1036.788		1019.473	
				1028.414		1010.72
					1019.643	
						1010.72

2．日进斗金”理财计划

除息后存款的价值（不考虑提前赎回）

						1000
					941.0838	
				917.1738		1000
			910.8892		998.016	
		952.3714		1006.842		1000
	1002.411		1024.179		1012.015	
1047.067		1047.066		1027.052		1000
	1069.506		1044.291		1015.271	
		1061.889		1031.319		1000
			1047.823		1016.019	
				1032.214		1000
					1016.19	
						1000
现在	0.5 年	1 年	1.5 年	2 年	2.5 年	3 年

选择权价值树图：MAX(持有，执行)

						0
					0	
				0		0
			3.179908		0	
		13.21894		6.842402		0
	29.68909		24.17857		12.01489	
49.27317		47.06599		27.05195		0
	69.50584		44.29109		15.2711	
		61.88879		31.31941		0
			47.82309		16.01859	
				32.21362		0
					16.18966	
						0
现在	0.5 年	1 年	1.5 年	2 年	2.5 年	3 年

存款的价值（考虑提前赎回）：不可赎回的存款价值－选择权价值＋利息

						1000
					941.0838	
				917.1738		1000
			907.7093		998.016	
		939.1525		1000		1000
	972.7221		1000		1000	
997.7941		1000		1000		1000
	1000		1000		1000	
		1000		1000		1000
			1000		1000	
				1000		1000
					1000	
						1000
现在	0.5 年	1 年	1.5 年	2 年	2.5 年	3 年

4.4.2 厦门建设银行“汇得利”的定价结果

由于“汇得利”每季度支付一次利息，而且期限为 5 年，所以利率树图直接用 EXCEL 估计会比较繁琐，所以我们选择了用 MATLAB 来估计。定价结果为 897.19，详细结果见附录。

4.4.3 厦门工商银行“汇财宝”的定价结果

利率树图也是用 MATLAB 估计的。定价结果也为 990.15，详细结果见

附录。

4.5 结论与建议

定价结果表明，以美国国债收益率加银行信用风险幅差为定价基础，银行发行的结构性存款的都略微低于其本金，其中建行的“汇得利”由于在利率上没有明显的优势而又赋予银行更多的提前结束存款的权力，所以理论价格和本金相差较大。这说明如果不存在对投资国外市场的限制，那么结构性存款相对于国际市场而言是不值得投资的。

但近期美国频频加息，2004 年 7 月美国一年期大额存款（一般为 1 万美元以上）利率为 1.06%，与之形成鲜明对比的是，目前国内美元一年期存款利率仅为 0.5625%，利差高达 0.5%左右，所以结构性存款对存在投资限制的国内投资者而言还是有吸引力的。实际上由于我们的银行在外汇结构存款的操作过程中是直接到国际市场上将存款转卖，使得结构性存款成为国内投资者绕过外汇管制获取美元存款收益的一种变通手段。

从另一个角度看，虽然银行将结构性存款直接转卖，但其风险等级显然高于美国国债的收益率，也就是说结构性存款实际上是有风险的。这样操作就会有很大问题，因为国内的存款人实际上将结构性存款视同无风险的存款，因为它有国家信用作为担保，那么结构性存款的风险实际上是由商业银行承担的，而国有商业银行的这种风险最终还是要转嫁到政府身上。所以，这里存在风险和收益不对称的情况，此时最容易出现道德风险，面对这种情况，我们的监管当局应该引起足够的重视。

就结构性存款而言，由于它本身是一种很有生命力的存款创新，我们不应该简单的禁止，而是应该从商业银行的风险控制入手，要求商业银行发行结构性存款必须进行风险控制。对此监管当局可以针对结构性存款制定专门的风险监控指标。

5 考虑期权后的久期、凸度和利率风险管理

无论是银行、证券公司还是保险公司，利率的波动都会导致其资产业务和负债业务在价值、收益和结构上的变化；这种变化在很多情况下对于企业的稳定经营是十分不利的。因此，规避利率风险就成为企业资产负债管理的一项重要内容。自“久期”(Duration)提出以来，久期已成为利率风险衡量和管理中最重要的概念之一，并且在过去 20 年的实践中被广泛应用于债券定价、免疫投资和资产负债管理等领域。同时随着金融产品日益多样化和复杂化，久期的概念也一直在不断地修正中。

5.1 久期（Duration）及其局限性

通常认为，债券的到期时间越长，债券的利率风险就越大。但是，这是一个很不可靠的方法。对于两个其他条件完全相同，唯独到期时间不同的债券，到期时间较长的债券，其利率风险未必就更大。人们也曾使用过债券的平均到期时间来衡量债券的利率风险，但效果仍然不好，因为它没有考虑到不同时间的现金流所包含的时间价值。为此，马考勒(F. R.Macaulay)于 1938 年提出了久期的概念。现在，即使是刚刚涉及足固定收益市场的从业者也对久期的概念十分熟悉。从业者几乎全部采用久期作为基本的、惟一的利率风险指标。

5.1.1 久期的定义

由于久期的概念最早是马考勒提出的，所以又称马考勒久期，简记为D[①]。所谓马考勒久期，是指未来一系列现金流的时间以现金流的现值为权

[①] Macaulay，F.R.，1938，“ Some Theoretic Problems Suggested by the Movement of Interest Rates，Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1856”，National Bureau of Economic Research ，Columbia，New York.

数所计算的加权平均到期时间。马考勒久期的计算公式为

$$D=\frac{\sum_{t=1}^{T}PV(c_t)\times t}{P_0}=\sum_{t=1}^{T}[\frac{PV(c_t)}{P_0}\times t]$$

其中，D 是马考勒久期，P_0 是债券当前的市场价格，$PV(c_t)$是债券未来第 t 期现金流（利息或本金）的现值，T 是债券的到期时间。需要指出的是在债券发行时以及发行后，都可以计算马考勒久期。计算发行时的马考勒久期，T（到期时间）等于债券的期限；计算发行后的马考勒久期，T（到期时间）小于债券的期限。

5.1.2 马考勒久期的本质含义以及修正久期的定义

计算久期的主要目的之一就是要找出久期、到期收益率与债券价格三者之间的关系。

假设利率期限结构是平的，现在是 0 时刻，债券持有者在 t_i时刻收到的支付为 c_i（1≤i≤n），则债券价格 P 和连续复利到期收益率 y' 的关系为：

$$P=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{-y't_i}$$

由此可得：

$$\frac{\partial P}{\partial y'}=-\sum_{i=1}^{n}c_i t_i e^{-y't_i}$$

而久期的定义可以相应改写为：

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i c_i e^{-y't_i}}{P}=\sum_{i=1}^{n}t_i[\frac{c_i e^{-y't_i}}{P}]$$

代入前式可得：

$$\frac{\partial P}{\partial y'}=-PD$$

整理得：

$$\frac{\partial P}{P}=-D\partial y'$$

上式说明，债券价格的变动比例等于久期乘到期收益率微小变动量的负数，即久期衡量了债券价格的利率风险。∂y 表示收益率曲线的微小平移。由此我们可以得出久期的另外一个定义：债券价格对收益率的导数的相反数和债券价格的积。应该说这个概念更能体现久期的本质。实际上，久期不仅仅可以用来衡量债券的利率风险，对于任意的金融产品，只要我们能够估计其现金流，就可以计算其久期，也就可以用久期来衡量该证券的利率风险。对久期的另一种更直观的解释是它代表了价格/收益率曲线的斜率。

上述分析是在到期收益率为连续复利收益率的基础上得出的。如果到期收益率为一年计一次复利的收益率（y），则：

$$\frac{\partial P}{P}=-\frac{D\partial y}{1+y}$$

这是因为根据连续复利利率（ y' ）与一年计一次复利利率（y）之间的关系，我们有

$$y' = \ln(1+\mathrm{y})$$
$$\mathrm{dy}' = \frac{\mathrm{dy}}{1+\mathrm{y}}$$

为了方便起见，当收益率采用一年计一次复利的形式时，人们常用修正的久期（Modified Duration，用 D^*表示）来代替久期。修正的久期定义为：

$$D^* = \frac{D}{1+y}$$

此时

$$\frac{\partial P}{P} = -D^* \partial y$$

上式表明，对于给定的收益率变动幅度，修正的久期越大，债券价格的波动率越大[①]。这样我们就可以用久期近似估计收益率变动与价格变动率关系之间的关系：

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D^* \Delta y$$

5.1.3 马考勒久期的局限性

虽然马考勒久期概念的提出是一个突破，但马考勒久期用于利率风险管理仍然有很大的局限性：

首先，利用马考勒久期衡量利率风险的准确性受到利率变化幅度的影响，只有在利率变化较小时马考勒久期才能比较准确地反映利率变化对债券价格的影响，利率变化越大，马考勒久期对债券利率风险的反映越不准

[①]对于一年计 m 次复利的收益率而言，$\frac{\partial P}{P} = -\frac{D\partial y}{1+y/m}$，$D^* = \frac{D}{1+y/m}$。

确。造成这一现象的主要原因在于利率与债券价格的关系不是线性的，马考勤久期只是该关系的线性关联部分。因此，要更准确地反映债券的利率风险，不仅要看其马考勤久期，而且还要考虑其利率－债券价格关系曲线的凸度（Convexity）。凸度是债券价格对利率的二阶导数和债券价格的比值，即

$$C = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

凸性弥补了马考勤久期假设的债券价格的变化与利率的变化成线性比例关系的不合理性，反映了债券的利率弹性（马考勤久期自身）也会随利率变化而变化的事实，它与马考勤久期的结合使用能更准确地反映利率风险状况，尤其是在利率变化较大时债券价格的变化。

其次，用马考勤久期衡量利率风险并没有考虑一些债券可能附带或隐含的期权性质，对于这样的债券，马考勤久期难以衡量其利率风险。如可赎回债券（Callable Bond），当其市场价格由于利率的下降而上升到约定的赎回价格时，发行人将很可能将债券赎回，债券的期限就会由几年甚至几十年缩短为几天，马考勤久期因而会变得没有意义。弥补这一缺陷的办法是使用实际久期（Effective Duration），实际久期被定义为利率水平发生一定变化下债券价格变动的百分比。

$$D_{eff} = -\frac{1}{P}\frac{\Delta P}{\Delta y}$$

可见，实际久期是债券价格利率弹性的直接度量。因此，不同于久期和修正久期，由于债券的期权特性，某些债券的实际久期可以很大，也可以为负。

第三，利用马考勤久期衡量利率风险必须满足两个前提条件，一是利率期限结构是一条水平线，即在某一时点，到期日不同的债券的收益率水平是相同的；二是不同期限的收益率的变化只是曲线的平移，即相对于前期收益率水平而言，各种期限的债券的收益率的变化幅度也是相同的。我

们可以从马考勒久期的定义中看出上述两点：

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i c_i e^{-y't_i}}{P}=\sum_{i=1}^{n}t_i[\frac{c_i e^{-y't_i}}{P}]$$

在马考勒久期的定义中，所有现金流是用相同的利率贴现的，这说明它假设利率期限结构是平的。此外，让马考勒久期发挥作用的一个重要等式是：

$$\frac{\partial P}{P}=-D\partial y'$$

这个等式成立的前提条件是，利率期限结构发生变动的时候是平行移动的，曲线本身的形状不会改变。

不满足这两个前提条件的马考勒久期仍很难真正达到准确衡量利率风险的目的。遗憾的是，现实中的利率期限结构及其变化很难满足这两个条件，这不能不说是马考勒久期的一个很大的局限性。正是基于这个原因，不少学者对马考勒久期的概念做了进一步修正，即考虑不同利率期限结构下的久期。

5.2 凸度(Convexity)

久期概念的本质是证券价格变化对利率变化的一阶泰勒展开， 只有当利率变化较小时，这种线性近似才成立。而当利率波动幅度较大时，基于久期的风险测量就会产生较大的误差，为此一些学者提出了基于凸度的利率风险测量方法作为补充。

5.2.1 凸度的定义

债券的凸度是指债券价格变动与收益率变动关系曲线的曲度。久期实际上等于债券价格对收益率一阶导数的绝对值除以债券价格。类似地我们可以把债券的凸度（C）定义为债券价格对收益率二阶导数除以价格，即：

$$C = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

实际上，债券价格变动和收益率变动之间的关系并不是线性关系，而是非线性关系。如果我们只用久期来估计收益率变动与价格变动之间的关系，收益率上升或下跌一个固定的幅度时，不同债券价格下跌或上升的幅度是一样的，这显然与事实不符。

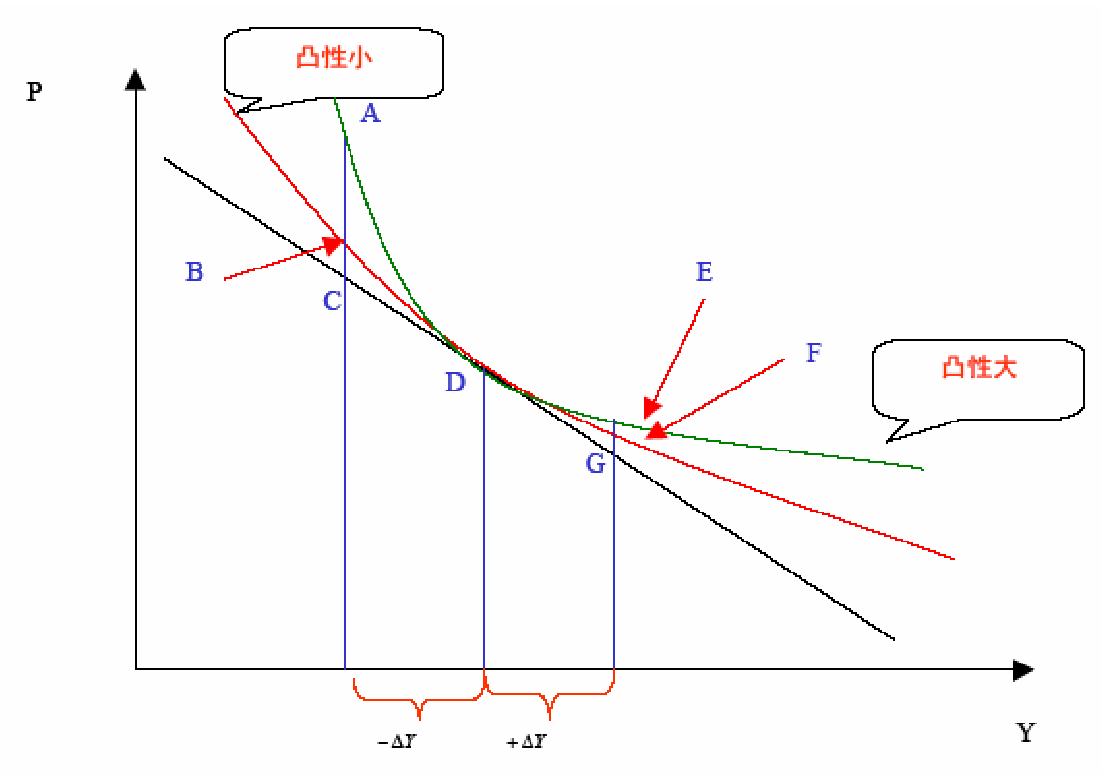


图 5　债券价格敏感度与凸度的关系

如图所示，两个债券的收益率与价格的关系为红线与绿线，内侧的曲线（绿线）为凸性大的曲线，外侧的曲线为凸性小的曲线(红线)。在收益率增加相同单位时，凸性大的债券价格减少幅度较小；在收益率减少相同单位时，凸性大的债券价格增加幅度较大。因此，在久期相同的情况下，凸性大的债券其风险较小。

此外从图上可以看出，当收益率下降时，价格的实际上升率高于用久期计算出来的近似值，而且凸度越大，实际上升率越高；而当收益率上升时，价格的实际下跌比率却小于用久期计算出来的近似值，且凸度越大，价格的实际下跌比率越小。这说明：（1）当收益率变动幅度较大时，用久期近似计算的价格变动率就不准确，需要考虑凸度调整；（2）在其他条件相同时，人们应该偏好凸度大的债券。

考虑了凸度问题后，收益率变动幅度与价格变动率之间的关系可以重新写为：

$$\frac{\partial P}{P} = -D^{*}\partial y + \frac{1}{2}C(\partial y)^{2}$$

当收益率变动幅度不太大时，收益率变动幅度与价格变动率之间的关系就可以近似表示为：

$$\frac{\Delta P}{P} = -D^{*}\Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^{2}$$

5.2.2 正凸度和负凸度

正的凸度意味着赢多输少，这当然是大家所想得到的。不过，如果市场是有效率的，投资者要获得正的凸度就需要支付一定的代价。相反承担负的凸度就可以获得更高的回报。即如果其它条件相同，具有负凸度的证券即使不总是比正凸度的证券有更高的收益，也通常是有更高的收益。因此，凸度成为一种结构投资策略。通常，如果投资者预期利率相对稳定、凸度价格比较高，他将倾向于投资高收益、负凸度的债券。另一方面，如果投资者预期利率有较大波动、凸度的市场价格相对较低，那么尽管凸度较高的债券的收益比较低，但它们仍然会被选择成为投资组合的。

