学校编码：10384　　　　　　　　　　分类号_______密级 ______

学　　号：S200342019　　　　　　　UDC_____________________

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

中国可变现金流债券估值研究

Valuation of the Bond with alterable cash flow in China

贺　涛

指导教师姓名：　郑振龙 教授、博导

专业名称：　金融学

论文提交日期：　2006年3月

论文答辩日期：　2006年3月

学位授予日期：　2006年　月

答辩委员会主席：_________

评　　阅　　人：_________

2006年03月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：　贺　涛

2006年3月18日

论文摘要

本文主要研究可变现金流债券的估值方法，并结合中国实际加以运用。本文分理论部分和实践部分两大部分。

估值（定价）是决定金融资产公平价值的过程，基本原则是：任何金融资产的价值等于预期现金流的现值。由于本金的分期摊销或内嵌期权，传统的定价方法---到期收益率法不再适用可变现金流债券的估值。

对于可变现金流债券，估值必须首先知道市场的利率期限结构，并在此基础上推导利率未来的动态分布。基于未来利率水平计算债券的现金流并以合适的利率贴现，最终得到可变债券的价值。

本文首先讨论了如何从市场提取信息拟合即期利率曲线的方法。主流的利率期限结构静态估计方法分为票息剥离法、样条法和参数模型法。本文在阐述理论的基础上，运用实际数据，对上述所有方法的拟合效果进行了比较，并得出现阶段指数样条法比较符合中国实际。这一结论是本文主要贡献之一。

其次分析指出内嵌期权债券估值的核心是分析未来利率的变化、以及这些变化对现金流的影响。本文回顾了衍生产品定价的基础理论---无套利理论和风险中性定价原理。介绍了模拟未来利率动态的随机模型，均衡模型和无套利模型，以及将连续利率模型运用现实离散世界的数值方法----二叉树法和蒙特卡罗模拟。最后讨论了如何通过零波动价差和期权调整价差，计算有效久期和有效凸性测量可变现金流债券的利率风险。

运用原理、利用中国债券市场真实成交数据，运用BDT模型对国开行含权债券进行定价和利率风险测量。估值过程充分考虑了国开行的信用风险，这点也是本文的主要贡献之一。

本文另外的主要贡献是对中国资产证券化产品的定价进行了初步研究。资产证券化产品是中国市场新兴的投资工具，本文介绍了资产支持证券的基本原理以及估值的一般方法，并对中国市场的ABS和MBS产品的价值进行了初探。

关键词：利率期限结构；期权调整价差；含权债券

Abstract

The purpose of this paper is to do research on pricing of the bond with alerted cash flow in China.

Valuation is the process of determining the fair value of financial assets. The fundamental principle of valuation is that the value of any financial asset is the present value of the expected cash flows. The paper analysis the lack of the prevailing valuation model when pricing the bond with alerted cash flow due to amortizable principal or embedded option, and review the basic theories about estimation of term structure ,no-arbitrage condition ,risk-neutral valuation ,the dynamic models of term structure and OAS。

The paper use the transactions data of Chinese Bond market to estimate the interest rate term structure, and find that the exponential spline approach is appropriate .Based on BDT model, pricing and risk analysis is done to the callable bond and puttable bond issued by Chinese Government Development Bank, with the MATLAB and EXCEL. Asset-backed securities and mortgage-backed securities are becoming popular in China. This paper reviews the theories of the Asset Securitization and make some effort to value the ABS and MBS in China.

Key Words: Interest Rate Model; OAS;Bond With Embedded Option

目　录

Contents

图表目录

引 言

随着利率市场化进程度的加快，近年来中国债券市场蓬勃发展、创新不断。截至2006年2月，场内外交易的债券达551只，托管面值7.71万亿元。买断式回购、远期交易、互换等创新交易方式相继推出，内嵌期权的含权债券以及ABS、MBS等创新品种不断增多。中国债券市场已经成为央行货币政策实施的主要渠道以及机构投资者进行资产配置的重要场所。然而与快速发展不断扩大的市场规模相比，市场主流的债券投资研究方法依然落后，对含权债等创新品种定价鲜有研究。

传统债券的投资期限和票面利息都是事先固定的，投资者面对的是完全可以预期的现金流。传统主流的债券估值是到期收益率法（Yield to maturity)，即假设投资人持有债券到期、按相同的利率进行再投资，并对所有的现金流用一个利率（到期收益率）进行贴现。对于收益率曲线平坦，按期支付利息、到期一次性还本付息的传统债券来说，该方法简单直观且误差不大。然而随着市场发展、利率变动的加剧、新发债券条款不断创新，传统定价方法已不能准确判断债券的价值。

理论上债券的价值是未来现金流的贴现。对于固定现金流的债券，估值的关键在于准确估计贴现因子，即用与不同期限现金流相对应的即期利率对现金流进行贴现。获取当前市场利率期限结构的方法称之为利率期限结构的静态估计，包括：票息剥离法、样条法和参数模型法等。

在得到市场利率期限结构以后，对于可变现金流债券估值，我们必须首先判断现金流的变化是否与未来的利率水平有关。如果无关则直接利用即期利率加合适的利差对现金流进行贴现；如果有关估值情况则变得复杂。现金流与未来利率水平有关的债券属于利率衍生品。利率衍生品估值的关键在于合理估计利率未来的变动，我们需要借助随机过程，包括均衡模型和无套利模型。现实世界是离散的世界，为了能够将连续的利率模型运用于现实世界，我们需要用蒙特卡罗模拟、二叉树等技术来估计利率模型。

利率衍生品定价的理论基础是无套利理论和风险中性定价原理。通过零息券价

格，我们可以构建无套利条件以使利率动态模型与当前市场的利率期限结构相适应，进而求得利率模型的参数模拟利率未来变动。在利率动态的基础上，结合期权条款可以得到各状态对应的现金流。判断未来现金流是否是路径依赖，如果不是路径依赖则运用二叉树模型进行贴现；如果是路径依赖则使用蒙特卡罗模型进行贴现。

本文首先介绍了利率期限结构的静态估计方法，其次阐述了无套利条件和风险中性定价原理，接着介绍了描述利率动态的随机过程模型以及估计方法，最后运用数值方法将这些理论运用于中国债券市场国开行含权债、资产证券化产品的估值研究。本文的主要贡献在于：

1、 运用中国市场真实数据，对主流利率期限结构静态估计方法的拟合效果进行了比较，总结并指出：指数样条法比较适合现阶段中国债券市场实际。

2、 运用BDT模型对国开行含权债券进行了定价，并在定价过程充分考虑了国开行的信用风险。

3、 资产证券化产品是中国债券市场的新生事物，本文对国开行ABS、建行MBS的价值进行了初探。

1 债券估值和利率期限结构

估值是决定金融资产公平价值的过程，基本原则是：任何金融资产的价值等于预期现金流的现值。

1.1 到期收益率估值方法的不足

传统的债券估值方法是到期收益率（Yield to Maturity）法。即假设债券持有到期、投资人以相同的利率进行再投资，以单一利率作为贴现利率对未来所有现金流进行贴现:

$$P(0,T)=\sum_{i=1}^{T}\frac{C_i}{(1+\mathrm{y})^i}$$

其中P（0，T）表示从现在时刻起，T时刻到期债券的价格；C_i表示i时刻的现金流；y表示到期收益率。到期收益率另外的主要功能是衡量债券利率风险的大小。即将债券价格对到期收益进行一阶求导，得到债券的修正久期：

$$\frac{dp}{dy}\frac{1}{p}=-\frac{1}{1+y}[\frac{1c}{1+y}+\frac{2c}{(1+y)^2}+\ldots+\frac{n(c+M)}{(1+y)^n}]\frac{1}{P}=-\mathrm{mod}ified\ duration$$

其中c表示票面利息，M表示到期本金。类似将债券价格对到期收益进行二阶求导，可以得到债券的凸性（Convexity）$\frac{d^2\mathrm{p}}{d\mathrm{y}^2}\frac{1}{p}$。

于是债券的利率风险可以表达为：

$$\frac{dp}{p}=\frac{dp}{dy}\frac{1}{p}dy+\frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{p}}{dy^2}\frac{1}{p}(dy)^2+\frac{error}{p}$$

到期收益率法明显的不足是：（1）假设各期限的利率相同，即假定利率曲线是水平的，这显然没有考虑利率的期限风险。（2）仅仅适用于传统的分期支付利息、到期一次偿还本金的债券。由于该类债券现金流确定、且到期支付的本金占了整个现金流的绝大部分，因此当实际利率曲线水平时，用到期收益率得出的价格与实际理论价值相差不大。

随着市场发展，利率波动的加剧、利率曲线变化频繁；债券品种的推成出新、尤其是现金流随未来利率水平变化的内嵌期权债券以及本金分期摊销的MBS、ABS等的出现，仅用单一贴现率的到期收益率法显然不能准确判断债券价值、刻画债券利率风险。