一部高性能的法拉利可以被认为是负凸度债券的对等物，带有四个轮的吉普则可以被认为是正凸度的债券对等物。如果前面的路平坦的话，法拉利会比吉普更快地将你带到目的地；类似地，在市场平稳的情况下，一

种高收益的负凸度的债券也会很快地带来预想的回报。不过如果前面的道路预计是比较颠簸的话，大多数人会同意选择吉普车，而放弃高速度的法拉利，在预期利率上下波动较大，牺牲收益换取债券价格的稳定性似乎是稳健的选择。

上述讨论从一个侧面说明的凸度的符合在投资决策中有重要地位，那么凸度的符号取决于什么呢，根据微分学的基本原理，我们可以从图形直观地判断出凸度的符号，如果曲线是凸向原点的，那么凸度是负的，如果曲线是凹向原点的，那么凸度是正的。普通债券的价格－收益率曲线是凸向原点的，所以普通债券的凸度为正。

5.2.3 久期和凸度的内在联系

实际上，从前面的介绍过程中我们已经可以感觉到久期和凸度有一定的内在联系。如果我们采用连续复利，并将债券价格的变化对利率的变化进行泰勒展开

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\left(\Delta y\right)+\frac{1}{2!P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\left(\Delta y\right)^2+\cdots$$

那么久期刚好就是展开的一阶偏导数除以－P ， 即

$$D=-\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial y}$$

而凸度则为二阶偏导数除以 P ，即

$$C=\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

从上面两式可以看出，久期反映了债券价格与利率之间的线性关系，而凸度则反映了债券价格与利率的关系曲线之间的曲率（图形的弯曲程度)，即久期描述利率波动时价格的稳定程度，而凸度描述久期的稳定程度。二者的结合使用使我们能以二阶无穷小的精度把握债券价格与利率之间的关系，基本上满足了对利率风险控制的需要。如果两种债券的现值与期限

相同，则投资者需要考虑它们的久期与凸度。在现值与期限相同的情况下，投资者会选择久期较短的债券；如果久期也相同，投资者会选择凸度较大的债券，因为债券价格和收益率的关系曲线是凸向原点的，所以债券的凸度为正。更重要的一点是无论利率上升或下跌，正的凸度会导致债券价值上升。

对于久期和凸度的关系，金融界与物理界存在一个有趣的类比。作为久期对于收益变化的导数（或价格对于收益变化的二阶导数），凸度正好类比于加速度（加速度是速度对于时间的二阶导数）。

5.3 实际久期（Effective Duration）和实际凸度（Effective Convexity）

5.3.1 内嵌期权对久期的影响

对于不含内嵌期权的债券而言，其价格－收益率曲线是凸向原点的，所以凸度总是正的（略大于 0）。即当利率下降时，债券价格将以加速度上升；当利率上升时，债券价格将以减速度下降。在这种情况下，无论利率是上升还是下降，对投资者都有好处。

但这个结论不能直接用于含权债券，例如对于可赎回债券，当市场利率下降时，债券很可能被提前赎回，此时债券价格并不会向普通债券那样加速上升，如果直接用久期度量此类债券的利率风险，会得到歪曲的结果。由于嵌入期权，它可能使得可赎回债券在低收益率时呈现出负凸度，而在高收益率时呈现出正凸度。负凸度的涵义与正凸度截然不同。正凸度表明，当市场利率下降时，债券价格将以加速度上升；当市场利率上升时，债券价格将以减速度下降，因此，正凸度对投资者是有利的。而负凸度表明，当市场利率下降时，债券价格将以减速度上升，当市场利率上升时，债券价格将以加速度下降，因此，负凸度对投资者而言是不利的。所以说负凸

度会放大投资者承担的利率风险，因此，在度量可赎回债券的利率风险时必须考虑到久期和凸度的上述特性。

图 6 描述了可赎回债券的价格和利率之间的关系。预期市场利率持续下跌的时候，债券发行人会赎回债券，那么一定存在某一利率水平 y'，当利率低于 y' 时，可赎回债券的价格－利率曲线偏离了不含权债券的价格－利率曲线。简单地说就是由于赎回权地存在使得利率低于 y' 时价格的上涨是有限的。可赎回债券价格－利率曲线在 y' 以下的部分就是负凸度。

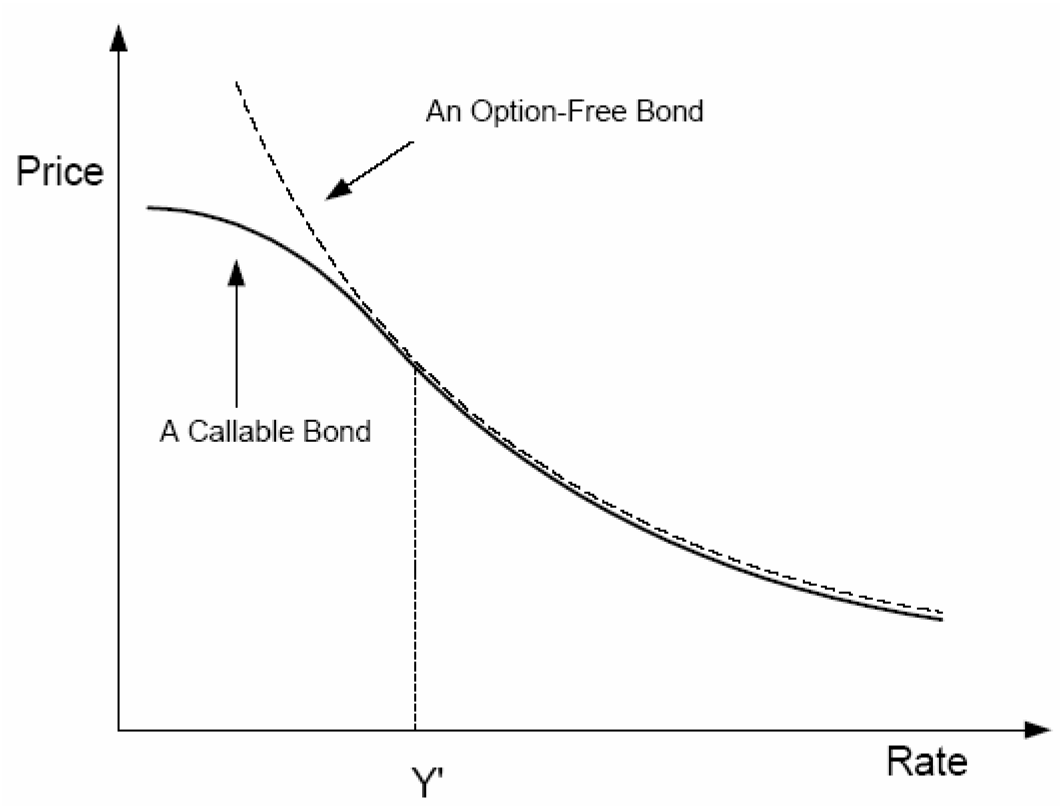


图 6　可赎回债券的凸度

5.3.2 实际久期（Effective Duration）与期权调整利差（Option adjusted Spread）

实际久期是指利率水平发生特定变化情况下，证券价格变动的百分比。它充分考虑了内嵌期权对证券市场价格的影响， 其计算公式为

$$D_{eff} = \frac{P_{-} - P_{+}}{P_0\left(y_{+} - y_{-}\right)}$$

D_{eff} 为证券的实际久期； P_0 为债券的初始市场价格；P_{-}、P_0 分别为利率上升和下降 X 个基本点时债券的市场价格； y_{-}、y_{+} 分别为初始收益率减去和加上 X 个基本点，而初始收益率是指证券的初始到期收益率，它是由无风险市场利率加上期权调整利差（OAS）构成的。

所谓期权调整利差（OAS）是指剔除证券中的内嵌期权的影响以后的利差（Fabozzi，2001）。以国际金融市场中最常见的抵押支持证券为例， 抵押借款人享有可随市场利率波动而提前偿还本金且不受任何惩罚的内嵌期权。如当市场利率下降时， 借款人往往会提前偿付本金，则证券持有人将会由于收到的本金的再投资收益率降低而遭受损失，剔除市场对此做出的补偿以后的利差就是期权调整利差（OAS）。它是实际久期能够测量内嵌期权风险的基础，因此实际久期又称为期权调整久期。

5.3.3 期权调整利差（OAS）与实际久期的计算

如何计算内嵌期权的久期是一个艰难的任务，但是，一些基础性的工作已经开始。储蓄机构监管办公室（1994）提出利用净现值模型和蒙特 • 卡罗模拟方法去估算对资产价格敏感性有显著影响的内嵌期权资产的价值。Fabozzi 和 Modigliani（1992）使用蒙特卡罗模型去估算抵押支持证券（MBS）的期权调整利差（OAS）。Anderson、Barber 和 Chang(1993)，DeRosa、Goodma 和 Zazzarino（1993）估计了抵押支持证券的修正久期。Carlson（1993）和 Lawler（1987）考察了抵押支持证券的封闭式公式。Bierwag(1987)对 1986

年 1~5 月利率急剧下跌时期的可赎回债券进行了检验。他们发现在利率下跌时期，可赎回债券和抵押支持债券的行为是相似的。其间，那些没有准确考虑久期变化对可赎回债券的效应的投资经理们在其资产组合中遭受了巨大的损失，损失程度取决于他们对利率变化预测的准确程度。

显然，测量内嵌期权金融工具的利率风险的核心在于期权调整利差（OAS）的计算。

1．期权调整利差（OAS）的计算

计算期权调整利差（OAS）时，假设市场是有效的(即市场价格已反映了内嵌期权风险的存在)。首先计算证券的未来现金流(此现金流跟未来利率和提前偿付模型有关，所以已经考虑的内嵌期权的价值)，并将这些现金流用无风险利率贴现加总得到证券的一个理论价格；将该理论价格与市场价格比较， 如不相等(实际上很少相等)，则将无风险利率加上一个固定值(如 5 个基本点) ，再计算证券的理论价格，然后再与市场价格相比。如此重复上述工作，直到理论价格与市场价格相一致，用此时得到的证券贴现率(即到期收益率)减去无风险率就是期权调整利差（OAS）。

2．运用二叉树模型计算实际久期

使用二叉树模型计算久期的过程如下：

P_+ 的计算过程：

（1）估计利率的二叉树动态树图，计算证券的期权调整利差（OAS）；

（2）将利率期限结构上升少量固定的基点，在此基础上重新估计利率的二叉树图；

（3）给二叉树图上的每个短期利率加上期权调整利差（OAS）得到“调整后的二叉树”；

（4）使用“调整后的二叉树”计算 P_+ 。

P_- 的计算方法相同，只不过是将利率下降少量固定的基点。这里要注意的是上面的计算方法隐含假设了各种期限的利率是按相同点数变化的，

这个假设就是收益率曲线平移的假设（Paralled Yield Curve Shift Assumption）

3．用模拟技术计算实际久期

对于抵押支持证券，在计算期权调整利差（OAS）时， 要多次计算抵押支持证券的理论价格。但由于抵押支持证券的预期现金流是不确定的，对利率路径具有依赖性， 因此无法采用二叉树的计算方法， 而往往只能采用蒙特卡罗（Monte Carlo）模拟方法。在模拟过程中， 需要考虑利率的变化过程(用利率期限结构模型描述) 和提前偿付问题。

（1）蒙特卡罗模拟

蒙特卡罗模拟的实质是利用随机抽样的样本均值来近似代替随机分布的总体期望值，从而得到对随机分布数学期望实际估计的数值分析方法。根据鞅定价理论，金融衍生证券的价格是其预期现金流的按无风险利率的贴现值，其中期望值是针对风险中性概率测度而言的。根据概率统计和随机分析理论，这些期望值也可以表示为一特定区域上的积分形式，蒙特卡罗模拟正是通过模拟这些数学期望或积分来估计金融衍生证券价格的。具体到抵押支持证券的模拟定价，标的变量就是市场利率，因此要根据一种利率期限结构模型模拟出 n 条随机利率路径，再根据证券自身具有的提前偿付的特性计算出每条路径上的现金流并贴现，对 n 条路径上的贴现值平均后就得到证券的理论价格。

（2）利率的期限结构

在蒙特卡罗模拟中使用的是随机利率模型，它描述了风险中性世界中短期利率随时间推移的可能变化过程。

（3）提前偿付模型

影响抵押支持证券提前偿付本金的因素很多，描述提前偿付的模型也很多，每一种动态模型都反映了量化非利率因素的努力，所有模型都强调了再融资的利率动因。

（4）期权调整利差（OAS）和实际久期的计算步骤

利用蒙特卡罗模拟计算期权调整利差（OAS）和实际久期的步骤可归纳为：

a. 从附息国库券收益率曲线计算零息票收益率曲线；

b. 选择利率期限结构的数学模型；

c. 运用蒙特卡罗模拟模拟 n 条利率路径；

d. 结合提前偿付模型计算每一条利率路径上的现金流并贴现；

e. 计算证券的理论价格及其期权调整利差（OAS）；

f. 将得到的期权调整利差（OAS）加到初始零息票利率上得到新的贴现率；

g. 将新的贴现率分别上移和下移固定的基本点(如 100 个基本点) ，计算证券在移动后贴现率下的新价格；

h. 计算实际久期。

类似的，我们可以定义实际凸度（Effective Convexity）为：

$$C_{eff}=\frac{\left(P_{+}-2P_{0}+P_{-}\right)}{\left(y_{+}-y_{-}\right)^{2}P_{0}}$$

实际凸度的计算方法同实际久期。

5.4 非平坦利率期限结构和收益率曲线非平行移动下的久期模型

由马考勒久期的定义可知， 马考勒久期的概念存在一个严重的缺陷：用于所有未来现金流的贴现率是固定的。这一假设限制了其作为债券利率风险度量的有效性。下面给出马考勒久期的两种有效修改形式。

5.4.1 考虑随机性：不同利率期限结构下的久期模型——随机久期

1．Vasicek 模型下的久期模型

在 Vasicek 利率期限结构模型（Vasicek，1977）中，假设利率 r(t)服从一个均值回归的随机过程

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dz$$

给出零息债券的边界条件，则该债券的价格 P(r ，t ，T) 到封闭定价公式为

$$P(r,T) = A(t)e^{-r(t)B(\tau)}$$

其中 $A(\tau) = e^{\phi_1\left(1-k\tau-e^{-k\tau}\right)-\phi_2\left(1-k\tau-e^{-k\tau}\right)^2}$；$B(\tau) = \frac{1}{k}\left(1-e^{-k\tau}\right)$；$\phi_1 = \frac{km-q\sigma}{k^2} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{k^3}$；

$\phi_2 = \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{k^3}$。其中 τ 距离到期日的时间，即 $\tau = T - t$。

这样，如果假设利率的任何变化均可由即时利率 r(t)来追踪，就可以构造出一个可以识别利率变动的瞬时因素 F 来定义久期模型

$$D = \frac{-1}{P(r,c,t,T)}\frac{dP(r,c,t,T)}{dF} = \frac{-1}{P(r,c,t,T)}\sum_{l=1}^{N} CF(\tau_l)\frac{dP(r,c,t,T)}{dF}$$

其中 $P(r,c,t,T) = \sum_{t=1}^{N} CF(\tau_l)P(r,\tau_l)$，$CF(\tau_l)$是第 l 次现金流。

2．CIR 模型下的久期模型

Cox 和 Ross(1979）开创性地在 CIR 利率期限结构模型下来讨论久期概念. 他们假设连续名义即时利率 d r 服从如下过程

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dZ$$

在这样的利率期限结构下，所得到的随机久期模型为

$$D = G^{-1}\left[\frac{\sum C(t)P(t)G(t)}{C(t)P(t)}\right]$$

其　中　$P(t) = F(t)\exp\left[-rG(t)\right]$；$G^{-1}(x) = \frac{2}{r}\coth^{-1}\left(\frac{2}{rx} + \frac{\pi-\beta}{\gamma}\right)$；

$F(t) = \left[\frac{2\gamma\exp(\gamma+\beta-\pi)/2}{(\gamma+\beta-\pi)\left[\exp(\gamma t)-1\right]+2\gamma}\right]^{2\beta u/\delta^2}$，$G(t) = \frac{2}{\left[\beta-\pi+\gamma\coth(\gamma t/2)\right]}$；

$\gamma=\left[\left(\beta-\pi\right)^2+2\delta^2\right]^{1/2}$。$\pi$ 为流动性溢价。

3．HJM 模型下的久期模型

Fruhwirth(2002)和 Thurston（1995）在单因素 HJM 利率期限结构框架下推导出久期模型的基础上，利用零息票收益率作为状态变量取代传统久期度量方法，用即时利率作状态变量，得出了 HJM 框架下的一般的久期模型。

在 HJM 模型中，定义到期日为 T 的债券在时间 t 的即时远期利率为

$$f\left(t,T\right)=-\frac{\partial\log\left[P\left(t,T\right)\right]}{\partial T}$$

其中 f (t ， T) 代表即时短期利率。HJM 框架下的久期为

$$D=-\frac{\dfrac{\partial B\left(t,T\right)}{\partial y\left(t,t+m\right)}}{B\left(t,T\right)}=\frac{\sum_{t=1}^{n}C_iP\left(t,T_i\right)g\left(t,T_i\right)m}{B\left(t,T\right)}$$

4．Moreno 两因素模型下的久期模型

Moreno(2002，2003)在两因素利率期限结构下， 假设债券价格仅取决于长期利率 L，以及长期利率与短期利率之间的利差 S 这两个状态变量，从而推导出了一个久期模型。模型中状态变量 L 和 s 服从随机微分方程

$$\begin{cases}dS=\beta_1\left(S,L\right)dt+\delta_1\left(S,L\right)dw_1\\dL=\beta_2\left(S,L\right)dt+\delta_2\left(S,L\right)dw_2\end{cases}$$

那么附息债券的久期为

$$D_S=\frac{1}{P^*\left(t,T\right)}=\sum_{t=1}^{n}C_i\left(t_i-t\right)P\left(t,t_i\right)\times\frac{\partial r\left(t,t_i\right)}{\partial S}$$

$$D_S=\frac{1}{P^*\left(t,T\right)}=\sum_{t=1}^{n}C_i\left(t_i-t\right)P\left(t,t_i\right)\times\frac{\partial r\left(t,t_i\right)}{\partial L}$$

对于零息债券有

$$D_S = \frac{1}{P(t,T)} = (T-t)P(t,T)\frac{\partial r(t,T)}{\partial S} = (T-1)\frac{\partial r(t,T)}{\partial S}$$

$$D_S = \frac{1}{P(t,T)} = (T-t)P(t,T)\frac{\partial r(t,T)}{\partial L} = (T-1)\frac{\partial r(t,T)}{\partial L}$$

由于考虑了利率的随机性， 使我们对利率的预测更加接近实际，提高了久期的准确性，从而更适于对短期债券利率敏感性进行度量。

但是以市场可以观察到的付息债券来做久期分析，随机久期的实证结果并未优于马考勒久期。究其原因，Vasicek 模型和 CIR 模型均假设瞬时利率服从均值回归过程，故在长期时，利率水准将接近一个固定水准，所以 Vasicek 和 CIR 的模型比较无法捕捉长期利率的变化。

5.4.2 关键利率久期

关键利率久期是一种探讨利率曲线非平行移动条件下的久期的尝试。收益率曲线移动的时候带来的风险我们有时称之为收益率曲线风险（Yield Curve Risk），关键利率久期就是用来测量收益率曲线风险的一种方法。

Donald Chambers 和 Willard Careton 于 1988 年首先提出关键利率久期的概念[①]，他们当时称之为“久期向量”。Robert Reitano 在一系列论文中也提出了类似的方法，并称之为“部分久期”[②]。这种方法最常见的形式是 1992 年 Thomas Ho 提出的方法[③]。

如果我们把对特定即期利率变化的价格敏感性称为久期，那么对应利率期限结构上的每一点都有一个久期，所以债券不是只有一个久期，而是有一个久期向量，如果所有的利率都变化相同的基点，价格的总变化就是利率平行移动时债券或组合的久期。任何类型的收益率曲线移动带来的影响都可以通过关键利率久期体现出来。例如收益率曲线平移可以通过把所

① 参见 Donald Chambers and Willard Carleton, 1988, “A Generalized Approach to Duration”, Research in Finance. 7.

② 参见 Robert R. Reitano,1990, “Non-Parallel Yield Curve Shifts and Durational Leverage,” Journal of Portfolio Management(Summer), pp. 62-67.

③ 参见 Thomas S. Y. Ho, 1992,“Key Rate Durations: Measures of Interest Rate Risk,” The Journal of Fixed Income(Septemver), pp.29-44.

有关键利率变化相同的基点求得。而非平行的收益率曲线移动可以不同点数的变化体现出来。

还有一些学者从理论上探讨了收益率曲线非平行移动的情况下久期的修正方法，我们将其列了一个表格和马考勒久期进行对比：

表格 1　收益率曲线非平行移动的情况下久期的修正

提出者	模型
Macaulay(1938)	$D=\frac{1}{P}\int_0^T C(t)t\exp(-r(t)t)dt$
Bierwag(1977)	$D=\frac{1}{P}\int_0^T C(t)tr(t)\exp(-r(t)t)dt$
	$D=\frac{1}{P}\int_0^T C(t)t^2 r(t)\exp(-r(t)t)dt$
Cooper(1977)	$D=\frac{1}{P}\int_0^T C(t)t\ln(t)r(t)\exp(-r(t)t)dt$
	$D=\frac{1}{P}\int_0^T C(t)t^2\exp(-r(t)t)dt$
Khang(1979)	$D=\left(\exp\left(\frac{1}{P}\right)\int_0^T C(t)\ln(1+\alpha t)r(t)\exp(-r(t)t)dt\right)-\frac{1}{\alpha}$

实际上，根据前面的思想，我们在实际操作过程中，可以从债券市场数据中剥离出任意期限的利率，所以，对不同期限的现金流可以用不同的收益率来贴现，这就已经考虑了收益率曲线非平坦的问题，至于收益率曲线的非平移问题，则需要进一步的处理。

6　含权债券利率风险的实证分析

在前一章我们已经讨论过了对于含权的债券，我们应该用实际久期和实际凸度来衡量它们的利率风险。这里我们将对可赎回债券和可回售债券的利率风险衡量做进一步的理论和实证分析。

6.1 可赎回债券的利率风险

可赎回债券赋予发行人提前赎回债券的权力，在市场利率下降，债券价格上升的时候，发行人会选择赎回债券来降低融资成本。所以当利率下降，债券价格上升到一定幅度的时候，债券价格不会继续上升，使债券凸度下降甚至出现负的凸度，不过此时债券的久期仍然大于或等于 0，因为债券价格不可能往回跌。

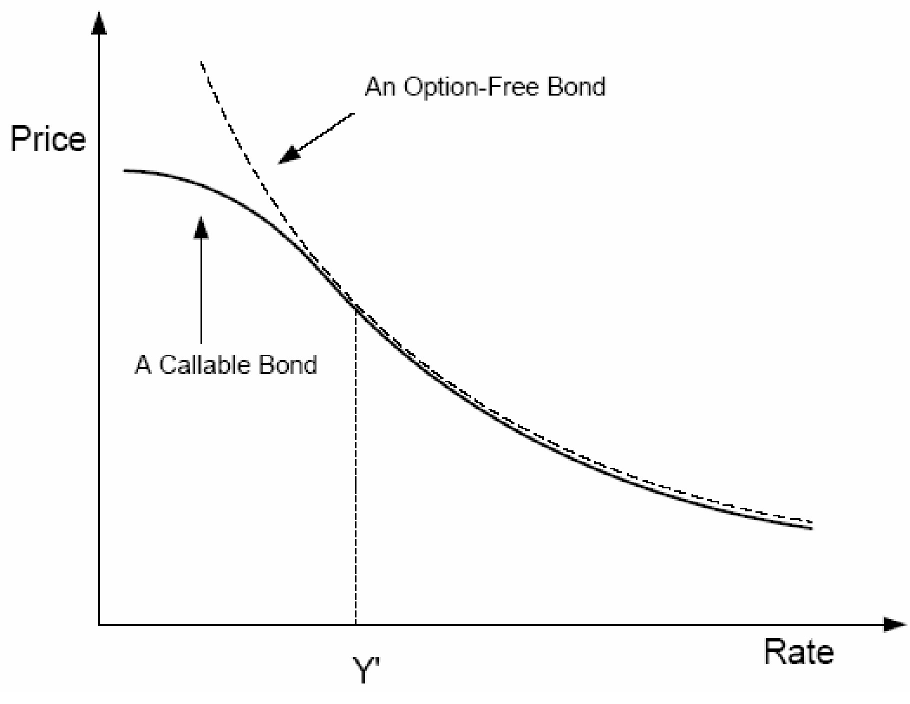


图 7　可赎回债券的价格与利率的关系

6.2 可回售债券的利率风险

可回售债券赋予投资者提前回售债券的权力，在市场利率上升，债券价格下跌的时候，投资者会选择回售债券来避免损失。所以当利率上升，债券价格下降到一定幅度的时候，债券价格不会继续下降，使债券凸度上升，不过此时债券的久期仍然大于或等于 0，因为债券价格不可能往回涨。

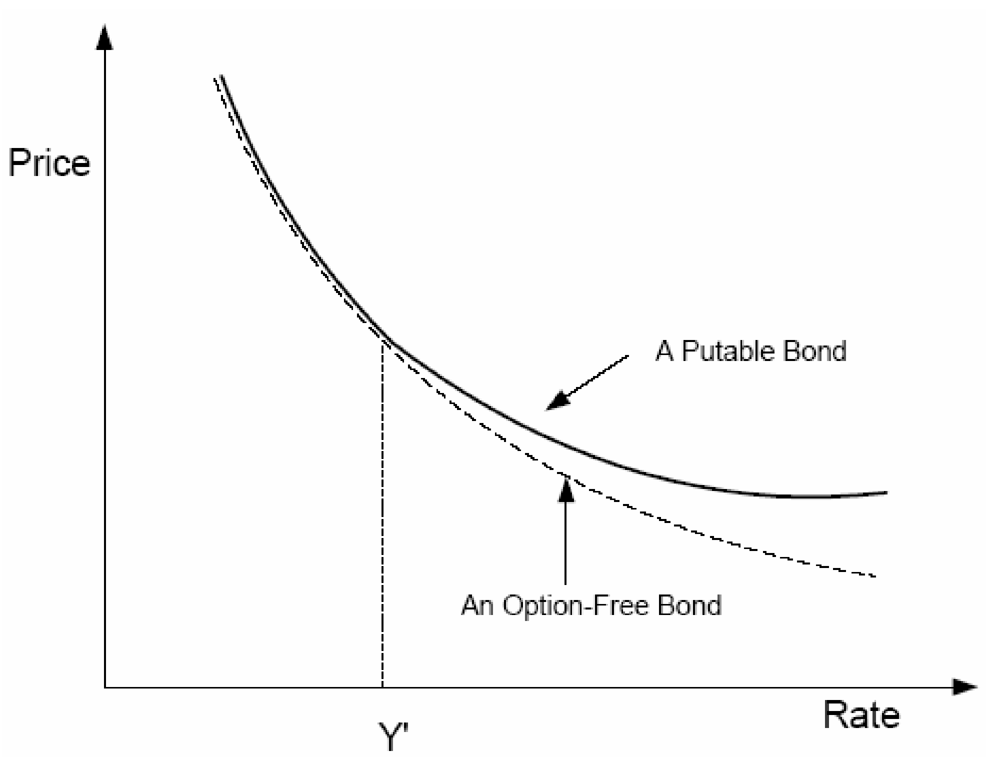


图 8　可回售债券的价格与利率的关系

6.3 我国可赎回（可回售）债券利率风险的模拟检验和实证分析

1．研究设计

我们使用二叉树模型对国家开发银行发行的可赎回金融债和可回售金

融债进行实证分析，实际久期和实际凸度的计算公式分别为

$$D_{eff}=\frac{P_{-}-P_{+}}{P_0\left(y_{+}-y_{-}\right)},C_{eff}=\frac{\left(P_{+}-2P_0+P_{-}\right)}{\left(y_{+}-y_{-}\right)^2P_0}$$

D_{eff} 为证券的实际久期，C_{eff} 为实际凸度； P_0 为债券的初始市场价格；P_{-} 、P_0 分别为利率上升和下降 X 个基本点时债券的市场价格； y_{-} 、y_{+} 分别为初始收益率减去和加上 X 个基本点， 而初始收益率是指证券的初始到期收益率，它是由无风险市场利率加上期权调整利差（OAS）构成的。

所谓期权调整利差（OAS）是指剔除证券中的内嵌期权的影响以后的利差。以国际金融市场中最常见的抵押支持证券为例， 抵押借款人享有可随市场利率波动而提前偿还本金且不受任何惩罚的内嵌期权。如当市场利率下降时， 借款人往往会提前偿付本金，则证券持有人将会由于收到的本金的再投资收益率降低而遭受损失，剔除市场对此做出的补偿以后的利差就是期权调整利差（OAS）。它是实际久期能够测量内嵌期权风险的基础，因此实际久期又称为期权调整久期。

实际久期的计算过程如下：

P_{+} 的计算过程：

（1）估计利率的二叉树动态树图，计算证券的期权调整利差（OAS）；

（2）将利率期限结构上升少量固定的基点，在此基础上重新估计利率的二叉树图；

（3）给二叉树图上的每个短期利率加上期权调整利差（OAS）得到“调整后的二叉树”；

（4）使用“调整后的二叉树”计算 P_{+} 。

P_{-} 的计算方法相同，只不过是将利率下降少量固定的基点。

2．模拟检验

为了避免实际利率数据偏差的影响，我们先用模拟的利率二叉树图对可赎回债券和可回售债券分别进行模拟检验。我们假设利率的对数服从二

叉树过程。假设可赎回债券的期限为 10 年，发行人（或投资人）有权在第 5 年的付息日按面值 100 赎回（回售）债券，检验结果如下：

表 11　可赎回债券的实际久期和实际凸度的模拟检验

利率树图											
（模拟）											年
1.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.02	1.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
1.02	1.02	1.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.00
1.02	1.02	1.03	1.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.00
1.02	1.02	1.02	1.03	1.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.00
1.01	1.02	1.02	1.03	1.04	1.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5.00
1.01	1.02	1.02	1.03	1.03	1.04	1.05	0.00	0.00	0.00	0.00	6.00
1.01	1.02	1.02	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	0.00	0.00	0.00	7.00
1.01	1.01	1.02	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	0.00	0.00	8.00
1.01	1.01	1.02	1.02	1.03	1.03	1.04	1.05	1.07	1.09	0.00	9.00
											10.00
普通债券除息											
（ex-coupon）											年
价格树											
101.61											0.00
103.38	98.56										1.00
104.62	100.62	95.80									2.00
105.38	102.12	98.16	93.40								3.00
105.67	103.09	99.93	96.08	91.45							4.00
105.55	103.57	101.13	98.13	94.48	90.08						5.00
105.04	103.60	101.80	99.57	96.83	93.49	89.45					6.00
104.20	103.21	101.98	100.43	98.52	96.16	93.27	89.76				7.00
103.05	102.46	101.70	100.76	99.58	98.11	96.29	94.05	91.31			8.00
101.64	101.37	101.03	100.60	100.06	99.38	98.53	97.46	96.14	94.52		9.00
100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	10.00
赎回权价值											
树：MAX（持											年
有，执行）											
0.99											0.00
1.55	0.46										1.00
2.34	0.82	0.13									2.00
3.35	1.40	0.27	0.00								3.00
4.50	2.31	0.55	0.00	0.00							4.00
5.55	3.57	1.13	0.00	0.00	0.00						5.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00					6.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00				7.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			8.00

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		9.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	10.00
可提前赎回的债券除息（ex-coupon）价格树											年
100.62											0.00
101.83	98.10										1.00
102.28	99.80	95.67									2.00
102.03	100.72	97.89	93.40								3.00
101.18	100.78	99.38	96.08	91.45							4.00
100.00	100.00	100.00	98.13	94.48	90.08						5.00
105.04	103.60	101.80	99.57	96.83	93.49	89.45					6.00
104.20	103.21	101.98	100.43	98.52	96.16	93.27	89.76				7.00
103.05	102.46	101.70	100.76	99.58	98.11	96.29	94.05	91.31			8.00
101.64	101.37	101.03	100.60	100.06	99.38	98.53	97.46	96.14	94.52		9.00
100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	10.00
普通债券的久期											年
											0.00
9.36											1.00
8.31	8.18										2.00
7.24	7.15	7.04									3.00
6.18	6.11	6.03	5.94								4.00
5.11	5.07	5.02	4.95	4.87							5.00
4.06	4.03	4.00	3.96	3.91	3.84						6.00
3.02	3.00	2.98	2.96	2.93	2.89	2.84					7.00
1.99	1.99	1.98	1.96	1.95	1.92	1.90	1.87				8.00
0.99	0.98	0.98	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94	0.92			9.00
											10.00
普通债券的凸度											年
											0.00
											1.00
87.98											2.00
66.58	65.30										3.00
48.46	47.69	46.75									4.00
33.53	33.09	32.55	31.88								5.00
21.62	21.39	21.09	20.73	20.28							6.00
12.54	12.42	12.28	12.10	11.88	11.60						7.00
6.06	6.01	5.95	5.87	5.78	5.66	5.52					8.00
1.95	1.94	1.92	1.90	1.87	1.84	1.80	1.75				9.00
											10.00