表1 不同利率环境下不同类型债券估值比较

例 子	期限	0	1	2	3	4	5	合 计
（一）水平的利率期限结构		10%	10%	10%	10%	10%		
1、传统债券现金流	利息		10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	
(票面利率 10%)	本金		0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	
	贴现值		9.09	8.26	7.51	6.83	68.30	100.00
2、本金分期摊销债券	利息		10.00	8.00	6.00	4.00	2.00	
(票面利率 10%)	本金		20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	
（本金分 5 年等额摊销）	贴现值		27.27	23.14	19.53	16.39	13.66	100.00
	期限	0	1	2	3	4	5	合 计
（二）倾斜向上的利率期限结构		10%	12%	14%	16%	18%		
1、传统债券现金流	利息		10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	
(票面利率 10%)	本金		0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	
	贴现值		9.09	7.97	6.75	5.52	48.08	77.42
2、本金分期摊销债券	利息		10.00	8.00	6.00	4.00	2.00	
(票面利率 10%)	本金		20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	
（本金分 5 年等额摊销）	贴现值		27.27	22.32	17.55	13.25	9.62	90.01

1.2 利率期限结构

债券的理论价值等于债券未来各期现金流贴现值的加总，即：

$$P(0,T)=\sum_{i=1}^{T}\frac{C_i}{(1+r_i)^i}$$

其中 r_i 是第i期的贴现利率。如果债券现金流可以确定，那么债券估值的关键就在于各期贴现利率的确定。

利率期限结构（Rate Term Structure），是指某个时点、不同期限的利率所组成的一条曲线。因为某个时点，零息票债券的到期收益率等于该期限的利率，所以利率期限结构也可以表示为某个时点零息票债券的到期收益率曲线。

利率曲线的形态各异，有时向右上方倾斜、有时水平而有时向右下方倾斜。解释利率曲线形态的理论被称为利率期限理论，大致可以分为纯预期理论、流动性溢价理论、期限偏好理论和市场分割理论四类。这些理论从市场对未来利率的预期、期限间的流动性溢价、投资者的偏好以及市场各期限债券供给等方面解释了利率曲线蕴含的市场信息，是债券定价和投资的基础性理论。关于这些理论国外学者已经进行了大量深入研究，本文不再赘述。

1.3 利率期限结构的静态估计

所谓利率期限结构的静态分析，就是指对某个时点的，整个利率期限结构的分析和估计。在一个存在零息票债券的市场上，我们可以通过直接求解这些零息票债券的到期收益率得到某个时点的利率期限结构。但是如果不存在零息票债券或者数量十分有限，那么这种方法就受到很大的限制，我们只能采取曲线拟合技术来估计利率期限结构，包括分段拟合和整体拟合。

分段拟合主要采用样条技术。McCulloch (1971)尝试了利率曲线的样条逼近。这种方法要求指定样条基函数，将贴现函数表示为基函数的线性组合，然后使用回归技术来拟合。McCulloch建议采用一个简单的二次多项式作为基函数，当数据呈现值域稀疏、点集稠密特征时可以达到理想的拟合效果。这种方法的缺陷是估计的远期利率曲线可能出现振荡。避免振荡的一个方法是增加基函数的阶数，比如使用三次样条。这种方法有很好的适应性，它不限制贴现函数的形式，但是这种方法估计出的远期利率可能为负数，而且比较不稳定，特别在最远端部分。由于这种技术生成的远期利率曲线无法用于合理地预期，Vasicek和Fong (1982)建议采用指数样条以生成一个渐进平坦的远期利率曲线。但是，Shea (1985)认为他们的模型拟合利率期限结构的能力与一般多项式样条的能力相仿，建议使用普通的样条函数。这些研究在最优化时通常采用回归技术，为了避免收益率曲线出现过度振荡，需要减少节点的数量，而这却是以拟合效果下降为代价。Fisher、Nychka和Zervos (1995)提出使用平滑样条技术，建议在最优化目标函数中增加一个粗糙惩罚项(Roughness Penalty)以获取远期利率曲线。该粗糙惩罚项由一个固定的平滑参数控制，它是通

过一般化的交叉认证程序(Generalized Cross Validation)生成的，可用于在同一个目标函数中平衡曲线的平滑度和拟合度。

整体拟合采用参数化模型以获得收益率曲线，模型需要估计的参数数量少于样条函数技术。Nelson和Seigel(1987)提出的一个参数化模型只有4个未知参数，Svennson(1994)对Nelson-Seigel模型进行了改进，增加了两个参数，提高了模型对复杂收益率曲线形状的拟合能力。Nelson-Seigel模型和Svennson模型拟合出的收益率曲线有较强的经济内涵，比较符合利率预期理论，已经被许多西方国家的中央银行所采用。国际清算银行BIS（1999）调查显示比利时、法国、德国、英国、西班牙、意大利、瑞典、挪威、加拿大、芬兰等国的中央银行采用参数化模型编制即期利率曲线，日本和美国的中央银行采用样条函数编制即期收益曲线。

以下我们具体介绍一下几种主流的利率期限结构静态估计方法。

1.3.1 息票剥离法（bootstrap method）

息票剥离法是将利息和本金从债券中进行剥离并在此基础上利用线性插值法估计整个期限结构无息票债券利率水平的一种方法。具体计算方法为：

首先根据经验假设一个最短期的利率（该假设对利率期限估计的影响较小）。假设市场上有两个债券，价格分别为P1,P2，短期债券的到期日为T1，到期之前不支付利息；长期债券的到期日为T3,T3>T1,在T2时刻支付一定利息C。

由于短期债到期前不支付利息，因此它类似零息券，其到期收益率为（连续复利）：

$$r_{T1} = \frac{\ln(M_1) - \ln(P_1)}{T_1},$$

M1是短期债券到期时获得的本息和。由于方程右边都是已知量，我们可以得到期限为T1的利率水平。

对长期券处理分两种情况：

当T2<T1时，可以通过T0、T1利率水平的线性插值求出期限为T2的利率水平：

$r_{T2}=\frac{T_2-T_0}{T_1-T_0}r_{T1}+\frac{T_1-T_2}{T_1-T_0}r_{T0}$，且因为 $P_2=Ce^{-r_{T2}T_2}+M_2e^{-r_{T3}T_3}$，所以

$$r_{T3}=\frac{(\ln M_2-\ln(P_2-Ce^{-r_{T2}T2}))}{T_3}.$$

当T2>T1时，可以假设T3期的利率水平为 r_{T3}，则T2期利率水平为：

$r_{T2}=\frac{T_2-T_1}{T_3-T_1}r_{T3}+\frac{T_3-T_2}{T_3-T_1}r_{T1}$，且 $P_2=Ce^{-r_{T2}T_2}+M_2e^{-r_{T3}T_3}$，通过单变量求解算出 r_{T3}，从而得出 r_{T2}。这个方法可以扩展到n个债券，m个付息日的市场。

息票剥离法计算误差相对较小，比较适合债券数量不多、市场不发达的即期收益率曲线构造。然而它假定两个最近期限的利率服从线性变化关系，因此对利率期限结构变动的描述显得简单，且由单个利率水平从短期到长期不断单变量求解得到利率曲线，计算比较麻烦。

1.3.2 样条法

MacCulloch（1971）将息票券看作若干零息券的组合，并首次提出贴现函数的概念，即：$P=\sum_{i=0}^{n}C_i f(i)$，

其中 $f(i)$ 表示期限i的单位零息券的贴现值。样条法就是估计贴现函数的表达式 $f(i)$，贴现函数表达式估计出来后，可以通过

$\mathrm{r_i}=\frac{-\ln f(i)}{i}$，求出各期限连续复利形式的利率r。

（1）多项式样条法

多项式样条法是由McCulloch提出的，它的主要思想是将贴现函数用分段的多项式函数来表示。

在实际应用中，多项式样条函数的阶数一般取为3，从而保证贴现函数及其一阶和二阶导数都是连续的。于是我们用下式表示期限为 t 的贴现函数B(t):

$$\mathrm{B}(t)=\begin{cases}B_0(\mathrm{t})=a_0+\mathrm{b}_0t+c_0t^2+d_0t^3, t\in[0,m]\\ B_m(\mathrm{t})=a_1+\mathrm{b}_1t+c_1t^2+d_1t^3, t\in[m,n]\\ B_n(\mathrm{t})=a_2+\mathrm{b}_2t+c_2t^2+d_2t^3, t\in[n,20]\end{cases}$$

其中m,n是样条函数的分段点，为了满足贴现函数及其导数的连续性，约束条件有

$$\begin{aligned}&B_0{}^{(\mathrm{i})}(m)=B^{(i)}{}_m(m),\\&B^{(i)}{}_m(n)=B_n{}^{(i)}(n),\\&B_0(0)=1\end{aligned},$$

其中i=0,1,2表示对函数求导的阶数。

利用约束条件可以减少贴现函数的参数到5个：b_0,c_0,d_0,d_1,d_2，即

$$\mathrm{B}(t)=\begin{cases}B_0(\mathrm{t})=1+\mathrm{b}_0t+c_0t^2+d_0t^3, t\in[0,m]\\ B_m(\mathrm{t})=1+\mathrm{b}_0t+c_0t^2+d_0[(t^3-(t-m)^3]+d_1(t-m)^3, t\in[m,n]\\ B_n(\mathrm{t})=1+\mathrm{b}_0t+c_0t^2+d_0[(t^3-(t-m)^3]+d_1[(t-m)^3-(t-n)^3]+d_2(t-n)^3, t\in[n,20]\end{cases}$$