可提前赎回的债券的久期										年
										0.00
7.36										1.00
5.27	7.07									2.00
3.01	5.17	6.66								3.00
0.98	2.78	5.20	5.94							4.00
0.00	0.00	3.16	4.95	4.87						5.00
4.06	4.03	4.00	3.96	3.91	3.84					6.00
3.02	3.00	2.98	2.96	2.93	2.89	2.84				7.00
1.99	1.99	1.98	1.96	1.95	1.92	1.90	1.87			8.00
0.99	0.98	0.98	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94	0.92		9.00
										10.00
可提前赎回的债券的凸度										年
										0.00
										1.00
-317.73										2.00
-439.25	-216.50									3.00
-399.97	-416.62	-77.59								4.00
0.00	-598.24	-258.03	31.88							5.00
21.62	21.39	21.09	20.73	20.28						6.00

表 12　可回售债券的实际久期和实际凸度的模拟检验

可提前回售的债券除息（ex-coupon）价格树											
											年
102.59											0.00
104.92	99.03										1.00
106.96	101.44	95.93									2.00
108.73	103.52	98.43	93.40								3.00
110.17	105.40	100.48	96.08	91.45							4.00
111.10	107.15	102.26	98.13	94.48	90.08						5.00
105.04	103.60	101.80	99.57	96.83	93.48	89.45					6.00
104.20	103.21	101.98	100.43	98.52	96.16	93.27	89.76				7.00
103.05	102.46	101.70	100.76	99.58	98.11	96.29	94.05	91.31			8.00
101.64	101.37	101.03	100.60	100.06	99.38	98.52	97.46	96.14	94.52		9.00
100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	10.00
普通债券的久期											年
											0.00
9.36											1.00
8.31	8.18										2.00

7.24	7.15	7.04							3.00
6.17	6.11	6.03	5.94						4.00
5.11	5.07	5.02	4.95	4.87					5.00
4.06	4.03	4.00	3.96	3.90	3.84				6.00
3.02	3.00	2.98	2.96	2.93	2.89	2.84			7.00
1.99	1.99	1.97	1.96	1.95	1.92	1.90	1.87		8.00
0.99	0.98	0.98	0.97	0.97	0.96	0.95	0.94	0.92	9.00
									10.00
普通债券的凸度									年
									0.00
									1.00
87.98									2.00
66.58	65.30								3.00
48.46	47.69	46.75							4.00
33.53	33.09	32.55	31.87						5.00
21.62	21.39	21.09	20.73	20.28					6.00
12.54	12.42	12.28	12.10	11.88	11.60				7.00
6.06	6.01	5.95	5.87	5.78	5.66	5.52			8.00
1.95	1.94	1.92	1.90	1.87	1.84	1.80	1.75		9.00
									10.00
可提前回售的债券的久期									年
									0.00
11.30									1.00
11.21	9.27								2.00
11.22	9.07	7.42							3.00
10.94	9.30	6.86	5.94						4.00
9.71	9.80	6.83	4.95	4.87					5.00
4.06	4.03	4.00	3.96	3.90	3.84				6.00
3.02	3.00	2.98	2.96	2.93	2.89	2.84			7.00
1.99	1.99	1.97	1.96	1.95	1.92	1.90	1.87		8.00
0.99	0.98	0.98	0.97	0.97	0.96	0.95	0.94	0.92	9.00
									10.00
可提前回售的债券的凸度									年
									0.00
									1.00
487.14									2.00
558.69	345.56								3.00
477.24	506.90	171.09							4.00
64.82	650.45	323.13	31.87						5.00
21.62	21.39	21.09	20.73	20.28					6.00
12.54	12.42	12.28	12.10	11.88	11.60				7.00
6.06	6.01	5.95	5.87	5.78	5.66	5.52			8.00
1.95	1.94	1.92	1.90	1.87	1.84	1.80	1.75		9.00

注：前半部分同可赎回债券。

模拟结果和理论分析是一致的，普通债券的久期和凸度都为正，可赎回债券的凸度在利率比较低的时候出现了负值，可回售债券的久期和凸度都为正，回售权加大了债券的凸度。

3．实证分析

下面是用国家开发银行 2001 年至 2004 年初发行的可赎回债券和可回售进行的实证分析。

表 13　国开行可赎回债券的实际久期和实际凸度

债券代码	20206*	20215*	20218*	30202*	30213*	30214*
实际久期	2.82	2.80	2.77	-0.67	3.53	3.53
实际凸度	14.66	26.90	-19.01	842.73	375.15	375.15
利率增减百分比（Δy）	0.20%					
债券价格变动百分比（$\frac{\Delta P}{P}$）	-0.56%	-0.55%	-0.56%	0.30%	-0.63%	-0.63%
久期解释的部分（$\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial y}(\Delta y)$）	-0.56%	-0.56%	-0.55%	0.13%	-0.71%	-0.71%
凸度解释的部分（$\frac{1}{2!P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(\Delta y)^2$）	0.00%	0.01%	0.00%	0.17%	0.08%	0.08%
久期的影响所占百分比	100.52%	100.97%	99.32%	44.40%	111.90%	111.90%
凸度的影响所占百分比	-0.52%	-0.97%	0.68%	55.60%	-11.90%	-11.90%

表 14　国开行可回售债券的实际久期和实际凸度

债券代码	10220*	20205*	30215*	30216*	40202
实际久期	5.249773	2.75492	0	2.027436	2.31553
实际凸度	-912.999	-8.854024	3025.074	197.779	2795.729
利率增减百分比（Δy）	0.02%				
债券价格变动百分比（$\frac{\Delta P}{P}$）	-0.11%	-0.06%	0.01%	-0.04%	-0.04%
久期解释的部分（$\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial y}(\Delta y)$）	-0.10%	-0.06%	0.00%	-0.04%	-0.05%
凸度解释的部分（$\frac{1}{2!P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(\Delta y)^2$）	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.01%
久期的影响所占百分比	98.29%	99.97%	0.00%	100.99%	113.73%
凸度的影响所占百分比	1.71%	0.03%	100.00%	-0.99%	-13.73%

根据前面的分析，可赎回债券和可回售债券的久期不能为负，而可赎回债券的凸度在低利率时应该为负值，在高利率时应该为正值，可回售债券的凸度应该为正值。计算结果和理论分析有一定出入，可能是利率数据的偏差和估计误差所致。

值得注意的是，凸度的数值在有的情况下很大，这说明凸度在债券投资中对价格影响很大，不应该简单忽略。这一点在价格变动的百分比分析中很明显，我们发现，在利率上下波动 0.1%情况下，考虑凸度以后，债券价格的变动幅度对投资损益已经造成很大影响，忽略它就会对投资决策带来重大影响。

7 期权调整久期在银行利率风险管理中的运用

近年来，放松管制和金融创新导致利率的波动率逐渐增加，利率波动成为国际银行业经营面临的主要风险之一。在我国，利率市场化是我国金融改革的必然要求，由利率市场化而产生的利率风险将成为我国金融机构未来几年内面临的最严重的挑战之一，美国 20 世纪 80 年代放松利率管制而导致的储蓄信贷协会危机就是前车之鉴。

金融机构利率风险的根源在于利率变化产生的资产负债不匹配。例如，利率上升时会导致资产和负债价值下降，但通常资产的到期日长于负债的到期日，使得资产的价值下降大于负债的价值下降，由此产生了风险。

目前，金融机构利率风险管理的主流方法是基于缺口测量的目标规划方法。其基本思想是，测量可反映金融机构利率风险的资产负债匹配缺口，通过控制这些缺口的大小实现对利率风险的管理。根据缺口的选择不同，这些模型可分为再定价缺口模型、到期日缺口模型和久期缺口模型。其中，久期（Duration）缺口模型是目前应用最为广泛的模型。在理论研究方面 Booth 等人（1989）建立了基于久期缺口的利率风险管理模型，Bessler 等人（1994）建立了基于久期缺口、同时优化风险回报的目标规划模型。

7.1 久期缺口模型和凸度缺口模型的基本原理

如果我们采用连续复利，并将债券价格的变化对利率的变化进行泰勒展开

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\left(\Delta y\right)+\frac{1}{2!P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\left(\Delta y\right)^2+\cdots$$

那么久期刚好就是展开的一阶偏导数除以－P ， 即

$$D=-\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial y}$$

而凸度则为二阶偏导数除以 P ，　即

$$C=\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

从上面两式可以看出，久期反映了债券价格与利率之间的线性关系，而凸度则反映了债券价格与利率之间的曲率关系，二者的结合使用使我们能以二阶无穷小的精度把握债券价格与利率之间的关系，基本上满足了对利率风险控制的需要。

为什么久期可以在银行的利率风险管理中加以运用呢？实际上，只要存在现金流，就可以计算久期和凸度。因此久期和凸度不但可以用来分析债券的利率风险，还可以用来分析商业银行资产负债的利率风险。

所谓久期缺口是指商业银行资产的加权平均久期与负债的加权平均久期之差。所谓凸度缺口是是指商业银行资产的加权平均凸度与负债的加权平均凸度之差。

我们将利率风险定义为证券相对于利率变化 dy 的价值变化 dV，由于证券的价值 V 是利率的函数， 所以利用泰勒展开，dV 可以表示成久期和和凸度的函数：

$$\begin{aligned}\frac{dV}{V}&=\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial y}(dy)+\frac{1}{2!V}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(dy)^2+\cdots\\&=-D(dy)+\frac{1}{2}C(dy)^2+\cdots\end{aligned}$$

如果 A，L 和 E 分别代表银行资产，负债和股东权益的价值， 根据资产负债表的平衡关系，股东权益的价值变化可以表示为

$$dE=dA-dL$$

忽略权益价值泰勒展开中的高阶项，则

$$\begin{aligned} dE &= -AD_A(dy) + \frac{1}{2}AC_A(dy)^2 + LD_L(dy) - \frac{1}{2}LC_L(dy)^2 \\ &= -A\left(D_A - \frac{L}{A}D_L\right)(dy) + \frac{1}{2}A\left(C_A - \frac{L}{A}C_L\right)(dy)^2 \end{aligned} \tag{7.1}$$

其中，右边的第一项代表久期缺口对股东权益的影响，而第二项代表凸度缺口对股东权益的影响。根据公式，如果以下等式都成立，即久期缺口和凸度缺口都为零，那么股东权益的价值对于利率风险就是完全免疫的。

$$D_A = \frac{L}{A}D_L, C_A = \frac{L}{A}C_L$$

根据(7.1)，可以引申出如下的结论：

（1）从利率风险的角度看，银行净资产的价值变动受五个因素的影响，即久期缺口、凸度缺口、总资产价值、负债总价值和利率变动。

（2）在利率发生较小变动时，凸度的影响可以忽略不计。在这种情况下，当久期缺口为正时，银行净资产的价值变动与利率变动方向相反，即如果利率下降，则银行资产与负债的价值都会上升，但资产价值上升占主导，银行净资产价值上升。反之，利率上升将会使银行净资产价值下降。当久期缺口为负时，利率变动对银行净资产价值的影响正好相反。

（3）在利率发生较大变动时，凸度的影响不能被忽略。在这种情况下，若凸度缺口为正，会对银行净资产的价值变动起正向推动作用；反之，若凸度缺口为负，会对银行净资产的价值变动起负向推动作用。

根据以上结论，商业银行可以采取以下两种利率风险管理策略：

（1）积极缺口管理策略，即商业银行根据对未来市场利率走势的预测，调整其久期缺口的性质及规模，并保持凸度缺口非负，以获得利率变动所带来的收益。如果预测市场利率上升，则将久期缺口调整为负值，从而增加银行净资产价值；反之，如果预测市场利率下降，则将久期缺口调整为正值，从而达到增加银行净资产价值的目的。

当然，运用这种策略必须以对市场利率走势的准确预测为前提条件，如果预测失误，将会使商业银行承担更大的利率风险，从而遭受更为严重

的损失。另外，商业银行在调整资产负债时受到多种因素的制约，比如可能受到客户意愿的限制而不能顺利实现其调整久期缺口的目的，并且调整成本往往较高，所以，在采取这种策略之前，商业银行必须权衡调整成本与调整后所带来的收益孰大孰小。

（2）保守缺口管理策略，又称为利率风险免疫管理策略。在利率变动幅度较小时，凸度的影响可以忽略不计，此时商业银行可以通过调整资产和负债结构，使久期缺口为零（或尽可能小），从而使银行净资产价值不受利率变动的影响，来达到利率风险免疫的目的。在利率变动幅度较大时，凸度的影响不能被忽略，如果凸度为正，此时利率风险免疫管理的任务是，调整资产和负债结构，在使久期缺口为零的情况下，最大化凸度缺口（因为$\left(dr\right)^2>0$，所以凸度缺口越大，银行净资产价值的增幅越大）。

7.2 银行资产、负债的久期和凸度

7.2.1 银行资产的久期和凸度

商业银行的资产种类众多，主要包括证券和贷款。其中证券以债券为主，其他为股票和商业票据。对债券的久期和凸度已经有大量的论述，而贷款和商业票据本质上也可以看成借款人发行的债券，所以它们的久期和凸度的计算方法和债券一样。我们这里要研究的是股票的久期和凸度。

设有一个市价为 100 元的股票预期年收益率为 10%，那么它的久期为

$$D=\frac{\frac{10}{1.1}\times 1+\frac{10}{1.1^2}\times 2+\frac{10}{1.1^3}\times 3\cdots}{100}=11$$

不过股票的预期收益率是很不确定的，所以用上面的方法计算出来的久期会有很大的误差。实际上，我们也可以根据久期和凸度的定义直接计算：

$$D=-\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial y}，\quad C=\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

这需要知道股票价格以及股票价格和收益率之间的关系，计算起来有一定的难度。

7.2.2 银行负债的久期和凸度——无到期日存款的久期和凸度的估计方法

商业银行的负债主要是存款和借款，两者可以看成银行发行的债券，所以可以将直接运用债券久期和凸度的计算方法。不过存款中的无到期日存款（Nonmaturity Deposits）的久期和凸度需要专门讨论。

无到期日存款主要是指活期存款，其他包括可转让支付命令和货币市场存款帐户等等。这些存款和其他类型的银行存款不同，存款人可以在任何时间不经事先通知就可以提款。无到期日存款是商业银行资产负债表的一个重要组成部分，占银行整个负债的很大一块，因此在银行的利率风险管理中占据重要的地位。

久期实际上衡量的是利率变动一个单位时，金融工具的价格变动量，所以要估计金融工具的久期，首先要估计该产品的价格，然后计算利率变动固定单位的情况下产品价格的变动量，这样就可以求出该产品的久期。

因此要估计无到期日存款的久期和凸度，首先要估计它的现值，由于众多的原因，估计无到期日存款的现值有很多困难，包括（1）存款人因为地址更换、死亡或者为了获得更方便的银行服务而清算余额或提款带来现金流出。这些是很难估计的。（2）存款机构为了吸引和维持这些存款，会带来显著的利息成本。

无到期日存款的估值会涉及到以下现金流：（1）非利息成本；（2）与利率变动无关的存款流入或流出；（3）与利率相关的存款流入和流出。

将上述现金流用适当的贴现率贴现就得到无到期日存款的价值

$$PV=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\left(D_{t-1}\left(i_t+c\right)+\Delta D_t\right)}{\left(1+d_t\right)^t}$$

其中 ΔD_t 为存款净流出，非利息成本用上期末存款余额的一个固定比例 c 表示。贴现率根据银行的替代资金成本（Alternative Cost of Funds）计算。可以用 3 个月期的 LIBOR、二级市场上销售的存款单的收益率等等。存款利率和存款余额的估计方程分别为

$$i_t=a+b_1i_{t-1}+b_2m_t$$
$$D_t=a+b_1D_{t-1}+b_2\left(m_t-i_t\right)$$

其中 m_t 是市场利率。有了上述关系式，就可以计算久期和凸度。

7.3 内嵌期权对久期缺口管理和凸度缺口管理的影响

前面的久期缺口模型和凸度缺口模型并没有考虑期权的影响，实际上银行的资产负债中或多或少地嵌入了各种期权。一般来说，贷款可以提前偿还，存款可以被提前提取，实际上都隐含着期权在内。当银行资产负债中不含内嵌期权时，期限匹配就基本能对利率风险进行免疫，在加入期权后，那些本来期限匹配的银行资产负债项目在很大程度上将面临凸度风险。

因为在无内嵌期权的条件下，由于无内嵌期权证券都具有正凸度的特征，所以凸度缺口很小，凸度对股东权益的利率风险的影响是可以忽略的。但是，在有内嵌期权的条件下，忽略凸度缺口会导致股东权益较大的利率风险。