通过贴现函数对市场债券现金流进行贴现得出的价格拟合市场的价格，即：

$$P_i=\sum_{t=0}^{n}C_tB(t)+\varepsilon_i,$$

通过目标函数

$$\sum_{i=1}^{w}\varepsilon_i{}^2=\sum_{i=1}^{w}[P_i-\sum_{t=0}^{n}C_tB(t)]^2,$$

最小化目标函数从而确定各参数。分段点m、n的选择可以根据市场实际情况综合考虑。

(2)指数样条法

考虑到贴现函数基本上是一个随期限增加而指数下降的函数, Vasicek 和Fong提出了指数样条法, 将贴现函数用分段的指数函数来表示。同样为了保证曲线的连续性和平滑性，人们通常采用三阶的指数样条函数：

$$\mathrm{B}(t)=\begin{cases}B_0(\mathrm{t})=a_0+\mathrm{b}_0e^{-ut}+c_0e^{-2ut}+d_0e^{-3ut},t\in[0,m]\\B_m(\mathrm{t})=a_1+\mathrm{b}_1e^{-ut}+c_1e^{-2ut}+d_1e^{-3ut},t\in[m,n]\\B_n(\mathrm{t})=a_2+\mathrm{b}_2e^{-ut}+c_2e^{-2ut}+d_2e^{-3ut},t\in[n,20]\end{cases}$$

我们也要求指数样条函数满足贴现函数及其导数的连续性约束条件,将13 个参数简化为6个得到:

$$\mathrm{B}(t)=\begin{cases}B_0(\mathrm{t})=1+\mathrm{b}_0(e^{-ut}-1)+c_0(e^{-2ut}-1)+d_0(e^{-3ut}-1),t\in[0,m]\\B_m(\mathrm{t})=1+\mathrm{b}_0(e^{-ut}-1)+c_0(e^{-2ut}-1)+d_0[e^{-3ut}-(e^{-ut}-e^{-um})^3-1)\\+d_1(e^{-ut}-e^{-um})^3,t\in[m,n]\\B_n(\mathrm{t})=1+\mathrm{b}_0(e^{-ut}-1)+c_0(e^{-2ut}-1)+d_0[e^{-3ut}-(e^{-ut}-e^{-um})^3-1)\\+d_1[(e^{-ut}-e^{-um})^3-(e^{-ut}-e^{-un})^3]+d_2(e^{-ut}-e^{-un})^3,t\in[n,20]\end{cases}$$

这样我们只有6 个独立的参数: $b_0,c_0,d_{0,}d_1,d_2,u$ 。最小化目标函数(与多项式样条法一样,分段点取法也相同),求取参数值。

样条法是假定整个样本区间服从某种非线性关系的条件下对整条利率期限结构同时估计,可以考虑较为复杂的利率期限结构形态,但是由于在贴现函数形式和分段点上有较大选择空间,因此导致估计结果会有差异,误差较息票剥离法大,且样条法只是纯统计技术的运用没有任何经济理论作为支撑。

1.3.3 参数模型

以上的两个样条法都首先拟合贴现函数$B(t)$, 尔后再求得即期利率来构造收益率曲线。由于样条法分段估计灵活度较大, 对于债券市场数据过于敏感, 这样市场价很小的变化可能会造成其中的参数的较大的变化,且没有什么经济意义,因此人们开始从利率理论入手构造函数,从整个期限上估计利率期限结构。

(1)**N-S模型**(Nelson-Siegel, 1987)是拟合期限结构的另一种常用方法,从20世纪末开始为众多国家的央行所采用(例如英国)。它的主要思想是通过建立远期瞬时利率的函数,从而推导出即期利率的函数形式。该模型的优点在于需要估计的参数相对较少,且其中的参数均具有明显的经济学含义(预期理论),相比之下,前

面提出的三次样条法仅是统计意义上的拟合。

在N-S模型中，远期瞬时利率满足如下方程：

$$f(t)=\beta_0+\beta_1 e^{-\frac{t}{\tau}}+\beta_2\frac{t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中，$f(t)$表示从0时刻开始，在未来时刻t的远期瞬时利率。β_0,β_1,β_2是模型的线性参数，τ是指数衰竭率。远期瞬间利率包括三项，第一项β_0是一个常数；第二项$\beta_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$是单调递减(或递增，若β1为负数)趋近于零的剩余期限t的函数；第三项$\beta_2\frac{t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$也是剩余期限t的函数，它使远期瞬间利率曲线产生驼峰状(或U形状，当β3为负数时)。当剩余期限趋近于无穷大时，远期瞬间利率就趋近于β0，当剩余期限趋近于零时，远期瞬间利率就趋近于常数β0＋β1 。因此，参数β0、β1、β2、τ可以被相应地解释为利率的长期水平、短期利率、即期收益率曲线的斜率和弯曲程度。

即期利率可看作远期利率的一个平均，其关系为$R=\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$，因此可推导出即期利率的公式，令$\beta_3=\frac{1}{\tau}$，即

$$R=\beta_0+\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_3 X}(1-e^{-\beta_3 x})-\beta_2 e^{-\beta_3 x}$$

限制函数为

$$DP_k=\sum_{i=1}^{n}CF_{k,i}\cdot D(t_{k,i})+\varepsilon_k,\forall k\in\{Market\ Bonds\}$$

其中，DP_k：债券k当日收盘全价

$CF_{k,j}$：债券 k 当日于未来第j期预计的现金流

$D(t_{k,i})=e^{-R(t_{k,i})\cdot t_{k,i}}$：根据期限结构曲线上计算得到的折现函数

ε_k：期限结构曲线对债券 k 价格拟合的误差项

由限制函数得到，$\varepsilon_k = DP_k - \sum_{i=1}^{n} CF_{k,j} \cdot D(t_{k,i})$，为使结果更接近市场，最小二乘法的目标函数为：

$$\min \sum w_k \varepsilon_k^2$$

w_k 是第k 个债券的权重因子。Vasicek 和Fong 将这些权重因子取为和债券的久期的平方成正比的量，这样，长期债券将占有较大的权重。而另外一些研究人员则选择反比于久期平方的权重，这使得短期债券占有较大的权重。

（2）Svensson扩展模型

Svensson（1994）对N-S模型进行了扩展，在N-S公式中再引入两个新的参数，从而进一步增加了N-S模型的拟合灵活性，并将远期瞬时利率表述为：

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_2 \frac{t}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_3 \frac{t}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

即期利率表示为：

$$R = \beta_0 + \beta_1 [\frac{(1-e^{-\frac{t}{\tau_1}})}{(\frac{t}{\tau_1})}] e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_2 [\frac{(1-e^{-\frac{t}{\tau_1}})}{(\frac{t}{\tau_1})} - e^{-\frac{t}{\tau_1}}] + \beta_3 [\frac{(1-e^{-\frac{t}{\tau_2}})}{(\frac{t}{\tau_2})} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}]$$

这个模型也被称为扩展的Nelson-Siegel 模型，已为国际上许多大的银行所采用，如法国中央银行，加拿大银行都采用过这个模型构造收益率曲线。

2 无套利理论和风险中性定价原理

选择一种利率期限结构静态估计方法、得到市场的利率曲线后，就可以为固定现金流的债券定价。但是当债券的现金流是可变的、无法预知的时候（例如利率期权涉及的现金流），要进行债券的估值，我们必须同时解决资金的时间价值问题和风险价值问题，为此我们需要运用“无套利理论和风险中性定价”这一衍生品定价的核心原理。

2.1 无套利理论

无套利理论是指当一个策略，其未来回报在任何状态不为负、而至少在一个状态下为正时，该策略现在时刻的成本必大于零。其隐含的意思是：如果一个期权的回报能够被一个组合完全复制，则期权的价值应该等于这个组合的价值，否则错误的定价就会导致套利活动的发生。

无套利理论经典的运用是Black-Scholes(1973)的股票欧式期权定价公式，它也是利率衍生产品定价框架的基础。

假设利率衍生产品的价格为 f ，其标的服从一个几何布朗运动：

$$dS/S = \mu dt + \sigma dz$$

其中，μ 表示收益率，σ 表示资产的波动率。无风险资产的变动可以表示为：$dB = rBdt$ 。B 表示无风险资产的价格。

考虑一个利率衍生产品、标的资产以及无风险资产的组合。

$$V = Q_f f + Q_S S + B\text{,}$$

Q_f 表示衍生证券的数量，Q_S 表示标的的数量。根据伊托引理，

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(dS)^2 = (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2})dt + \frac{\partial f}{\partial S}dS$$

所以，

$$dV = Q_f(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2})dt + Q_f \frac{\partial f}{\partial S}dS + Q_s dS + rBdt$$，

因此，只要令

$$Q_f \frac{\partial f}{\partial S}dS + Q_s dS = 0$$，即 $$Q_s = -Q_f \frac{\partial f}{\partial S}$$

就可以将组合中的随机项（风险源）消除掉，从而整个资产组合无风险，必须获得无风险收益。设 $Q_f = -1, Q_S = \frac{\partial f}{\partial S}$，令初始投资 $V = 0$，即 $B = -Q_f f - Q_s S = f - \frac{\partial f}{\partial S}S$。则

$$dV = (-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2})dt + r(f - \frac{\partial f}{\partial S}S)dt = rVdt = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS\frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0$$

这也就是B-S的偏微分方程。偏微分方程结合各种边界条件就可以求得各种利率衍生产品的价格。

以上核心思想是动态复制，通过标的资产和无风险证券的动态组合复制利率衍生证券的回报，反过来标的资产和利率衍生证券的动态组合可以构造出无风险证券，其内在原因是衍生证券和标的证券的风险源相同，所以我们可以通过动态地调整标的证券和衍生证券的比例来消除风险源对组合价值的影响，由此我们可以得出衍生证券价格必须满足的偏微分方程，进而求出衍生证券的价格。偏微分方程不一定有解析解，所以有时我们也要借助数值方法。

2.2 风险中性定价

在无套利条件下，存在一个世界，在这个世界里所有投资者对于风险都是无偏好的，资产未来回报率的期望值仅仅为无风险利率，这个世界被之称为风险中性世界。在风险中性世界中，必然存在一个与客观概率等价的风险中性概率测度，Q。按照风险中性概率贴现的资产未来回报的期望值，等于该资产现在的价格，即是一个

鞅过程（Harrison Kleps,1979）。

$$F_0 = E_0^Q[e^{-\int_0^T r(s)ds} F_T],$$

F0表示资产的现价，T表示未来某时刻，贴现因子r（s）是连续复利无风险利率。风险中性定价就是用风险中性概率测度，计算证券未来回报贴现值的期望值。

鞅过程证明如下：

假设利率衍生产品的价格服从下面的随机过程

$$dF(t)/F(t) = \mu_F dt + \sigma_F dz$$

其中 dz 是客观概率下的维纳过程。

联系风险中性概率测度和客观概率测度的纽带是市场风险价格，这个市场风险价格是经风险调整的，

$\frac{E(\mu_F) - r(t)}{\sigma_F}$。令 $d\tilde{z} = dz + \frac{\mu_F - r(t)}{\sigma_F} dt$，则

$$dF(t)/F(t) = \mu_F dt + \sigma_F (d\tilde{z} - \frac{\mu_F - r(t)}{\sigma_F} dt) = r(t)dt + \sigma_F d\tilde{z}$$

$F(t)$ 在新的测度中的漂移率变成了无风险利率，所以这个新测度是风险中性测度Q。无风险资产 $B(t)$ 服从

$$dB(t)/B(t) = r(t)dt$$

则在风险中性世界中

$$\begin{aligned} d\frac{F(t)}{B(t)} &= F(t)d\frac{1}{B(t)} + \frac{dF(t)}{B(t)} \\ &= -\frac{F(t)}{B(t)} r(t)dt + \frac{r(t)F(t)dt + \sigma(t)F(t)d\tilde{z}}{B(t)} \\ &= \frac{\sigma(t)F(t)}{B(t)} d\tilde{z} \end{aligned}$$

所以

$$\frac{F(t)}{B(t)}=\frac{F(0)}{B(0)}+\int_0^t\frac{\sigma_F F\left(t\right)}{B(t)}d\tilde{z}\ ,\quad E_0(\frac{F(t)}{B(t)})=\frac{F(0)}{B(0)}$$

即，$\frac{F(t)}{B(t)}$ 为一个鞅过程。

又因为 $d\ln B(t)=r(t)dt$，$\int_t^{\mathrm{T}}d\ln B(t)=\int_t^T r(s)ds$，$\ln B(T)/B(t)=\int_t^T r(s)ds$

所以 $\frac{B(t)}{B(T)}=\exp(-\int_t^T r(s)ds)$，因此

$$F\left(t\right)=B(t)E_t^Q[F(T)/B(T)]=E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)F_T\right]$$

3 利率动态模型

在风险中性世界中，如果知道了标的资产价格分布就可以计算衍生品未来的回报，将衍生品未来回报用无风险利率进行贴现，就可以得到衍生品的价格。所以对于现金流随未来利率水平变化的债券来说，估值的关键就是确定未来利率的动态过程。

Merton（1992）证明：只需要假设在任意短的时间内资产价格存在不确定性、并且方差有界，我们就可以用一个随机过程（Stochastic process）描述资产价格动态。康朝锋（2004）论述过：利率是不确定性的，且利率的波动率比一般金融资产的波动率更小，因此可以用伊藤过程（Ito process，随机冲击项服从正态分布的随机过程）、二叉树过程（随机冲击项服从二项分布的随机过程）等随机过程描述利率的动态。

关于描述利率动态的随机模型主要分两大类：均衡模型和无套利模型。

均衡模型的基本思想是从人们的理性行为特征（主要是风险厌恶，即要让投资者承担额外的风险必须给其额外的风险回报）来推导出资产价格的动态。无套利模型的基本思想是让模型拟合市场数据以保证无套利性质，从而确定资产价格动态的参数。

两种定价方法各有优劣：均衡模型是在综合历史数据和对投资者行为基本特征概括的基础上建立的，利率期限结构是其输出的结果。因其有坚实的理论基础、经过严密数学推导，且模型的参数具有较好的稳定性，因此在学术界比较流行。均衡模型的主要缺陷是：需要估计风险的价格（通常用历史数据估计），而此方面所需资料获得相对较难；且作为输出结果的利率期限结构往往与市场上实际不相吻合，在实际投资中投资者难以应用。为了满足投资的需求，尤其是衍生产品定价需要，无套利模型孕育而生。无套利模型是将市场利率期限结构作为输入变量，因此数据容易获得。但无套利模型拟合的只是当前的市场数据，市场数据一变，其估计的模型参数也会随着改变，稳定性较差。

概括地说，无套利模型用参数的不断调整来适应市场，强调模型的针对性；均衡模型用稳定的参数来拟合市场，强调模型的普遍性。

3.1 均衡模型和无套利模型简介

均衡模型是根据市场的均衡条件，求出利率所必须遵循的一个过程。在这些模型中，相关的经济变量是输入变量，利率水平是输出变量。这类模型有Vaesicek 模型（Vasicek，1977），CIR 模型（Cox, Ingersoll and Ross，1985a,b）等。无套利模型则通过相关债券等资产之间必须满足的无套利条件进行分析，求出利率的动态过程，然后为债券衍生品定价。此时利率水平是一个输入变量，相关金融工具的价格是输出变量。这类模型有Ho－Lee模型（Ho 和 Lee，1986），BDT模型（Black，Derman和Toy，1990）等。

3.1.1 均衡模型

均衡模型是在真实世界测度下建立的模型，考虑了市场参与者的风险偏好、投资机会、风险价格等因素，假设瞬时利率遵循的随机过程，由市场出清的条件推导出均衡的利率期限结构。此类模型依状态变量的多寡分为单因子模型以及多因子模型，本文主要介绍单因子模型。

（1）Merton（1973）

Merton在1973年首先提出了一个最简单的单因子模型

$$dr\left(t\right)=udt+\sigma dz$$

其中u和σ为常数。模型与股价随机过程相似，其缺陷是没有考虑利率均值回归（mean reversion）的特征，且在上述模型中，利率可能出现负值。

（2）Vasicek（1977）

这个模型体现了利率的均值回归性质。假设瞬时利率在风险中性概率测度下满足下列偏微分方程：

$$dr=a\left(b-r\right)dt+\sigma dz$$

其中a为均值回归调整速度，b为瞬时利率的平均值，σ为瞬时利率的标准差。a、b以及σ均为正值常数。

假定目前的瞬时利率为$r(t)$,则未来某一时点k其瞬时利率的条件期望值与方差为：

$$E_t\left[r(k)\right]=b+\left(r(t)-b\right)e^{-a(k-t)}\quad t\le k$$

$$Var_t\left[r(k)\right]=\frac{\sigma^2}{2a}\left(1-e^{-2a(k-t)}\right)\quad t\le k$$

给定风险价格λ，在时点t时，到期日为T的零息债券价格为：

$$P(t,T,r)=\exp\left[\frac{1}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)\left(R(\infty)-r\right)-\left(T-t\right)R(\infty)-\frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right]$$

其中

$$R(\infty)=b+\sigma\lambda/a-\frac{1}{2}\sigma^2/a^2$$

而利率期限结构为

$$R(t,T)=R(\infty)+\left(r(t)-R(\infty)\right)\frac{1}{aT}\left(1-e^{-aT}\right)+\frac{\sigma^2}{4a^3T}\left(1-e^{-aT}\right)^2$$

此模型可反映出利率期限结构的各种型态，如向上、向下趋势、驼峰状、水平状。但由于这里$r(t)$服从正态分布，利率可能出现负值。

（3）Cox, Ingersoll & Ross(1985)

Vasicek（1977）等人的模型通过假设风险价格为常数来实现无套利机会，该假设隐含了利率模型本身与个人的偏好无关，或是个人的效用函数为一特定形式，如对数效用（logrithmic utility）。这种部分均衡的观念，将导致在市场不完全的情况下，产生内部不一致的情形而存在套利机会。