实际上，银行的贷款由于赋予借款人提前偿还的权力，所以相当于一个借款人发行的可赎回债券，而银行的存款由于赋予存款人提前支取的权力，所以相当于一个银行发行的可回售债券。我们用一个表格说明这种结构对银行利率风险的影响：

表 15　贷款和存款内嵌的期权对银行承担的利率风险的影响

	贷款	存款
等价物	可赎回债券	可回售债券
分解	普通债券－赎回权	普通债券＋回售权
银行在债券上的部位	投资人（多头）	发行人（空头）
银行在期权上的部位	买权空头	卖权空头
内嵌期权久期	正	正
内嵌期权凸度	在低利率时可能为负	在高利率时变大

由于

$$dE = -A\left(D_A - \frac{L}{A}D_L\right)(dy) + \frac{1}{2}A\left(C_A - \frac{L}{A}C_L\right)(dy)^2$$

银行在两种期权上都处于空头，但存款的久期在计入久期缺口时要乘以一个资产负债率，而银行的资产负责率一般小于 92%，所以 D_L 和 D_A 同时增加相同的量的结果是导致久期缺口扩大，从而加大了银行的利率风险。。

此外，正的凸度是有利的，而在高利率的时候内嵌在存款中的期权会导致 C_L 上升，凸度缺口降低；在低利率的情况下，内嵌在贷款中的期权会导致 C_A 下降，凸度缺口的降低，所以贷款和存款内嵌的期权对银行承担的利率风险的综合影响为缩小凸度缺口，从而加大了银行的利率风险。

由此我们还可以分析近期我国商业银行发行的结构性存款对银行利率风险管理的影响，近期银行发行的和利率关联的结构性存款基本上是在存款中嵌入买权，而且银行处于买权多头，所以其凸度可能为负，从这个角度看，发行这种存款有利于缓解银行承担的利率风险。

由此推广，银行为了缓解贷款和存款内嵌的期权对银行承担的利率风险的综合影响，可以适当地发行银行可提前结束的贷款和存款。这一方面可以降低贷款利率，提高存款利率，增强银行业务的吸引力，另一方面也有利于在一定程度上降低银行的利率风险。

基于控制银行资产负债表利率风险的一般策略，结合内嵌期权的特征，

在有内嵌期权条件下控制银行资产负债表利率风险的策略应该是：

在内嵌买入期权的资产与内嵌卖出期权的负债之中，配置一定量的内嵌卖出期权的资产与内嵌买入期权的负债， 使前者的负凸度缺口得以同后者的正凸度缺口对冲。

7.4 久期缺口和凸性缺口管理的局限性

利用久期缺口管理和凸度缺口管理可以改善和提高我国商业银行利率风险的管理水平，但是，从现阶段看，在我国商业银行系统内引入这种利率风险管理技术还面临着一些重要的挑战。

首先，各期现金流量的计量存在不确定性和不准确性。

在债券投资中运用久期和凸度，对未来现金流量的确定并不困难，它能够对各个时期的现金流量，包括到期资产的流入量和到期负债的流出量做出准确的估计。但在商业银行运用久期进行风险免疫管理时，由于组合中主要是各类存款和贷款，存款的提取和贷款的偿还都具有较大的不确定性，其未来各个时期现金流量的确定要比债券复杂得多。

并且在我国目前的银行体系下，信用风险是风险免疫管理在中国实行的重大障碍，借款企业不能按期还本付息的现象经常发生，产生这一问题的主要原因在于银行与企业尤其是国有大中型企业的关系不顺，银行政策性业务与商业性业务不分，银行管理水平低，借贷双方信息不对称带来的道德风险严重等也是重要原因。因此，治理银行的不良资产，消除制度性风险势在必行，它们是扫除银行利率风险管理障碍的前提。商业银行一方面要加强对借款企业的信用分析和存款客户提款要求的分析，以便更加准确地使用久期和凸度作为利率风险衡量的工具。另一方面加大银行体系改革力度，改变银行目前的借新债还旧债的经营特征，消除利率风险管理中的系统性风险和制度性风险。

其次，缺乏有效的利率期限结构数据。计算久期需要一个最基本的数

据，即利率期限结构。在西方发达的金融体市场中，用作贴现率和代表市场利率水平的收益率曲线可以通过观察活跃的国债市场求得。而我国的国债市场却十分脆弱，国债现货市场规模狭小，流动性不足，二级市场交易不发达，各交易机构各自为政，分割市场，盲目竞争，投资者投机意识过强，交易制度不规范等。虽然目前利率市场化进程刚刚起步，要使利率及时合理地反映资金市场的供求情况还有很长的一段路要走。长期以来，各种利率水平都是由中央银行制定的，给予银行自由浮动的幅度非常有限，这导致了利率水平的变动不能充分反映金融产品风险和收益的变化，从而很大程度上使量化管理失去了原有的意义。因此，要确定一个合理的贴现率水平来计算固定收益资产或负债的久期并不是一件容易的事情。

再次，对久期和凸度进行调整的手段的局限性。在合理地计算出了银行资产和负债的久期后，需要将两方面进行配比，使久期的缺口为零，进而达到利率风险管理的目的。然而，调节存款和贷款的久期远不如调整纯粹的债券组合那样直接和方便，因为在这两方面都要受到银行以外客观因素的影响，即客户的需求和意愿的限制。理论上可行的一个办法是通过债券市场的买卖来操作，即在银行资产组合的久期大于其负债组合的久期时，通过出售债券来降低资产组合的久期，在相反的情况下则购进债券以适当增加资产组合的久期。然而这种操作和调整是以拥有一个发达的证券市场为前提条件的，而我国的证券市场还很不发达，对此造成了很大的限制。

久期和凸度缺口管理是一种先进的现代利率风险管理方法，相对于资金缺口等传统的利率风险管理方法，它既能更加准确地反映银行资产和负债所承担的利率风险，又能使得它非常有利于复杂的组合管理。因此，从发展方向上看，我国银行体系引入久期和凸度缺口管理是有益的，也是必然的。

8　进一步的研究

本文主要以 BDT 模型和二叉树方法对中国利率衍生产品的定价和保值进行了尝试性研究，对理论和实践都有一定的借鉴意义，但存在许多不足和有待进一步深入研究的地方：

1．在结构性存款的定价中，我们是站在投资者的角度分析结构性存款的投资价值的，实际上，站在银行的角度探讨发行这个产品的成本也应该是金融工程研究的一个重要内容，从产品设计的角度看，这方面的研究对金融创新能够提供更有价值的结论。

2．在含权债券的定价方面，近年来国开行在债券方面的创新除了可赎回债券和可回售债券，还包括可调换债券和可延期债券，本文没有涉及这方面的内容。实际上，到本文定稿时，类似的含权债券已经出现在次级债和企业债市场上，这充分说明固定收益工具结合期权将成为今后几年金融创新的一个潮流。因此含权债券的定价问题需要更全面的研究。

3．在含权债券利率风险的衡量方面，由于研究范围有限，我们没有讨论保险产品中嵌入期权对保单价值以及保险公司风险管理的影响问题。不过内嵌期权对风险管理的影响在国外已经受到相当的重视，因为就在 1999 年 7 月，全美最大的 50 家保险公司之一，通用人寿保险公司就因为没有很好地对冲保单中内嵌的赎回权而在短短的 10 天之内被州政府接管。国内保险公司迫于竞争压力，必将在各种保单之中嵌入期权以增加其灵活性和吸引力，前车之鉴，对含权保单的利率风险应该加强研究。

4．在银行利率风险管理方面，由于数据有限，对银行资产负债的久期和凸度缺口管理没有进行实证分析，有待今后进一步加强，更深入的研究可以尝试开发一个考虑内嵌期权以后的银行利率风险管理的综合软件。

5．最后，本文一个比较大的缺陷是使用单因子模型对含权产品定价，

对于复杂的产品，单因子模型有很大的缺陷，必须用多因子模型，这个方面需要加强；此外，除了二叉树模型，三叉树和蒙特卡罗模拟也是很好的数值模拟方法，征对不同的情况需要有针对性地使用才会取得良好效果，这需要引起注意；还有就是利率期限结构的估计会对结果产生比较大的影响，因此进一步的研究可以探讨定价结果对利率期限结构估计的稳建性。

参考文献

[1] Au. K. T.，Thurston D. C.，1995，“A New Class of Duration Measures”，Economics Letters，47：371 – 375.

[2] Bessler W.，Booth G. G.，1994，“An Interest Rate Risk Management Model”，European Journal of Operation Research，74：243－256.

[3] Bierwag G.，1977，“Immunization，Duration and the Term Structure of Interest Rates”，Journal of Financial and Quantitative Analysis，12：725 - 742.

[4] Bierwag G，Kaufman G.，1977，“Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations : A Note”，Journal of Business，50：364 -370.

[5] Black, F., 1976，“The Pricing of Commodity Contracts,” *Journal of Financial Economics*, 3, p.167-79.

[6] Black Fisher，Emanuel Derman and William Toy, 1990, “A One Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options”, Financial Analysts Journal, January-February：33-39.

[7] Black, Fischer and Piotr Karasinski, 1991, "Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal"，Financial Analysts Journal 47：52-59.

[8] Booth G G，BesslerW，Foote W G.，1989，“Managing Interest Rate Risk in Banking Institutions”，European Journal of Operational Research，41：302－313.

[9] Brennan, Michael J. and Eduardo Schwartz, 1979, "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds"，Journal of Banking and Finance 3：133-155.

[10] Chan, K. C., G. A.Karolyi, F.A.Longstaff, and A.B.Sanders, 1992, “An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate”, Journal of Finance, 47,1209-1227.

[11] Chen, R. and L. Scott, 1993, “Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates”, Journal of Fixed Income, 3,14-31.

[12] Cooper I A. Asset values，1977，“Interest rate Changes and Duration”，Journal of Financial and Quantitative Analysis ，12：701 - 724.

[13] Cox J ，Ingersoll J ，Ross S. ，1979，“Duration and the Measurement of Basis Risk ”，

Journal of Business，52：51 - 61.

[14] Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephen A. Ross, 1985a, "A Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices"，Econometrica 53：363-384.

[15] Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephen A. Ross, 1985b, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," Econometrica 53：385-407.

[16] Cox, D. R. and H. D. Miller，1990，The Theory of Stochastic Processes. London：Chapman and Hall.

[17] Fabozzi, Frank J., 1996, Bond Market Analysis and Strategies, 3rd ed, Prentice Hall, Inc.

[18] Fruhwirth.，2002，"The Health Jarrow Morton Duration and Convexity: A Generalized Approach"，International Journal of Theoretical and Applied ，5 (7) ：695 - 700.

[19] Goldstein, R. S., 2000, "The Term Structure of Interest Rates as a Random Field", Review of Financial Studies, 13, 365-384.

[20] Heath, David, Robert Jarrow and Andrew Morton, 1990, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation," Journal of Financial Quantitative Analysis 25：419-440.

[21] Heath, David, Robert Jarrow and Andrew Morton, 1992, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology," Econometrica 60：77-105.

[22] Ho, Thomas S. Y. and Sang-Bin Lee, 1986, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," Journal of Finance 41：1011-1029.

[23] Hull, J.C.,2000, Options, Futures and Other Derivatives(fourth edition), Prentice Hall.

[24] Hull, John and Alan White, 1990, "Pricing Interest Rate Derivative Securities," The Review of Financial Studies 3：573-592.

[25] Hull, John and Alan White, 1994a, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models," The Journal of Derivatives 2：7-16.

[26] Hull, John and Alan White, 1994b, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models," The Journal of Derivatives 2：37-47.

[27] Khang C. ，1979，"Bond Immunization When Short - Term Rates Fluctuate More Than Long Term Rates." Journal of Financial and Quantitative Analysis，14 ：1085 - 1090.

[28] Kopprasch, Robert, William Boyce, Mark Koenigsberg, Armand Tatevossian, and Michael Yampol, 1987, "Effective Duration and the Pricing of Callable Bonds,"

Salmon Brothers.

[29] Litterman, R. and J. Scheinkman, 1991, “Common Factors Affecting Bond Returns”, Journal of Fixed Income, 1, 54-61.

[30] Longstaff, Francis A. and Eduardo S. Schwartz, September 1992, "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model," The Journal of Finance 47：1259-1282.

[31] Macaulay, F. R., 1938, “Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in U.S. since 1856”, NBER, New York.

[32] Merton Robert C., 1973, “Theory of Option Pricing”, Bell Journal of Economics and Science, Vol 4.

[33] Merton Robert C., 1992, Continuous-Time Finance, Blackwell Publisher, Cambridge, Massachusetts USA. Chapter 3, On the Mathematics and Economics Assumptions of Continuous-Time Models, ：57-97.

[34] Moreno M. 2002，“A Two Mean Reverting Factor Model of the Term Structure of Interest Rate”，http :/ / econpapers. hhs. se/ paper/upfupfgen/ 193. htm.

[35] Moreno M. 2003 ，“Risk Management under a Two Factor Model of the Term Structure of Interest Rates”，http :/ / econpapers.hhs. se/ paper/ upfupfsbf/ 254. htm .

[36] Rendleman, Richard J., Jr. and Brit J. Bartter, 1980, "The Pricing of Options on Debt Securities," Journal of Financial and Quantitative Analysis 15：11-24.

[37] Vasicek, Oldrich, 1977, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," Journal of Financial Economics 5：177-188.

[38] [美]布鲁斯.塔克曼著，黄嘉斌译，《固定收益证券》，北京：宇航出版社，1999。

[39] 李奥奈尔.马特里尼，菲利普.普里奥兰德著，肖军译，《固定收益证券——对利率风险进行定价和套期保值德动态方法》，北京：机械工业出版社，2002。

[40] 康朝锋，郑振龙，上海股市惯性策略和反转策略的实证研究，2002，硕士论文。

[41] 康朝锋，“信息不对称与股票发行的核准制”，《上海金融高等专科学校学报》，2000，第 4 期。

[42] 康朝锋、邱文华， “宏观经济指标与上证走势的预测”，《厦门大学学报》，2003，第 6 期。

[43] 林海、郑振龙，《中国利率期限结构：理论与运用》，北京：中国财经出版社，2004。

[44] 林海、郑振龙，《中国利率期限结构：理论与运用》，北京：中国财经出版社，2004。

[45] 林海，郑振龙，“中国市场流动性溢酬实证研究”，厦门大学，2002，

http://efinance.nease.net; http://finance.xmu.edu.cn.

[46] 林海，郑振龙，“中国可转债的价格敏感性分析及条款设计”，厦门大学，2003, http://efinance.nease.net; http://finance.xmu.edu.cn.

[47] 林海，郑振龙，“中国利率动态行为分析”，厦门大学，2003，http://efinance.nease.net; http://finance.xmu.edu.cn.

[48] 郑振龙，康朝锋，“中国可转债市场效率的随机占优检验”，《当代财经》，2004年第3期。

[49] 郑振龙、康朝锋，“可转换债券时间价值的理论与实证分析”，working paper，2004，http://efinance.nease.net。

[50] 郑振龙、康朝锋，“我国可转债转股价调整条款设计存在的问题与修正建议”，working paper，2003，http://efinance.nease.net。

[51] 郑振龙，林海，“中国违约风险溢酬研究”证券市场导报，2003，(6)，41-45。

[52] 郑振龙，林海，“中国市场利率期限结构的静态估计”，武汉金融, 2003，(3)，33-37。

[53] 郑振龙，林海，“银行资产负债中隐含期权的定价研究”，《金融研究》，2004年第4期。

[54] 郑振龙,林海，“可转换债券中的公司决策分析”，厦门大学，2003，http://efinance.nease.net ; http://finance.xmu.edu.cn.

[55] 郑振龙,林海，“中国可转换债券定价研究”，厦门大学，2003，http://efinance.nease.net; http://finance.xmu.edu.cn.