CIR舍弃了部分均衡的观念，从一般均衡的角度切入，将消费者偏好、生产过程、个人投资以及消费行为等当作模型的输入变量，解决了内部不一致的问题，并消除了不完全市场中的套利机会。此外，这个模型还解决了Vasicek设定的瞬时利率的随机过程服从正态分布，从而可能造成利率呈现负值的问题。CIR将瞬时利率随机过程的随机项的系数，设定成与瞬时利率平方根大小成正比，也即：

$$dr=a\left(b-r\right)dt+\sigma\sqrt{r}dz$$

此设定的经济含意为当利率增加时，利率的波动也会跟着比例增加，同时解决了Vasicek模型瞬时利率有可能为负值的问题。$r(k)$的条件期望值与方差为

$$E_t\left[r(k)\right]=b+\left(r(t)-b\right)e^{-a(k-t)}$$

$$Var_t\left[r(k)\right]=r(t)\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)\left(e^{-a(k-t)}-e^{-2a(k-t)}\right)+b\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)\left(1-e^{-2a(k-t)}\right)^2$$

该分布的期望值与Vasicek模型所得到的期望值相同，不同的是CIR模型的随机项系数为$r(t)$的函数，因此方差也为$r(t)$的函数。

以上模型都假设债券价格仅受受单一因子（瞬时利率）影响，因此也称为单因素模型。在此基础上各国学者扩充模型假设发展了出各种多因素模型。例如Brennan 和 Schwartz（1979）期初的长期利率隐含了对未来即期利率的预期，因此在模型中加入了长期利率。

由于均衡模型除了要估计无法量化的风险价格外，又必须用统计方法估计调整速度、长期平均利率等，推导出来的利率未必会与市场利率一致，这造成了应用上的难题。部分学者开始转而研究无套利模型，该类的利率模型具有完全吻合期初市场信息的能力，成为了衍生性金融商品的定价较好工具。

3.1.2 无套利模型

无套利模型不需要估计或假设瞬时利率的风险价格，而强调构造无套利条件，在风险中性概率测度下构建模型。此类模型容许模型内的部分参数随时间而改变，并且将市场所观察到的利率期限结构当作输入变量，模型中相关参数或变量的设定不得使利率期限结构的动态变化过程出现套利机会。

（1）Ho－Lee模型（Ho 和 Lee，1986）

Ho 和 Lee于1986年首先提出无套利利率模型。该模型视期初的利率期限结构为输入变量，以二叉树结构推导出利率期限结构的动态变化。

在连续时间下，瞬时利率的偏微分方程为

$$dr=u(t)dt+\sigma dz$$

其中σ为常数，$u(t)$趋势项为时间的函数，以确保模型与期初利率期限结构一致。

在离散时间下中，运用二叉树模型，假定r代表短期利率，τ是以年表示的时间间隔（即如果短期利率在一年内变动N次，则$\tau=1/N$），r服从如下过程：

$$r \begin{cases} \overset{1/2}{\nearrow} \; r+m\tau+\sigma\sqrt{\tau} \\ \underset{1/2}{\searrow} \; r+m\tau-\sigma\sqrt{\tau} \end{cases}$$

也就是说，下一期的短期利率等于前期的短期利率加上一个常数乘以时间间隔（$m\tau$），再加上或减去另一个常数乘以时间间隔的平方根（$\sigma\sqrt{\tau}$）。利率无论是上行还是下行，都加上$m\tau$，所以我们称它为短期利率的趋势变量，漂移项（Drift），其中τ是以年表示的时间间隔， m是年度趋势变量。利率上行时是加上$\sigma\sqrt{\tau}$，下行时是减去$\sigma\sqrt{\tau}$，所以$\sigma\sqrt{\tau}$代表短期利率在趋势上的随机偏离（Random Deviation），即$\sigma\sqrt{\tau}$是短期利率的波动率（Volatility），σ是短期利率的年波动率。其中二叉树向上向下的概率都是风险中性世界概率1/2。

令$\tau=1$，并设r'是下一期的短期利率，即在利率上行时$r'=r+m\tau+\sigma$，在利率下行时$r'=r+m\tau-\sigma$。那么r'的期望值为：

$$E(r')=\frac{1}{2}(r+m\tau+\sigma)+\frac{1}{2}(r+m\tau-\sigma)=r+m$$

r'的方差为：

$$Var(r')=\frac{1}{2}[r+m\tau+\sigma-E(r')]^2+\frac{1}{2}[r+m\tau-\sigma-E(r')]^2=\sigma^2$$

离散无套利利率模型的核心就是选取上述模型中的两个参数m和σ，以确保不存在套利机会，然后用其来描述利率动态。σ的数值可以根据历史数据估计。

例如，假设市场上利率期限结构为：

到期日（年）	即期利率	零息券价格
1	5.78%	94.54
2	6.20%	88.66

假设σ=1.5%，Δt=1

Ho-lee模型价格树：

$$
88.6 \begin{cases} \overset{1/2}{} \; p^u = ? \begin{cases} \overset{1/2}{} \; 100 \\ \underset{1/2}{} \; 100 \end{cases} \\ \underset{1/2}{} \; p^d = ? \begin{cases} \overset{1/2}{} \; 100 \\ \underset{1/2}{} \; 100 \end{cases} \end{cases}
$$

Ho-lee模型利率树：

$$
5.78\% \begin{cases} \overset{1/2}{} \; r^u = 5.78\% + \mu(1) * \Delta t + \sigma * \sqrt{\Delta t} = 5.78\% + \mu(1) + 1.5\% \\ \underset{1/2}{} \; r^d = 5.78\% + \mu(1) * \Delta t - \sigma * \sqrt{\Delta t} = 5.78\% + \mu(1) - 1.5\% \end{cases}
$$

其中：

$$p^u = \frac{(1/2*100)+(1/2*100)}{1+r^u} = \frac{100}{1..0728+\mu(1)}$$

$$p^d = \frac{(1/2*100)+(1/2*100)}{1+r^d} = \frac{100}{1..0428+\mu(1)}$$

$$88.66 = \frac{1/2*p^u + 1/2*p^d}{1.0578}$$

解上述等式得$\mu(1) = 0.87\%$；从而解得

价格树：

$$
88.6 \begin{cases} \overset{1/2}{} \; 92.47 \begin{cases} \overset{1/2}{} \; 100 \\ \underset{1/2}{} \; 100 \end{cases} \\ \underset{1/2}{} \; 95.1 \begin{cases} \overset{1/2}{} \; 100 \\ \underset{1/2}{} \; 100 \end{cases} \end{cases}
$$

利率树：

$$5.78\%\begin{cases}\overset{1/2}{\nearrow}\ 8.15\%\\ \underset{1/2}{\searrow}\ 5.15\%\end{cases}$$

如果2年期零息券内嵌一个欧式看涨期权，执行价为93元，执行时间为1年后，根据Ho-Lee模型价格树可以知道该期权在1年后的回报：

$$Call\quad price=?\begin{cases}\overset{p=1/2}{\nearrow}\ \max(0,92.47-93)=0\\ \underset{p=1/2}{\searrow}\ \max(0,95.1-93)=2.1\end{cases}$$

因为Ho-lee模型价格（二叉）树的是在无套利的基础上构建的，对应的概率测度为风险中性概率测度，因此看涨期权的价格就等于以无风险利率贴现的、风险中性世界中的预期回报：

$$Call\qquad price=\frac{(1/2*2.1)+(1/2*0)}{1.0587}=0.99$$

我们可以构建一个组合来复制看涨期权的回报，其中N1份1年期零息券、N2份2年期零息券，通过这个组合来验证定价结果。

（N1*100）+（N2*92.47）=0

（N1*100）+（N2*95.1）=2.1

解得N1=-0.738；N2=0.798，这个组合的现值等于:

（-0.738*94.54+0.798*88.66）=0.99=Call price

利用市场上利率期限结构，我们可以将HO-Lee模型（二叉树）扩展到n期。

Ho-Lee模型可以较好地拟合现实世界的利率曲线，其缺陷是没有考虑短期利率的均值回归，并且假设利率的波动率不变，没有考虑利率的波动率结构。

（2）BDT模型（Black, Derman 和 Toy，1990）

BDT模型与HO-Lee模型一样，它要求对模型给出的零息票债券价格等于市场价

格，同时它要求短期利率波动率的期限结构也和市场观察到的一致.也就是说BDT模型允许短期利率的波动率随着时间的变动而变动。

Black, Derman 和 Toy假设瞬时利率为对数正态分布，模型中除了包含期初利率期限结构的信息，也将波动率利率期限结构视为输入变量。此时由于利率的波动率为时间的函数，使得利率的动态变化具有均值回归的特征。此外，为了避免出现非结合（non-recombining）的树图结构，模型允许在同一时点利率上升与下降的趋势项不同。

在连续时间下，BDT模型的偏微分方程为：

$$d\ln r=\left(\theta\left(t\right)-\phi\left(t\right)\ln r\right)dt+\sigma\left(t\right)dz$$

其中均值回归调整速度 $\phi\left(t\right)=\dfrac{\partial\sigma\left(t\right)/\partial t}{\sigma\left(t\right)}$ ，是 $\sigma\left(t\right)$ 的函数。$\theta\left(t\right)/\phi\left(t\right)$ 为均数回归的平均水准。

在离散时间下，BDT模型的基本结构如下：

$$r\begin{cases}\xrightarrow{1/2} re^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}}\begin{cases}\xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}}\\ \xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}}\end{cases}\\ \xrightarrow{1/2} re^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}}\begin{cases}\xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau-\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}}\\ \xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau-\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}}\end{cases}\end{cases}$$

由于BDT模型允许短期利率的波动率随着时间的变动而变动，利率动态会出现了非结合的树图。为了解决这个问题，唯一的解决办法是让利率上行和下行过程中具有不同的趋势变量。假定 m' 是利率上行时的趋势变量，m'' 是利率下行过程中的趋势变量，那么短期利率的树图变成：

$$r\begin{cases}\xrightarrow{1/2} re^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}}\begin{cases}\xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}}\\ \xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}}\end{cases}\\ \xrightarrow{1/2} re^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}}\begin{cases}\xrightarrow{1/2} re^{(m+m'')\tau-\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}}\\ \xrightarrow{1/2} re^{(m+m'')\tau-\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}}\end{cases}\end{cases}$$

要使利率树图重合，我们必须设定

$$re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}}=re^{(m+m'')\tau-\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}}$$

即

$$\left(m''-m'\right)\sqrt{\tau}=2\left(\sigma-\sigma'\right)$$

此时有

$$re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}}=re^{(m+m'')\tau-(\sigma-\sigma')\sqrt{\tau}}=re^{(m+m'')\tau-\frac{(m''-m')\tau}{2}}$$

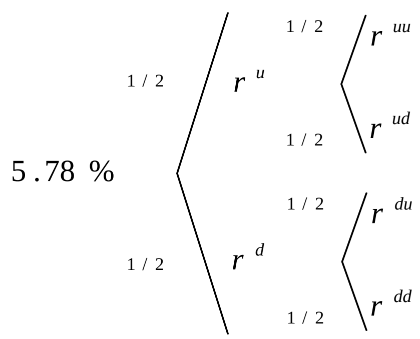
$$=re^{\left(m+\frac{m'+m''}{2}\right)\tau}=\sqrt{re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}}re^{(m+m'')\tau-\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}}}$$

也就是说，为了让模型中的波动率期限结构和实际数据相符，我们必须假设波动率会随着时间的变动而变动，进一步，为了要求利率树图的重合，要求趋势变量和波动率的变动存在一定的对应关系。

例如，假设市场利率期限结构如下：

到期日（年）	即期利率	零息券价格	对数波动率（σ）
1	5.78%	94.54	25%
2	6.20%	88.66	22%
3	6.43%	82.95	21%

BDT模型利率树（1年期利率）如下：



可以通过等式： $$88.66=\frac{1/2*\frac{100}{1+r^u}+1/2*\frac{100}{1+r^d}}{1.0578}$$

$$25\%=\frac{\ln(r^u/r^d)}{2}$$

解出第二期1年期远期利率 r^u =8.28%、 r^d =5.02%

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \overset{1/2}{\nearrow} & r^{uu} \\
 & \overset{1/2}{\nearrow} & 8.28\% & & \\
 & & & \underset{1/2}{\searrow} & r^{ud} \\
5.78\% & & & & \\
 & & & \overset{1/2}{\nearrow} & r^{du} \\
 & \underset{1/2}{\searrow} & 5.02\% & & \\
 & & & \underset{1/2}{\searrow} & r^{dd}
\end{array}
$$

为了求得第三期1年期远期利率 $r^{uu},r^{ud},r^{du},r^{dd}$ ，我们必须满足下列三个条件：

第一个条件：二年期即期利率的对数波动率等于22% ；

第二个条件：以第三年1年期远期利率贴现的零息券价格必须等于利率期限结构中的零息券价格82.95；

第三个条件： $r^{ud}=r^{du}=\sqrt{r^{uu}r^{dd}}$

因此我们从第一个条件入手,

$$
\begin{array}{ccc}
 & \overset{1/2}{\nearrow} & R^{u} \\
6.20\% & & \\
 & \underset{1/2}{\searrow} & R^{d}
\end{array}
,\text{其中}22\%=\frac{\ln(\mathrm{R}^{u}/\mathrm{R}^{d})}{2}
$$

其中 R^{u},R^{d} 表示1年后的2年期远期利率。而第二个条件也等价于“以第1年的2年期远期利率贴现的零息价格等于82.95”, 则

$$82.95=\frac{1/2*\dfrac{100}{(1+R^{u})^{2}}+1/2*\dfrac{100}{(1+R^{d})^{2}}}{1.0578}$$

可以求解得 $R^{u}=8.26\%,R^{d}=5.32\%$ ，而我们可以发现：

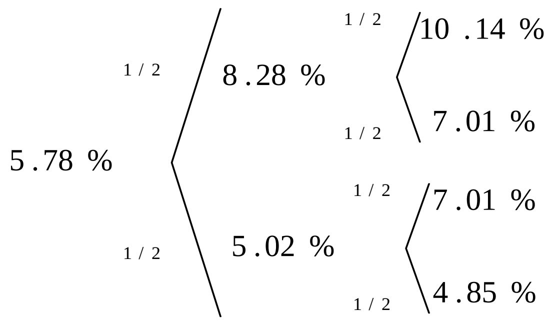
$$\frac{100}{(1+R^{u})^{2}}=\frac{1/2*\dfrac{100}{(1+r^{uu})^{2}}+1/2*\dfrac{100}{(1+r^{ud})^{2}}}{1.0828} \qquad (1)$$

$$\frac{100}{(1+R^{d})^{2}}=\frac{1/2*\dfrac{100}{(1+r^{du})^{2}}+1/2*\dfrac{100}{(1+r^{dd})^{2}}}{1.0502} \qquad (2)$$

利用第三个条件，代入方程（1）(2)中，可以解方程得到：

$r^{uu} = 10.14\%, r^{ud} = 7.01\%, r^{dd} = 4.85\%$，

BDT模型1年期远期利率树如下：



以此类推可以将利率树推广至n期，这样我们就可以推导出利率整个的动态过程。

（3）HJM模型（Heath, Jarrow, 和 Merton，1990,1992）

Heath, Jarrow, 和 Merton（1990,1992）提出的N因子无套利模型，以外生方式指定远期利率的波动，而利率期限结构为远期利率的函数。HJM模型的远期利率随机过程为

$$df\left(t,T\right) = \alpha\left(t,T\right)dt + \sum_{i=1}^{2}\sigma_i\left(t,T\right)dz_i$$

多因子模型将利率期限结构的波动描述的更为完整，但该类模型需要更多的输入变量，此外某些输入变量的信息并不容易取得。

3.2 蒙特卡罗模拟

除了二叉树模型，人们经常采用的数值方法还有蒙特卡罗模拟（Monte Carlo Simulation)。蒙特卡罗模拟适合衍生产品收益依赖于标的变量所遵循的历史路径，或是取决于多个标的变量的时候。而二叉树则适用于有提前执行可能性的期权。

我们以单因子利率模型为例解释蒙特卡罗模拟的运用，设利率服从如下随机过程

$$dr = u(r,t)dt + \sigma(r,t)dz$$

把$[t,T]$分成一系列小的时间间隔，即选择$0 = t_1 < t_2 < t_3 \cdots < t_N = T$。我们可以用下面的过程来近似利率动态

$$\Delta r_n = u(r_n, t_n)\Delta t + \sigma(r_n, t_n)\Delta z_n$$

其中$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$，$\Delta z_n = z_{n+1} - z_n$。$z$是标准布朗运动，$\Delta z_n$服从均值为0，标准差为$\sqrt{\Delta t_n}$的正态分布。通过模拟产生布朗运动就可以得到模拟的利率过程。

蒙特卡罗方法的实质是模拟标的变量的随机运动，预测其衍生产品的平均回报，并由此得到衍生产品价格的一个概率解。

蒙特卡罗模拟的主要优点包括：

1.多数情况下人们可以很直接地应用蒙特卡罗模拟方法，而无需对期权定价模型有深刻的理解，所用的数学知识也很基本。为了获得更精确的答案，只需要进行更多的模拟，无需太多工作就可以转换模型。这个优点使得蒙特卡罗方法成为一个相当广泛和强大的期权定价技术。

2. 蒙特卡罗模拟的适用情形相当广泛，其中包括：

（1）衍生产品的回报仅仅取决于标的变量的最终价值的情况；

（2）衍生产品的回报依赖于标的变量所遵循的路径，即路径依赖的情形；

（3）衍生产品的回报取决于多个标的变量的情况，尤其当随机变量的数量增加时，蒙特卡罗模拟的运算时间近似为线性增长而不像其他方法那样以指数增长，因此该方法对依赖三种以上风险资产的多变量期权模型很有竞争力。

蒙特卡罗模拟的缺点主要是：

1. 只能为欧式期权定价，难以处理提前执行的情形。尝试使用蒙特卡罗模拟技巧来为美式期权定价，成为近年来这个领域的发展方向之一。

2. 为了达到一定的精确度，一般需要大量的模拟运算。尤其在处理三个以下的变量时，蒙特卡罗模拟相对于其他方法来说偏慢，例如在处理一些路径依赖期权时，人们常常用二叉树模型等来取代蒙特卡罗模拟，就是因为其耗费的计算时间太多。

4 含权债的利率风险测量

在利用利率期限结构和利率动态模型为债券定价完后，我们很自然地会想到如何度量债券价格利率风险的问题。传统债券定价方法----到期收益率法,是在债券价格对到期收益率求导数的基础上，得到衡量利率风险的关键指标：久期和凸性。但理论上,债券各期的现金流面对不是一个利率而是一组利率，或者说利率期限结构，对于含权债券来说面对的是无数的利率路径，为了解决债券风险衡量的问题我们需要引入零波动价差（以下简称Z-spread）和期权调整价差（以下简称OAS)。