[56] 魏巍贤、康朝锋，“基于GARCH模型的中国经济波动的实证研究及国际比较”，《数量经济技术经济研究》，2001，第11期。

[57] 魏巍贤、康朝锋，“海股市价量关系的实证研究”，《预测》，2001，第7期。

[58] 魏巍贤、康朝锋，“ARCH模型与上海股市的波动率”，《预测》，2001，第6期。

附录 1 国开行含权债汇总表

表 16 国开行含权债汇总表(带*的为可赎回债券或可回售债券)

债券简称	01 国开 20	02 国开 05	02 国开 06	02 国开 15	02 国开 18	03 国开 02	03 国开 13	03 国开 14	03 国开 15	03 国开 16	03 国开 18	03 国开 19	03 国开 20	03 国开 22	03 国开 23	03 国开 26	04 国开 02	04 国开 05
债券代码	10220*	20205*	20206*	20215*	20218*	30202*	30213*	30214*	30215*	30216*	30218	30219	30220	30222	30223	30226	40202*	
债券全称	2001 二十期国开金融债	2002 五期国开金融债	2002 六期国开金融债	2002 十五期国开金融债	2002 十八期国开金融债	2003 二期国开金融债	2003 十三期国开金融债	2003 十四期国开金融债	2003 十五期国开金融债	2003 十六期国开金融债	2003 十八期国开金融债	2003 十九期国开金融债	2003 二十期国开金融债	2003 二十二期国开金融债	2003 二十三期国开金融债	2003 二十六期国开金融债	2004 二期国开金融债	2004 年第五期金融债
面值(元)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
发行价格(元)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	101.45	101.1	101.14	101.38	100	
计划发行数量(亿元)	100	100	100	100	100	200	200	100	100	100	100	100	200	100	100	100	200	100
实际发行数量(亿元)	100	100	100	100	100	200	200	100	100	100	100	100	200	100	100	100	200	
债券期限(年)	10	20	10	10	10	10	10	10	10	20	3	3	10	7	7	7	10	10
票面利率(%)	3	2.65	2.15	3.29	3.3	2.87	2.77	2.77	2.77	3.14	0	2.76	3.89	3.74	3.74	3.74	3.51	
信用评级	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	
发行起始日期	2001-12-12	2002-4-17	2002-6-12	2002-10-23	2002-12-4	2003-3-19	2003-7-23	2003-8-7	2003-8-20	2003-8-20	2003-9-10	2003-9-10	2003-9-24	2003-10-15	2003-10-17	2003-11-5	2004-2-13	
发行终止日期	2001-12-26	2002-5-13	2002-6-21	2002-10-31	2002-12-12	2003-4-8	2003-7-31	2003-8-18	2003-9-1	2003-9-4	2003-9-24	2003-9-17	2003-10-11	2003-10-30	2003-11-6	2003-11-14	2004-2-27	
上市日期	2001-12-31	2002-5-14	2002-6-25	2002-11-4	2002-12-13	2003-4-10	2003-8-4	2003-8-20	2003-9-3	2003-9-10	2003-9-26	2003-9-19	2003-10-15	2003-11-3	2003-11-10	2003-11-18	2004-3-2	
上市公告日	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	2003-8-1	2003-8-19	2003-9-2	2003-9-9	2003-9-26	2003-9-18	2003-10-15	2003-10-31	2003-11-7	2003-11-17	2004-3-1	
发行公告日	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	2003-7-18	2003-8-7	2003-8-14	2003-8-20	2003-9-9	2003-9-9	2003-9-22	2003-10-10	2003-10-10	2003-10-31	2004-2-3	
发行对象	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	全国银行间债券市场成员	
发行方式	公募	票面利率	票面利率	采用利率	单一利率	采用利率	公募	公募	公募	公募	公募	公募	公募	公募	公募	公募	公募	

		招标	招标	招投标方式发行	招标	招投标方式发行												
承销方式	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	
起息日	2001-12-21	2002-5-9	2002-6-16	2002-10-26	2002-12-10	2003-3-31	2003-7-29	2003-7-29	2003-8-28	2003-9-4	2003-9-15	2003-9-15	2001-9-18	2001-8-27	2001-8-27	2001-8-27	2004-2-25	
到期日	2011-12-21	2022-5-9	2012-6-16	2012-10-26	2012-12-10	2013-3-31	2013-7-29	2013-7-29	2013-8-28	2023-9-4	2006-9-15	2006-9-15	2011-9-18	2008-8-27	2008-8-27	2008-8-27	2014-2-25	
计息方式	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	单利	
兑付起始日	2011-12-21	2022-5-9	2012-6-16	2012-10-26	2012-12-10	2013-3-31	2013-7-29	2013-7-29	2013-8-28	2023-9-4	2006-9-15	2006-9-15	2011-9-18	2008-8-27	2008-8-27	2008-8-27	2014-2-25	
兑付终止日	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	
兑付登记起始日	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	
兑付登记终止日	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	
付息日说明	每年12月21日付息,节假日顺延	每年5月9日、11月9日付息,遇节假日顺延	每年6月16日付息,节假日顺延	每年10月26日付息,节假日顺延	每年12月10日付息,节假日顺延	每年3月31日付息,节假日顺延	每年7月29日支付利息节假日顺延	每年7月29日支付利息节假日顺延	每年8月28日支付利息节假日顺延	每年的3月4日和9月4日均为付息日节假日顺延	第一次付息日为2004年3月15日,以后每年的3月15日和9月15日均为付息日节假日顺延	第一次付息日为2004年3月15日,以后每年的3月15日和9月15日均为付息日节假日顺延	每年9月18日支付利息节假日顺延	每年8月27日付息,节假日顺延	每年8月27日付息,节假日顺延	每年8月27日付息,节假日顺延	每年的2月25日为付息日（遇节假日顺延）。	
付息频率	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	未公布	
利率类型	固定利率	固定利率	固定利率	固定利率	固定利率	固定利率	固定利率	浮动利率	固定利率	固定利率	浮动利率	固定利率	固定利率	固定利率	固定利率	固定利率	固定利率	
偿还方式	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	到期偿付	
利率说明	3.00%	2.65%	20020616至20070615,2.1466%;20070616至20120616,	20021026-20071025五年期间的票面利率为3.2939%，	前五年(20021210-20071210)利率为3.3%，后五年	前五年20030331-20080331利率由本次招投标确定,后五	2008年7月29日一2013年7月29日票面利率在前5年基	2003年7月29日-2008年7月29日期间的票面利率为	2.77%	3.14%	一年定存利率+0.77%	2.76%	3.89%	3.74%	3.74%	3.74%	3.51%	

			3.3466%	20071026-20121026 五年期间的票面利率为 4.5939%	(20071210-20121210)利率在前五年利率基础上加 130 个基点	年 20080331-20130331 利率在前五年利率基础上加 130 个基点	础上加 130 个基点。	2.77%，2008 年 7 月 29 日 -2013 年 7 月 29 日期间的票面利率为 4.07%										
兑付费率(%)	0.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.2	0	0	
发行费率(%)	0.45	0.3	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28	0	0	0.1	0.1	0.25	0	0	0.2	0.15	
是否可提前兑付	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	
是否免税	否	否	否	否	否	是	是	是	是	是	是	是	是	是	是	是	是	
发行年度	2001	2002	2002	2002	2002	2003	2003	2003	2003	2003	2003	2003	2003	2003	2003	2003	2004	
发行期号	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

附录 2 国开行含权债券含权条款汇总表

表 17 国开行含权债券含权条款汇总表(带*的为可赎回债券或可回售债券)

债券全称	赎回条款
2001 二十期国开金融债*	本期债券的任何持有人均可选择在 2006 年的付息日由发行人以本金全部或部分赎回债券，但需至少提前一个月，即于 2006 年 11 月 21 日之前告知中央国债登记结算有限责任公司托管部（以下简称中央结算公司），具体操作办法见届时中央结算公司的通知。 本期债券不设定发行人主动赎回事项,仅设定持有人有选择赎回的权利。
2002 五期国开金融债*	本期债券的任何持有人均可选择在 2012 年的付息日由发行人以本金全部或部分赎回债券，但需至少提前一个月，即于 2012 年 4 月 9 日之前告知中央国债登记结算有限责任公司（以下简称中央结算公司）托管部，具体操作办法见届时中央结算公司的通知。 本期债券不设定发行人主动赎回事项，仅设定持有人选择赎回的权利。
2002 六期国开金融债*	本期债券仅设定一次发行人选择提前赎回的权利，即发行人可选择在 2007 年 6 月 16 日以面值全部赎回债券，发行人选择赎回前，将至少提前一个月，即于 2007 年 5 月 16 日之前告知全体债券持有人，同时通知中央国债登记结算有限责任公司（以下简称中央结算公司），具体操作办法见届时中央结算公司的通知。
2002 十五期国开金融债*	本期债券仅设定一次发行人选择提前赎回的权利，即发行人可选择在 2007 年 10 月 26 日以面值全部赎回债券，发行人选择赎回前，将至少提前一个月，即于 2007 年 9 月 26 日之前告知全体债券持有人，同时通知中央国债登记结算有限责任公司（以下简称中央结算公司），具体操作办法见届时中央结算公司的通知。
2002 十八期国开金融债*	本期债券仅设定一次发行人选择提前赎回的权利，即发行人可选择在 2007 年 12 月 10 日以面值全部赎回债券，发行人选择赎回前，将至少提前一个月，即于 2007 年 11 月 10 日之前告知全体债券持有人，同时通知中央国债登记结算有限责任公司（以下简称中央结算公司），具体操作办法见届时中央结算公司的通知。
2003 二期国开金融债*	本期债券仅设定一次发行人选择提前赎回的权利，即发行人可选择在 2008 年 3 月 31 日以面值全部赎回债券，发行人选择赎回前，将至少提前一个月，即于 2008 年 2 月 29 日之前告知全体债券持有人，同时通知中央国债登记结算有限责任公司（以下简称中央结算公司），具体操作办法见届

	时中央结算公司的通知。
2003 十三期国开金融债*	本期债券仅设定一次发行人选择提前赎回的权利，即发行人可选择在 2008 年 7 月 29 日以面值全部赎回债券，发行人选择赎回前，将至少提前一个月，即于 2008 年 6 月 29 日之前告知全体债券持有人，同时通知中央国债登记结算有限责任公司（以下简称中央结算公司），具体操作办法见届时中央结算公司的通知。
2003 十四期国开金融债*	本期债券仅设定一次发行人选择提前赎回的权利，即发行人可选择在 2008 年 7 月 29 日以面值全部赎回债券，发行人选择赎回前，将至少提前一个月，即于 2008 年 6 月 29 日之前告知全体债券持有人，同时通知中央国债登记结算有限责任公司（以下简称中央结算公司），具体操作办法见届时中央结算公司的通知。
2003 十五期国开金融债*	本期债券的任何持有人均可选择在 2008 年 8 月 28 日由发行人以本金全部或部分赎回债券，但需至少提前一个月，即于 2008 年 7 月 28 日之前告知中央国债登记结算有限责任公司（以下简称中央结算公司）托管部，具体操作办法见届时中央结算公司的通知。 本期债券不设定发行人主动赎回事项，仅设定持有人选择提前兑付的权利。
2003 十六期国开金融债*	本期债券的任何持有人均可选择在 2013 年 9 月 4 日由发行人以本金全部或部分赎回债券，但需至少提前一个月，即于 2013 年 8 月 4 日之前告知中央国债登记结算有限责任公司（以下简称中央结算公司）托管部，具体操作办法见届时中央结算公司的通知。 本期债券不设定发行人主动赎回事项，仅设定持有人选择提前兑付的权利。 发行人对本期债券保留增发的权利。
2003 十八期国开金融债	本期债券的持有者有权利选择在本期债券第一次付息后将持有的全部或部分债券调换为我行发行的 2003 年第十九期债券，调换比例为 1：1，调换数量最低为 1000 万元或其整数倍。本期债券的持有者必须在 2004 年 3 月 8 日至 12 日间提出调换债券的指令，将其传真至中央国债登记结算有限公司；有关具体事宜另见中央国债登记结算有限公司届时通知。
2003 十九期国开金融债	本期债券的持有者有权利选择在本期债券第一次付息后将持有的全部或部分债券调换为我行发行的 2003 年第十八期债券，调换比例为 1：1，调换数量最低为 1000 万元或其整数倍。本期债券的持有者必须在 2004 年 3 月 8 日至 12 日间提出调换债券的指令，将其传真至中央国债登记结算有限公司；有关具体事宜另见中央国债登记结算有限公司届时通知。
2003 二十期国开金融债	本期债券的持有者有权利选择在本期债券第一次付息（2004 年 9 月 18 日）或第二次付息（2005 年 9 月 18 日）后将持有的全部或部分债券按面值调换为我行发行的 2001 年第十期债券（10 年期浮动利率债券，基本利差 0.653%。起息日为 2001 年 9 月 18 日，兑付日为 2011 年 9 月 18 日，每年的 9 月 18 日为付息日（遇节假日顺延），调换比例为 1：1，调换数量最低为 1000 万元面值或

	其整数倍。本期债券的持有者必须在 2004 年 9 月 20 日至 24 日间，或 2005 年 9 月 19 日至 23 日间，提出调换债券的指令，将其传真至中央国债登记结算有限公司（以下简称“中央结算公司”）。本期债券如调换成我行发行的 2001 年第十期债券,在中央结算公司办理完有关手续后可以同 2001 年第十期债券合并交易。本期债券在 2005 年 9 月 23 日选择权中止之前，未调换成 2001 年第十期债券的部分作为一只单独的债券进行交易，在选择权中止之后由中央结算公司办理该债券与 2001 年第十一期债券的合并手续；有关具体事宜另见中央结算公司届时通知。
2003 二十二期国开金融债	22，23 两期债券的持有者有权利选择在债券第一次付息（2004 年 8 月 27 日）或第二次付息（2005 年 8 月 27 日）后将持有的全部或部分债券按面值调换为我行发行的 2001 年第八期债券（7 年期浮动利率债券，基本利差 0.648%。起息日为 2001 年 8 月 27 日，兑付日为 2008 年 8 月 27 日，每年的 8 月 27 日为付息日（遇节假日顺延），调换比例为 1：1，调换数量最低为 1000 万元面值或其整数倍。这两期债券的持有者必须在 2004 年 8 月 30 日至 9 月 3 日间，或 2005 年 8 月 28 日至 9 月 1 日间，提出调换债券的指令，将其传真至中央国债登记结算有限公司（以下简称“中央结算公司”）。这两期债券如调换成我行发行的 2001 年第八期债券，在中央结算公司办理完有关手续后可以同 2001 年第八期债券合并交易。这两期债券在 2005 年 9 月 1 日选择权中止之前，未调换成 2001 年第八期债券的部分作为一只单独的债券进行交易，在选择权中止之后由中央结算公司办理该债券与 2001 年第九期债券的合并手续；有关具体事宜另见中央结算公司届时通知。
2003 二十三期国开金融债	22，23 两期债券的持有者有权利选择在债券第一次付息（2004 年 8 月 27 日）或第二次付息（2005 年 8 月 27 日）后将持有的全部或部分债券按面值调换为我行发行的 2001 年第八期债券（7 年期浮动利率债券，基本利差 0.648%。起息日为 2001 年 8 月 27 日，兑付日为 2008 年 8 月 27 日，每年的 8 月 27 日为付息日（遇节假日顺延），调换比例为 1：1，调换数量最低为 1000 万元面值或其整数倍。这两期债券的持有者必须在 2004 年 8 月 30 日至 9 月 3 日间，或 2005 年 8 月 28 日至 9 月 1 日间，提出调换债券的指令，将其传真至中央国债登记结算有限公司（以下简称“中央结算公司”）。这两期债券如调换成我行发行的 2001 年第八期债券，在中央结算公司办理完有关手续后可以同 2001 年第八期债券合并交易。这两期债券在 2005 年 9 月 1 日选择权中止之前，未调换成 2001 年第八期债券的部分作为一只单独的债券进行交易，在选择权中止之后由中央结算公司办理该债券与 2001 年第九期债券的合并手续；有关具体事宜另见中央结算公司届时通知。
2003 二十六期国开金融债	本期债券的持有者有权利选择在债券第一次付息（2004 年 8 月 27 日）或第二次付息（2005 年 8 月 27 日）后将持有的全部或部分债券按面值调换为我行发行的 2001 年第八期债券（7 年期浮动利率债券，基本利差 0.648%。起息日为 2001 年 8 月 27 日，兑付日为 2008 年 8 月 27 日，每年的 8 月 27 日为付息日（遇节假日顺延），调换比例为 1：1，调换数量最低为 1000 万元面值或其整数

	倍。本期债券的持有者必须在 2004 年 8 月 30 日至 9 月 3 日间，或 2005 年 8 月 28 日至 9 月 1 日间，提出调换债券的指令，将其传真至中央国债登记结算有限公司（以下简称“中央结算公司”）。本期债券如调换成我行发行的 2001 年第八期债券，在中央结算公司办理完有关手续后可以同 2001 年第八期债券合并交易。本期债券在 2005 年 9 月 1 日选择权中止之前，未调换成 2001 年第八期债券的部分作为一只单独的债券进行交易，在选择权中止之后由中央结算公司办理该债券与 2001 年第九期债券的合并手续；有关具体事宜另见中央结算公司届时通知。 本期债券自上市之日起与我行发行的 2003 年第二十二期债券合并交易。
2004 二期国开金融债*	本期债券的任何持有人均可选择在 2009 年 2 月 25 日要求发行人全部或部分赎回债券本金，但需至少提前一个月，即于 2009 年 1 月 25 日之前告知中央国债登记结算有限责任公司（以下简称中央结算公司）托管部，具体操作办法见届时中央结算公司的通知。 本期债券不设定发行人主动赎回事项，仅设定持有人选择提前兑付的权利。
2004 五期国开金融债	本期债券的持有者有权利选择在本期债券第五次付息后将持有的全部或部分债券调换为我行发行的 2004 年第六期债券，调换比例为 1：1，调换数量最低为面值 1000 万元或其整数倍。本期债券的持有者必须在 2009 年 4 月 17 日—4 月 24 日间提出调换债券的指令，将其传真至中央国债登记结算有限公司；有关具体事宜另见中央国债登记结算有限公司届时通知。