4.1 零波动价差（Z-spread）

一般来说，信用类产品定价需要在无风险利率上加上一定利差。Z-spread是指假设未来利率的波动为零、或者债券的现金流不随着利率未来的波动而波动，在整条利率曲线上加上的一个利差，使得债券的理论值等于市场实际价格，这个利差就是Z-spread。例如对于企业债定价需要在国债利率曲线上加上一个Z-spread。

相应地，债券价格的风险可以用有效久期（effective duration）和有效凸性（effective convexity）来衡量。其中有效久期和有效凸性是指假设整条利率曲线水平向上（向下）移动，对债券价格的影响。其中：

$$有效久期 = \frac{P_{-} - P_{+}}{2(P_0)(\Delta y)}$$

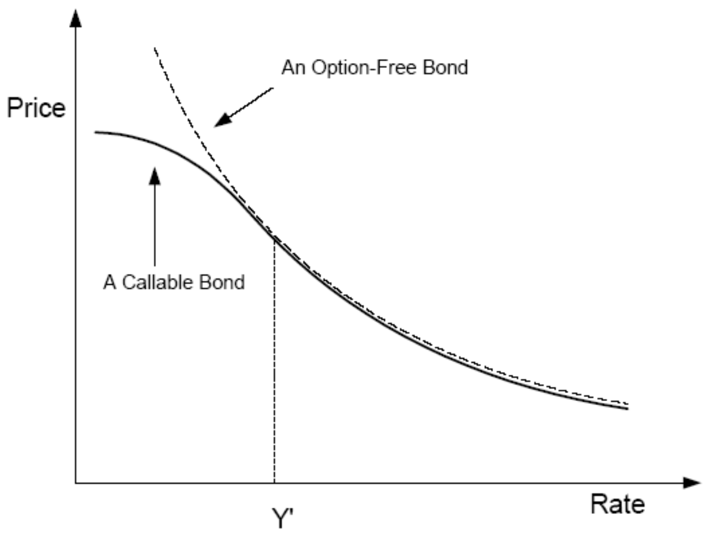
$$有效凸性 = \frac{P_{-} + P_{+} - 2(P_0)}{(P_0)(\Delta y)^2}$$

对于信用类产品来说可以假设Z-spread不变,上下水平移动整条国债利率曲线，从而计算有效久期和有效凸性，判断债券价格的利率风险。

对于利率曲线平坦、按期支付固定利息、到期一次性还本付息的传统债券来说，有效久期和修正久期的结果相差不大。但是对于现金流可变，尤其是现金流随未来利率水平变化的含权债来说，利率有较大波动时，修正久期误差较大。例如对于内嵌发行人赎回权的债券，当利率下降较快时，市场预期发行人将以较低的赎回价赎

回债券，债券价格的上涨将受到抑制，呈现“负凸性”，此时利率风险的衡量只能用有效久期。

图1 含权债的负凸性



4.2 期权调整价差（OAS）

20世纪80年代随着抵押贷款支持证券(MBS)等含权债券市场规模的不断扩大,国际市场上出现了一种新的债券价值判断方法：期权调整利差option adjusted spread，简称OAS。由于OAS综合考虑了即期利率曲线、利率波动、期权等因素，能够比较准确地反映利率敏感型固定收益证券的价值，因此被广泛运用于抵押贷款支持证券MBS、资产支持证券ABS、结构性证券（structure)、保险产品等各种含权债券的价值分析中。

（一）定义

期权调整价差（OAS）是相对无风险利率的利差。一般以国债即期利率曲线（或同一发行人即期利率曲线）为基准，综合考虑利率的波动，在模拟未来利率动态的基础上，在所有利率路径上加得的利差。这个利差使得经期权调整后的现金流的贴现值等于债券的市场价格。OAS可视为对投资者面临多种风险的补偿（例如流动性溢价、违约风险、模型风险)。

（二）作用

透过OAS我们可以得到以下信息：

1、含权债券的期权成本。含权券的期权可以表示为价格形式：

发行人可赎回权=非含权债券价值-含发行人可赎回权债券价值

也可以表示为基点形式：

期权价值（以利率基点的形式）＝零波动价差－期权调整价差

Option value(in basis point)＝Z-spread－OAS

2、投资者的风险补偿。OAS也可称作为期权移除价差，即移除期权后投资人应该得到的风险补偿。对于由同一个发行人发行的、其他条款类似、市场流动性相同的：普通债券、含发行人赎回权债券、含投资人可回售权债券，如果这三种债券定价合理，它们对无风险利率的利差水平应该主要反映发行人的违约风险，此时：

OAS of a Callable bond = Z-spread of a option-free bond =OAS of a putable bond

而此时对应的价格关系应该是：

Price of a Callable bond < Price of a option-free bond < Price of a putable bond

因为Callable bond抑制了债券价格上涨空间，而putable bond防止了债券过分下跌。

3、价格敏感性分析。由于现金流的波动，修正久期和凸性测量公式失效。通过OAS计算，利用有效久期（effective duration）和有效凸性（effective convexity）能够较好量度含权债券价格相对利率变化的敏感度。具体是将OAS固定，上（下）移动即期利率曲线，调整现金流并贴现得出新的债券价格。

4、新产品定价。利用市场OAS信息为新发行的含权债券定价。

5、投资品种的选择。比较信用等级、债券条款以及期权条款相同的含权债券间的OAS,选择OAS高的品种进行投资。

（三）OAS一般计算过程

首先,找出作为OAS比较的基准利率－即期利率曲线。从理论上讲，即期利率曲线应由不同期限的一系列零息券利率所组成，但是市场零息券数量有限、期限不全，因此实际操作过程中通常是利用现有债券，运用利率期限结构静态估计方法得到即期利率曲线。

其次，以适当的模型刻画利率变动过程。一般认为利率是遵循正态随机游走或

对数正态随机游走过程。例如假设利率的波动率不变或指定一个波动率期限结构，选择适当的模型随机产生利率并使之与即期利率期限结构相一致。

三，沿每一条利率路径，依据契约条款，计算每个时间节点的自由现金流。

四，在基础利率水平上加上一定利差（OAS）作为贴现率，将自由现金流依利率路径贴现，形成零时刻的价值。

五，将零时刻各利率路径的贴现值加权，得到含权债券的模型理论价值。

最后，重复第四、五步使得理论价值等于市场实际价格，解出OAS。

5 中国国债市场利率期限结构

为了给债券定价，我们必须得到无风险利率曲线，然后在无风险利率曲线上加上一定的利差来为各种信用类别的债券定价。

中国债券市场的无风险曲线是国债利率曲线，我们可以利用国债市场的交易信息、通过一种利率期限结构静态估计方法，得到中国债券市场的无风险利率曲线。但票息剥离法、样条法以及参数模型法等方法中，到底哪一种方法更适合中国市场呢？在国内，由于利率市场化进展缓慢和国债市场发育不成熟，估计收益率曲线的难度颇大，直到近几年才逐渐开始利率期限结构的实证研究。陈雯和陈浪南(2000)选取附息国债到期收益率或银行存款利率来估计收益率曲线；郑振龙和林海(2002)在附息债券价格信息基础上，采用息票剥离法和二次多项式样条函数来估计债券市场利率。朱峰（2003）运用Svensson模型估计中国国债的即期收益率曲线。唐革榕、朱峰（2003）运用样条法对交易所国债利率期限进行了主成分分析。然而，利用实际数据对各种方法拟合效果的比较研究还比较少见。本文将利用中国债券市场实际成交数据，通过比较来选择适合中国市场的利率期限结构静态估计方法。

一般来说，可以从三个方面来评价利率曲线：曲线能否反映市场？能否解释市场？参数是否平稳？所谓“反映市场”指的是曲线的拟合程度;“解释市场”是指能依据曲线判断市场和个券的价值;“平稳”指市场变化不大时,估计方法中的参数是否稳定。

我们选择的样本数据来源于上海交易所国债市场。其中剔除了浮息券以及票面利率高市场定价明显有误的696和9704。选取的时间段为2005年10月20日、2005年11月10日和2005年11月11日三个时点，以反映交易所市场的实际波动。

分别选择票息剥离法、多项式样条法、指数样条法、N-S模型和Svesson模型对数据进行拟合并进行比较。比较的方法为：同一时点的横向比较和不同时点的纵向比较。比较的对象为：不同估计方法形成的1年期以上的利率曲线族，包括即期利率曲线、远期利率曲线和平价票面利率（到期收益率）曲线。其中，所谓平价票面利率是指债券价格等于面值时，债券对应的票面利率。由于票面利率等于到期收益率

时，债券价格也等于面值，因此平价票面利率曲线等同于到期收益率曲线。

$$100=\sum_{i=1}^{n}\frac{100\times Y}{(1+Y)^{i}}+\frac{100(1+Y)}{(1+Y)^{n}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{100\times Y}{(1+r_{i})^{i}}+\frac{100(1+Y)}{(1+r_{n})^{n}}$$