附录 3 利率期限结构估计程序(MATLAB)

1．基础数据

1.1 BONDDATA

债券代码	000696	000896	009704	009905	009908	010004	010010	010103	010107	010110	010112	010115	010203	010210	010213	010214	010215	010301	010303	010307	010308	010311	010401	010403	010404
发行日期	1996-6-14	1996-11-1	1997-9-5	1999-8-20	1999-9-23	2000-5-23	2000-11-14	2001-4-24	2001-7-31	2001-9-25	2001-10-30	2001-12-18	2002-4-18	2002-8-16	2002-9-20	2002-10-24	2002-12-6	2003-2-17	2003-4-17	2003-8-20	2003-9-17	2003-11-19	2004-3-15	2004-4-20	2004-5-25
到期日期	2006-6-14	2003-11-1	2007-9-5	2007-8-20	2009-9-23	2010-5-23	2007-11-14	2008-4-24	2021-7-31	2011-9-25	2011-10-30	2008-12-18	2012-4-18	2009-8-16	2017-9-20	2007-10-24	2009-12-6	2010-2-17	2023-4-17	2010-8-20	2013-9-17	2010-11-19	2005-3-15	2009-4-20	2011-5-25
票面利率	11.83%	8.56%	9.78%	3.28%	3.30%	+0.62%	+0.38%	3.27%	4.26%	2.95%	3.05%	3.00%	2.54%	2.39%	2.60%	2.65%	2.93%	2.66%	3.40%	2.66%	3.02%	3.50%		4.42%	4.89%
期限	10 年	7 年	10 年	8 年	10 年	10 年	7 年	7 年	20 年	10 年	10 年	7 年	10 年	7 年	15 年	5 年	7 年	7 年	20 年	7 年	10 年	7 年	1 年	5 年	7 年
附注	附息券	附息券	附息券	附息券	附息券	浮息券	浮息券	附息券	附息券	附息券	附息券	附息券	附息券	附息券	附息券	附息券	附息券	附息券	附息券	附息券	附息券	附息券	贴现券	附息券	附息券
发行量	250	200	130	160	200	140	120	120	240	200	200	200		200	240	224	600	700	260	460	163.8	360	381.6	304.6	367.5
上市日期	1996-7-12	1996-11-21	1997-9-25	1999-9-6	1999-10-13	2000-6-2	2000-11-27	2001-5-10	2001-8-20	2001-10-11	2001-11-13	2002-1-4	2002-4-29	2002-9-2	2002-10-9	2002-11-1	2002-12-16	2003-2-26	2003-4-25	2003-9-1	2003-9-25	2003-12-2	2004-3-24	2004-4-30	2004-6-7
年付息次数	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1		1	1
历次付息日期		1999-11-1	1999-9-5	1999-8-20	1999-9-23																				

	2000-6-14	2000-11-1	2000-9-5	2000-8-20	2000-9-23	2000-5-23	2000-11-14																		
	2001-6-14	2001-11-1	2001-9-5	2001-8-20	2001-9-23	2001-5-23	2001-11-14	2001-4-24	2001-7-31	2001-9-25	2001-10-30	2001-12-18													
									2002-1-31																
下次付息日	2003-6-14	2003-11-1	2003-9-5	2003-8-20	2003-9-23	2003-5-23	2003-11-14	2003-4-24	2003-7-31	2003-9-25	2003-10-30	2003-12-18	2003-4-29	2003-9-2	2003-10-9	2003-10-24	2003-12-6	2004-2-17	2003-10-17						

1.2 PRICE（上还证券交易所 2001－2004 国债交易数据）

2. 估计程序

```
maxtime=max(BONDDATA0(6,:));%max(BONDDATA(6,:))最长期限债券年限
Discount=zeros(825,5);

i=1; %此循环遍历每个交易日，计算每天的利率期限结构
while PRICE(i,1)<38156
    Bondnum=25;
    BONDDATA=[BONDDATA0;PRICE(i,2:26)];
    j=25;
    while j>0
        if isnan(BONDDATA(10,j))==1
            BONDDATA(:,j)=[];
```

```
            Bondnum=Bondnum-1;
        end
        j=j-1;
    end

%此循环为现金流分解,将某一天债券的现金流进行分解，产生不同债券在以后不同时刻的现金流。
    c=zeros(Bondnum,maxtime*2); %maxtime*2 为最长期限现金流的期数
    for j=1:Bondnum %总共有 Bondnum 只债券交易
        sdate=PRICE(i,1);
        edate=BONDDATA(3,j); %edate 为取第 j 只债券的到期日
        yrdif=yearfrac(sdate,edate,0); %从 sdate 到期日的年份数
        dif=yrdif-fix(yrdif);
        switch BONDDATA(9,j)
            case 1
                if dif==0 %计算年付息频率为 1，非整数年份数 dif 为 0 时的现金流
                    y=yrdif; %y 为非整年份数 dif 为 0 时的现金流次数
                    a=BONDDATA(5,j); %a 年付息频率为 1 时的现金流
                else %计算年付息频率为 1，非整数年份数 dif 不为 0 时的现金流次数
                    y=fix(yrdif)+1; %y 为非整数年份数不为 0 时的现金流次数
                    a=BONDDATA(5,j); %a 年付息频率为 1 时的现金流
                end
            case 2
                if dif==0.5 %计算年付息频率为 2, 非整数年份数 dif 为 0.5 时的现金流
                    y=yrdif*2; %y 为非整数年份数 dif 为 0.5 时的现金流次数
```

```
            a=BONDDATA(5,j)/2;%a 为年付息频率为 2 时的现金流
        end
        if dif>0.5 %计算年付息频率为 2，非整数年份数 dif 大于 0.5 时的现金流
                y=fix(yrdif)*2+2;%非整数年份数 dif 大于 0.5 时的现金流次数
                a=BONDDATA(5,j)/2;
        end
        if dif<0.5 %计算年付息频率为 2，非整数年份数 dif 小于 0.5 时的现金流
            y=fix(yrdif)*2+1; %y 非整数年份数 dif 小于 0.5 时的现金流次数
            a=BONDDATA(5,j)/2;
        end
    otherwise
        error('This is impossible')
    end
    for k=1:y
        if k<y
            c(j,k)=a; %y 为相应债券的现金流次数，此时为小于到期期数时的现金流
        else
            c(j,k)=a+100; %到期时的现金流
        end
    end
end

%此循环为产生现金流对应的时刻（年份数）
t=zeros(Bondnum,maxtime*2);
```

```
for j=1:Bondnum%有 Bondnum 只债券
    sdate=PRICE(i,1);
    edate=BONDDATA(3,j); %edate 为取第 j 只债券的到期日
    yrdif=yearfrac(sdate,edate,0); %从 sdate 到期日的年份数
    dif=yrdif-fix(yrdif);
    switch BONDDATA(9,j)
        case 1
            if dif==0
                y=yrdif;
                a=1; %当前时刻为付息日时，现金流对应的时刻应为年份数加 1。变量 a 即为要加上的数
            else %dif 不为 0
                y=fix(yrdif)+1;
                a=dif; %a 为求现金流对应的时刻时，需年份数加上的那个数
            end
        case 2
            if dif==0.5
                y=yrdif*2;
                a=0.5;
            end
            if dif>0.5
                y=fix(yrdif)*2+2;
                a=dif-0.5;
            end
            if dif<0.5 %dif 小于 0.5
```

```
                    y=fix(yrdif)*2+1;
                    a=dif;
                end
            otherwise
                error('This is impossible')
        end
        for k=1:y
            t(j,k)=a+(1/BONDDATA(9,j))*(k-1); %现金流对应的时刻，BONDATA(9,j)为年付息频率
        end
        for k=(y+1):maxtime*2
            t(j,k)=1;%剩余的期限赋值为 1，方便 Nelsen Siegel 模型的计算
        end
end

%多项式样条拟合
%生成用于回归的系数矩阵
Redata=zeros(Bondnum,6);
for j=1:Bondnum
    a=0;
    bb=0;
    cc=0;
    d1=0;
    d2=0;
    d3=0; %回归参数的初值赋为 0
    for l=1:maxtime*2
```

```
    a=a+c(j,l); %本金和息票和
    bb=bb+c(j,l)*t(j,l);
    cc=cc+c(j,l)*(t(j,l).^2); %现金流叠加
    if t(j,l)>=8
        td1=t(j,l).^3-(t(j,l)-5).^3;
        td2=(t(j,l)-5).^3-(t(j,l)-8).^3;
        td3=(t(j,l)-8).^3; %t(j,l)>=8 时
    end
    if t(j,l)<8
        td1=t(j,l).^3-(t(j,l)-5).^3;
        td2=(t(j,l)-5).^3;
        td3=0;
    end
    if t(j,l)<5
        td1=t(j,l).^3;
        td2=0;
        td3=0;
    end
    d1=d1+c(j,l)*td1;
    d2=d2+c(j,l)*td2;
    d3=d3+c(j,l)*td3;
end
Redata(j,2)=bb;
Redata(j,3)=cc;
Redata(j,4)=d1;
```

```
            Redata(j,5)=d2;
            Redata(j,6)=d3;
            Redata(j,1)=BONDDATA(10,j)-a; %现价减去常数项
        end
        b=robustfit(Redata(:,2:6),Redata(:,1),'bisquare',4.685,'off');
        Discount(i,:)=b';%
        i=i+1;
    end

    clear Bondnum
    clear Redata
    clear a
    clear b
    clear bb
    clear c
    clear cc
    clear d1
    clear d2
    clear d3
    clear dif
    clear edate
    clear i
    clear j
    clear k
    clear l
```

```
clear maxtime
clear sdate
clear t
clear td1
clear td2
clear td3
clear y
clear yrdif
```

附录　4 在 Matlab 中估计 BDT 模型

BDT 利率树代表的是在一段时间的利率的动态演变过程，我们将如何利用 Matlab 中的金融衍生工具箱构造 BDT 利率树。

（一）　建立 BDT 利率树

1．构造 BDT 利率树

Matlab 使用 bdttree 函数来创建一个 BDT 利率树，调用该函数的语法为

BDTTree = bdttree(VolSpec, RateSpec, TimeSpec)

这个函数有三个输入参数，其中 VolSpec 是利率波动率的期限结构参数，它用 bdtvolspec 函数来设定。RateSpec 是利率期限结构参数，它用 intenvset 函数来设定。TiemSpec 是树图时间展开结构参数，它用 bdttimespec 函数来设定。

（1）设定波动率期限结构（VolSpec）

bdtvolspec 函数用来设定利率波动率的期限结构，调用 bdtvolspec 函数的语法为：

VolSpec = bdtvolspec(ValuationDate，VolDates，VolCurve，InterpMethod)

bdtvolspec 函数的输入参数有 4 个，ValuationDate 是利率树中的第一个观测日，也是估值的日期；VolDates 是收益率波动率的结束日期组成的向量；VolCurve 是收益率波动率组成的向量；还有一个可选参数 InterpMethod 设定的是插补（interpolation）的方法，默认的方法是线性插值。

例：

```
ValuationDate = datenum('01-01-2000');
EndDates = datenum(['01-01-2001'; '01-01-2002'; '01-01-2003';'01-01-2004'; '01-01-2005']);
Volatility = [.2; .19; .18; .17; .16];
BDTVolSpec = bdtvolspec(ValuationDate, EndDates, Volatility)
```

输出结果为：

```
BDTVolSpec =
FinObj: 'BDTVolSpec'
```

ValuationDate: 730486

VolDates: [5x1 double]

VolCurve: [5x1 double]

VolInterpMethod: 'linear'

（2）设定利率期限结构（RateSpec）

intenvset 函数用来设定利率期限结构。它的调用格式为：

RateSpec = intenvset('Compounding',1,'Rates', Rates,'StartDates', StartDates, 'EndDates', EndDates,'ValuationDate', ValuationDate)

例：

Compounding = 1;

Rates = [0.02; 0.02; 0.02; 0.02];

StartDates = ['01-Jan-2000';'01-Jan-2001';'01-Jan-2002';'01-Jan-2003'];

EndDates = ['01-Jan-2001';'01-Jan-2002';'01-Jan-2003';'01-Jan-2004'];

ValuationDate = '01-Jan-2000';

RateSpec = intenvset('Compounding',1,'Rates', Rates,'StartDates', StartDates, 'EndDates', EndDates,'ValuationDate', ValuationDate)

输出结果为：

RateSpec =

FinObj: 'RateSpec'

Compounding: 1

Disc: [4x1 double]

Rates: [4x1 double]

EndTimes: [4x1 double]

StartTimes: [4x1 double]

EndDates: [4x1 double]

StartDates: [4x1 double]

ValuationDate: 730486

Basis: 0

EndMonthRule: 1

可以用datedisp函数检验定义在变量RateSpec.中日期。例如

datedisp(RateSpec.ValuationDate)

输出结果将是

01-Jan-2000

（3）设定树图时间展开结构（TiemSpec）

bdttimespec 函数用来设定 BDT 利率树图时间展开结构，这个结构定义了从观测时间到对应日期的映射。调用 bdttimespec 函数的格式为：

TimeSpec = bdttimespec(ValuationDate, Maturity, Compounding)

其中 ValuationDate 是树图中的第一个观测日，Maturity 是在树图节点上发生现金流的日期，Compounding 是每年计复利的次数。

用设定利率期限结构相同的参数调用 bdttimespec 就可以设定对应利率树图的时间展开结构。

例：

Maturity = EndDates;

TimeSpec = bdttimespec(ValuationDate, Maturity, Compounding)

则输出结果为：

TimeSpec =

FinObj: 'BDTTimeSpec'

ValuationDate: 730486

Maturity: [4x1 double]

Compounding: 1

Basis: 0

EndMonthRule: 1

要注意的是在TimeSpec中设定的到期日并不一定要和设定利率期限结构的时候使用的EndDates一致。

例：构造一个 BDT 利率树

使用前面的例子中设定的波动率期限结构，利率期限结构和树图时间展开结构作为 bdttree 的输入参数。

BDTTree = bdttree(BDTVolSpec, RateSpec, TimeSpec)

输出结果为：

BDTTree =

FinObj: 'BDTFwdTree'

VolSpec: [1x1 struct]

TimeSpec: [1x1 struct]

RateSpec: [1x1 struct]

tObs: [0 1.00 2.00 3.00]

TFwd: {[4x1 double] [3x1 double] [2x1 double] [3.00]}

CFlowT: {[4x1 double] [3x1 double] [2x1 double] [4.00]}

FwdTree: {[1.02] [1.02 1.02] [1.01 1.02 1.03] [1.01 1.02 1.02 1.03]}

（二）BDT 利率树的运用

在使用 BDT 模型的时候，Matlab 金融衍生工具箱用树图来代表利率和价格。这些树图包含了几个 Matlab 结构，这些结构包含了用来解释树图所含信息的所有信息。现在我们看看 BDT 利率树图结构的详细信息。

1． BDT 利率树图的结构

输入 BDTTree

输出结果为

BDTTree =

FinObj: 'BDTFwdTree'

VolSpec: [1x1 struct]

TimeSpec: [1x1 struct]

RateSpec: [1x1 struct]

tObs: [0 1 2 3]

TFwd: {[4x1 double] [3x1 double] [2x1 double] [3]}

CFlowT: {[4x1 double] [3x1 double] [2x1 double] [4]}

FwdTree: {1x4 cell}

FwdTree 包含的是实际的利率树，它在 Matlab 中用一个元素矩阵来表示，其他变量中包含着解释 FwdTree 的元素的信息。其中最重要的是 VolSpec、TimeSpec 和 RateSpec，它们分别包含了波动率期限结构、树图时间展开结构以及利率期限结构的信息。

输入

[BDTTree.RateSpec.StartTimes BDTTree.RateSpec.EndTimesBDTTree.RateSpec.Rates]

显示结果为：

ans =

0 1.0000 0.1000

0 2.0000 0.1100

0 3.0000 0.1200

0 4.0000 0.1250

下面是查看第 2、3 和 4 期的利率的命令与输出结果：

BDTTree.FwdTree{2}

ans =

1.0979 1.1432

BDTTree.FwdTree{3}

ans =

1.0976 1.1377 1.1942

BDTTree.FwdTree{4}

ans =

1.0872 1.1183 1.1606 1.2179

2．用 treepath 来验证结果

treepath 函数可以用来观察从根节点出发的一条利率演变路径。举个例子，设有一条利率路径从根节点出发，然后上行、下行最后再下行。我们要看在这条路径上利率的演变过程，可以用下面的命令：

FRates = treepath(BDTTree.FwdTree, [1 2 2])

返回结果为：

FRates =

1.1000

1.0979

1.1377

1.1606

3．树图结构的图形显示

treeviewer 函数可以用图形的形式来看利率树图，调用格式为：

treeviewer(BDTTree)

附录 5 国家开发银行 2004 年第 2 期金融债利率二叉树估计程序

```
%建立 BDT 利率二叉树
%设定波动率期限结构
ValuationDate = datenum('02-25-2004');
EndDates = datenum(['02-25-2005';'02-25-2006';'02-25-2007';'02-25-2009';'02-25-2011';'02-25-2014']);
Volatility = [1.615482986;1.365956234;1.870393452;4.933856902;10.73668942;6.973464682];

BDTVolSpec = bdtvolspec(ValuationDate, EndDates, Volatility)

%设定利率期限结构
StartDates = ['25-Feb-2004'];
EndDates =   ['25-Feb-2005';'25-Feb-2006';'25-Feb-2007';'25-Feb-2009';'25-Feb-2011';'25-Feb-2014'];
Compounding = 1;
ValuationDate = ['25-Feb-2004'];
Rates = [0.0554;0.0468;0.0406;0.0364;0.0408;0.04];
RateSpec = intenvset('Compounding',Compounding,'StartDates',...
StartDates, 'EndDates', EndDates,'Rates', Rates, 'ValuationDate', ValuationDate)
Compounding = 1;
RateSpec = intenvset(RateSpec,'Compounding',Compounding,'StartDates',StartDates, 'EndDates', EndDates,'Rates', Rates, 'ValuationDate', ValuationDate)


%设定树图时间展开结构
StartDates =   ['25-Feb-2004'];
EndDates =
```

```
['25-Feb-2005';'25-Feb-2006';'25-Feb-2007';'25-Feb-2008';'25-Feb-2009';'25-Feb-2010';'25-Feb-2011';'25-Feb-2012';'25-Feb-2013';'25-Feb-2014'];
    Compounding = 1;
    ValuationDate = ['25-Feb-2004'];
    Maturity = EndDates;

    TimeSpec = bdttimespec(ValuationDate, Maturity, Compounding)

    %构造一个 BDT 利率树
    BDTTree = bdttree(BDTVolSpec, RateSpec, TimeSpec)

    [BDTTree.RateSpec.StartTimes BDTTree.RateSpec.EndTimes BDTTree.RateSpec.Rates]

    Rate=zeros(10,10);
    for i=1:10
        Rate(i,1:i)=cell2mat(BDTTree.FwdTree(i));
    end
```

附录 6　结构性存款的定价结果

表 18　厦门工商银行“汇财宝”的定价结果

利率树图	(用 Matlab 估计得到）																				Time：年
1.0059																					0
1.0048	1.0073																				0.25
1.0044	1.0060	1.0102																			0.5
1.0041	1.0051	1.0076	1.0141																		0.75
1.0040	1.0047	1.0064	1.0105	1.0208																	1
1.0039	1.0044	1.0055	1.0082	1.0144	1.0290																1.25
1.0038	1.0042	1.0050	1.0068	1.0109	1.0201	1.0406															1.5
1.0038	1.0040	1.0046	1.0059	1.0087	1.0146	1.0273	1.0542														1.75
1.0037	1.0039	1.0043	1.0053	1.0073	1.0117	1.0211	1.0413	1.0848													2
1.0036	1.0038	1.0041	1.0048	1.0063	1.0093	1.0157	1.0289	1.0567	1.1146												2.25
1.0036	1.0038	1.0040	1.0046	1.0056	1.0079	1.0124	1.0216	1.0402	1.0782	1.1553											2.5
1.0036	1.0037	1.0039	1.0043	1.0052	1.0068	1.0100	1.0164	1.0291	1.0541	1.1035	1.2012										2.75
1.0036	1.0036	1.0037	1.0040	1.0045	1.0056	1.0078	1.0123	1.0216	1.0405	1.0791	1.1582	1.3201									3
1.0035	1.0036	1.0037	1.0039	1.0043	1.0051	1.0066	1.0098	1.0163	1.0294	1.0559	1.1095	1.2177	1.4364								3.25
1.0035	1.0036	1.0036	1.0038	1.0041	1.0047	1.0059	1.0082	1.0129	1.0223	1.0412	1.0788	1.1542	1.3050	1.6068							3.5
1.0035	1.0036	1.0036	1.0037	1.0039	1.0044	1.0053	1.0070	1.0104	1.0171	1.0303	1.0566	1.1085	1.2112	1.4143	1.8158						3.75
1.0035	1.0035	1.0036	1.0037	1.0039	1.0042	1.0048	1.0061	1.0087	1.0136	1.0233	1.0422	1.0793	1.1520	1.2943	1.5731	2.1196					4
1.0035	1.0035	1.0036	1.0036	1.0038	1.0040	1.0045	1.0055	1.0074	1.0110	1.0180	1.0315	1.0577	1.1085	1.2067	1.3969	1.7646	2.4755				4.25
1.0035	1.0035	1.0036	1.0036	1.0037	1.0039	1.0043	1.0051	1.0065	1.0092	1.0145	1.0245	1.0436	1.0803	1.1506	1.2852	1.5430	2.0371	2.9846			4.5
1.0035	1.0035	1.0036	1.0036	1.0037	1.0038	1.0041	1.0047	1.0058	1.0078	1.0117	1.0189	1.0326	1.0585	1.1072	1.1991	1.3724	1.6990	2.3144	3.4730		4.75
除息后存款的价值（不考虑提前赎回）:																					Time：年
1052.64																					0
1085.94	1005.28																				0.25
1106.51	1049.32	949.44																			0.5
1117.96	1078.31	1006.44	885.33																		0.75
1122.82	1095.79	1045.34	956.37	812.79																	1

1123.16	1104.97	1070.43	1007.16	899.20	733.73																1.25
1120.35	1108.25	1084.93	1041.22	963.14	834.70	648.87															1.5
1115.31	1107.42	1091.91	1062.33	1007.79	913.01	763.48	560.50														1.75
1108.92	1103.69	1093.54	1073.84	1036.88	969.77	856.44	685.74	469.58													2
1101.50	1098.06	1091.44	1078.57	1054.01	1008.40	927.35	795.21	606.47	385.89												2.25
1093.35	1091.11	1086.89	1078.46	1062.55	1032.28	976.81	880.55	729.38	525.88	307.92											2.5
1084.71	1083.37	1080.65	1075.34	1065.02	1045.51	1008.87	942.49	830.19	660.77	446.80	238.25										2.75
1075.78	1074.97	1073.31	1069.94	1063.51	1051.13	1027.63	983.82	905.60	776.63	589.95	369.71	176.23									3
1066.71	1066.11	1065.09	1063.00	1058.95	1051.15	1036.40	1008.42	956.95	866.91	722.79	524.00	305.97	132.90								3.25
1057.41	1056.98	1056.44	1055.14	1052.67	1047.87	1038.68	1021.33	988.80	929.82	828.51	671.43	464.89	253.86	101.52							3.5
1048.03	1047.72	1047.38	1046.63	1045.19	1042.31	1036.80	1026.33	1006.60	970.05	904.59	794.24	627.98	418.73	217.42	82.43						3.75
1038.54	1038.39	1038.12	1037.70	1036.83	1035.23	1032.08	1026.03	1014.53	993.12	953.68	883.84	768.09	597.71	390.19	198.37	74.57					4
1028.98	1028.88	1028.68	1028.56	1028.05	1027.22	1025.45	1022.14	1015.96	1004.29	982.50	942.82	873.00	758.53	592.14	391.49	206.22	83.49				4.25
1019.37	1019.32	1019.17	1019.12	1018.92	1018.52	1017.66	1016.00	1013.05	1007.43	996.76	977.14	941.43	878.85	776.37	626.26	441.05	260.31	126.64			4.5
1009.70	1009.70	1009.60	1009.60	1009.50	1009.40	1009.10	1008.50	1007.39	1005.40	1001.52	994.44	981.25	957.24	915.13	844.99	738.29	596.36	437.79	291.74		4.75
1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	5
选择权价值树图：MAX(持有，执行)																					
62.49																					0
85.94	39.77																				0.25
106.51	56.23	23.89																			0.5
117.96	78.31	34.82	13.45																		0.75
122.82	95.79	49.89	20.28	7.00																	1
123.16	104.97	70.43	29.99	11.00	3.28																1.25
120.35	108.25	84.93	43.57	16.90	5.43	1.32															1.5
115.31	107.42	91.91	62.33	25.40	8.76	2.31	0.43														1.75
108.92	103.69	93.54	73.84	37.42	13.83	3.95	0.80	0.11													2
101.50	98.06	91.44	78.57	54.01	21.36	6.61	1.46	0.22	0.02												2.25
93.35	91.11	86.89	78.46	62.55	32.28	10.85	2.58	0.42	0.04	0.00											2.5
84.71	83.37	80.65	75.34	65.02	45.51	17.48	4.49	0.79	0.08	0.00	0.00										2.75
75.78	74.97	73.31	69.94	63.51	51.13	27.63	7.67	1.45	0.17	0.01	0.00	0.00									3
66.71	66.11	65.09	63.00	58.95	51.15	36.40	12.89	2.63	0.33	0.02	0.00	0.00	0.00								3.25
57.41	56.98	56.44	55.14	52.67	47.87	38.68	21.33	4.71	0.64	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00							3.5
48.03	47.72	47.38	46.63	45.19	42.31	36.80	26.33	8.33	1.22	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00						3.75
38.54	38.39	38.12	37.70	36.83	35.23	32.08	26.03	14.53	2.30	0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00					4
28.98	28.88	28.68	28.56	28.05	27.22	25.45	22.14	15.96	4.29	0.37	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00				4.25
19.37	19.32	19.17	19.12	18.92	18.52	17.66	16.00	13.05	7.43	0.75	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			4.5

9.70	9.70	9.60	9.60	9.50	9.40	9.10	8.50	7.39	5.40	1.52	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		4.75
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
存款的价值（考虑提前赎回）：P 不可赎回－选择权价值＋利息																					Time：年
990.15																					0
1026.40	991.90																				0.25
1026.40	1019.49	951.94																			0.5
1026.40	1026.40	998.02	898.28																		0.75
1026.40	1026.40	1021.85	962.49	832.19																	1
1026.40	1026.40	1026.40	1003.57	914.60	756.85																1.25
1026.40	1026.40	1026.40	1024.05	972.64	855.67	673.95															1.5
1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1008.79	930.65	787.56	586.47														1.75
1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1025.86	982.34	878.89	711.34	495.87													2
1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1013.44	947.14	820.16	632.65	412.27												2.25
1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	992.36	904.37	755.36	552.24	334.31											2.5
1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1017.80	964.40	855.80	687.08	473.20	264.65										2.75
1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1002.55	930.55	802.86	616.34	396.11	202.63									3
1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1021.93	980.72	892.98	749.17	550.40	332.37	159.30								3.25
1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1010.49	955.58	854.87	697.83	491.29	280.26	127.92							3.5
1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1024.67	995.23	930.90	820.64	654.38	445.13	243.82	108.83						3.75
1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1017.23	979.90	910.24	794.49	624.11	416.59	224.77	100.97					4
1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1008.54	969.22	899.40	784.93	618.54	417.89	232.62	109.89				4.25
1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1022.42	1003.54	967.83	905.25	802.77	652.66	467.45	286.71	153.04			4.5
1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1026.40	1020.84	1007.65	983.64	941.53	871.39	764.69	622.76	464.19	318.14		4.75
1026.40	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	1006.60	5

表 19　厦门建设银行“汇得利”的定价结果

利率树图	(用 Matlab 估计得到）												Time：年
1.0058													0
1.0049	1.0075												0.25
1.0045	1.0062	1.0108											0.5
1.0042	1.0054	1.0083	1.0159										0.75
1.0040	1.0048	1.0067	1.0112	1.0224									1
1.0039	1.0045	1.0058	1.0089	1.0160	1.0326								1.25
1.0038	1.0043	1.0052	1.0072	1.0118	1.0220	1.0446							1.5
1.0038	1.0041	1.0048	1.0063	1.0096	1.0164	1.0310	1.0621						1.75
1.0037	1.0039	1.0044	1.0055	1.0077	1.0125	1.0227	1.0447	1.0917					2
1.0037	1.0039	1.0042	1.0050	1.0067	1.0101	1.0173	1.0323	1.0635	1.1284				2.25
1.0036	1.0038	1.0041	1.0047	1.0059	1.0083	1.0133	1.0234	1.0437	1.0850	1.1687			2.5
1.0036	1.0037	1.0040	1.0045	1.0054	1.0073	1.0110	1.0182	1.0326	1.0609	1.1168	1.2272		2.75
除息后存款的价值（不考虑提前赎回）:													
897.19													0.00
923.86	880.86												0.25
941.83	914.87	859.99											0.50
954.39	937.67	903.36	835.14										0.75
963.47	953.26	932.14	889.50	807.27									1.00
970.41	964.17	951.42	925.28	873.57	777.08								1.25
976.04	972.28	964.68	949.13	917.84	857.20	747.56							1.50
980.77	978.65	974.19	965.12	946.74	910.52	841.53	720.23						1.75
985.06	983.86	981.39	976.27	966.06	945.53	905.32	829.85	700.00					2.00
989.04	988.30	987.02	984.33	978.87	968.06	946.56	905.11	828.73	699.60				2.25
992.86	992.47	991.78	990.49	987.94	982.85	972.76	953.05	915.57	847.07	731.75			2.50
996.45	996.35	996.05	995.56	994.67	992.79	989.16	982.16	968.46	942.63	895.45	814.89		2.75
1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	3.00

选择权价值树图：MAX(持有，执行)													
0.00													0
0.00	0.00												0.25
0.00	0.00	0.00											0.5
0.00	0.00	0.00	0.00										0.75
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00									1
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00								1.25
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00							1.5
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00						1.75
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00					2
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00				2.25
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			2.5
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		2.75
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3
存款的价值（考虑提前赎回）：P 不可赎回－选择权价值＋利息													
897.19													0
923.86	880.86												0.25
941.83	914.87	859.99											0.5
954.39	937.67	903.36	835.14										0.75
963.47	953.26	932.14	889.50	807.27									1
970.41	964.17	951.42	925.28	873.57	777.08								1.25
976.04	972.28	964.68	949.13	917.84	857.20	747.56							1.5
980.77	978.65	974.19	965.12	946.74	910.52	841.53	720.23						1.75
985.06	983.86	981.39	976.27	966.06	945.53	905.32	829.85	700.00					2
989.04	988.30	987.02	984.33	978.87	968.06	946.56	905.11	828.73	699.60				2.25
992.86	992.47	991.78	990.49	987.94	982.85	972.76	953.05	915.57	847.07	731.75			2.5
996.45	996.35	996.05	995.56	994.67	992.79	989.16	982.16	968.46	942.63	895.45	814.89		2.75
1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	3

后 记

经过艰苦地努力，论文写作终于接近尾声，论文从找一个合适的题目到资料收集，阅读文献、编写程序、以及成文和加工整理，每一环节都是十分辛苦的过程。不过，无论在理论水平还是研究能力上，都得到一次有益的锻炼和提升，我想这应该是我从论文写作中获得的最大收获。

论文得以顺利完成要感谢我的老师和同学：

首先要感谢的是我的导师郑振龙教授。郑老师既是我攻读硕士的导师也是我攻读博士的导师，从硕士到博士，郑老师都不遗余力地精心教导，传授给我一生都受用不尽的知识，这是我一生最大的财富。郑老师在研究、工作和生活中的睿智让我佩服不已。郑老师的教学理念系统、科学，而且一直走在国内的前沿，能成为郑老师的弟子我感觉很幸运。

特别想要感谢的是魏巍贤教授。感谢魏老师在计量方面对我的悉心指导。魏老师对学术的执着和严谨，从过去到现在以致将来都是我学习的榜样。

此外，在厦大金融系求学十年，还要感谢金融系的张亦春教授、林宝清教授、江曙霞教授、朱孟楠教授、郑鸣教授、何孝星教授、陈国进教授、邱崇明教授、李晓峰教授，及系里其他老师给予我的支持和帮助。

深深感谢陈蓉、陈惠玲和邱文华，感谢你们在学习和生活中给我以亲人般地支持和照顾。还要感谢林海师兄在学术上指导，感谢贺涛为我提供了重要的数据，感谢郭晓武、王保合、郑泽星、唐革榕、黄兴李、冯玲、陈淼鑫、马喜德、俞琳、张睿，还有曾志钊、谢贞发、甘少浩、藤宇、赵正堂……你们的同学之情是我最难忘的回忆。

最后还要感谢我的家人，你们是我所有动力的源泉。

康朝锋

2004 年 12 月于厦门大学