其中，Y为到期收益率，r为即期利率。

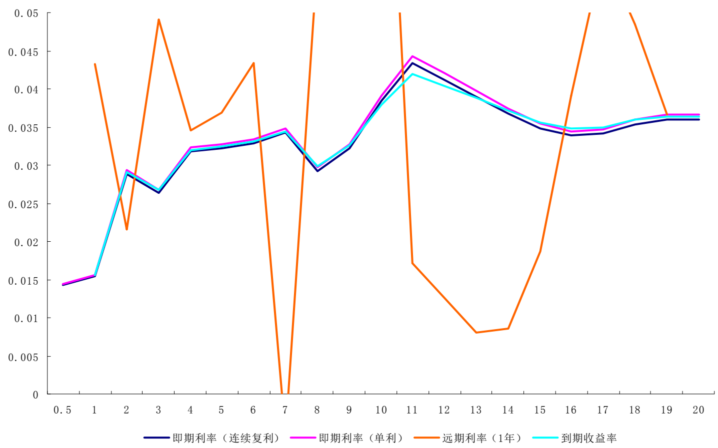
5.1 同一时点的横向比较

1、息票剥离法

息票剥离法如实地“刻画”了市场，其结果可作为其他估计方法的一个参照。从图一可以看出，交易所市场利率曲线总体向上倾斜，中短端比较陡峭，中长端比较平坦，某些期限利率水平不合理。

不足的是，息票剥离法只是对市场进行了简单的描述，没有对市场噪声进行处理，没有给出市场合理的利率水平。表现在息票剥离法形成的即期利率曲线折度大，远期利率曲线上下跳跃。

图2 息票剥离法利率曲线



数据来源：上海交易所

2、样条法

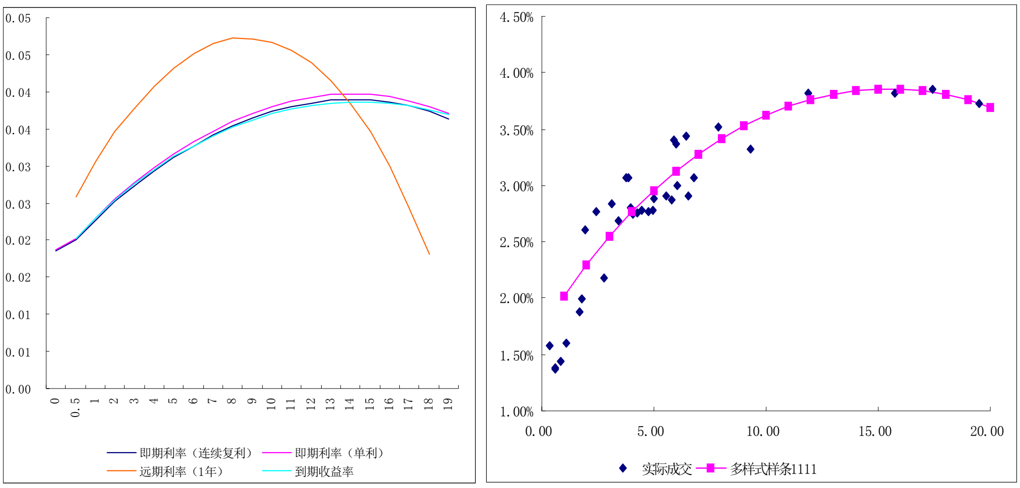
样条法通过估计贴现函数得出利率。为保证各时间段债券数量相当，我们选4年和10年为样条函数的分段点。

（1） 多项式样条法

左边图是利率曲线族，可以看出估计的曲线较为平滑，远期利率曲线“倒u”形态表明长期利率水平偏低。

右边图是拟合图，除短端拟合效果较差以外，总体拟合效果不错。其中，远离曲线的点说明该点对应的债券定价有偏误。

图3 多项式样条估计利率曲线



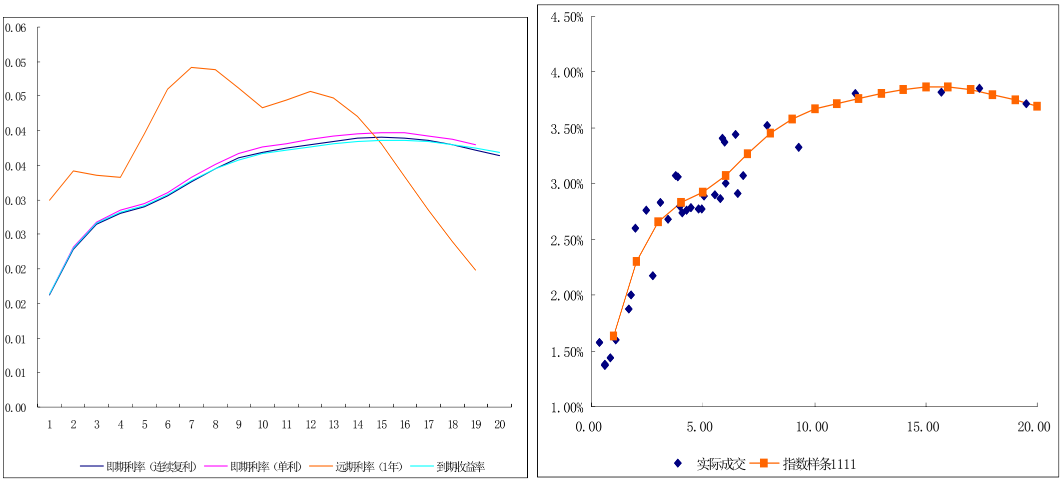
数据来源：上海交易所

（2） 指数样条法

指数样条假设贴现函数随期限指数下降。从实际估计效果看，指数样条曲线比多项式样条曲折，远期利率曲线的“非平滑”显示1～4年期和长期利率水平的不合理。

曲线的拟合精度较多项式样条法有所提高。同样，远离曲线的点说明定价有偏误

图4 指数样条估计利率曲线

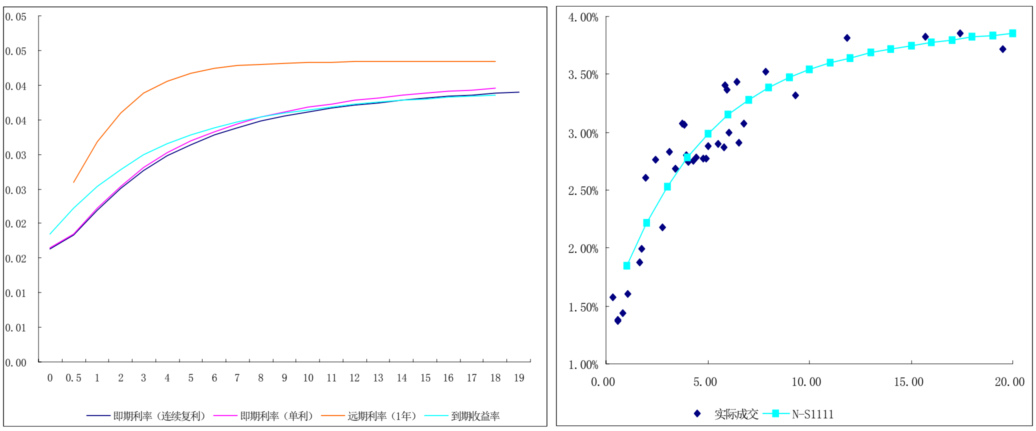


数据来源：上海交易所

3、参数模型

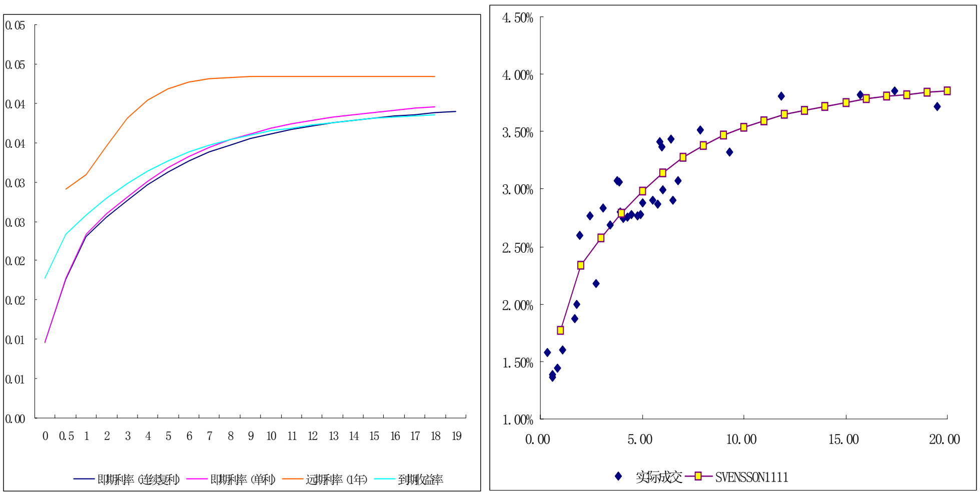
N-S模型和 Svensson 模型都预先假设利率随着期限指数增长,因此拟合出来的曲线非常平滑，尤其是远期利率曲线呈现单调递增，但这与中国市场实际不符。从拟合效果上看，也比指数样条法差。

图5 N-S模型利率曲线



数据来源：上海交易所

图6 Svensson模型利率曲线



数据来源：上海交易所

4、拟合优度的评价

我们用样本券的市场价格减去估计方法所得出的理论价，将所得残差进行平方后求和，即$\sum \varepsilon_k^2$，以此为标准、比较各种方法的拟合程度。通过比较发现指数样条法的拟合程度最高。

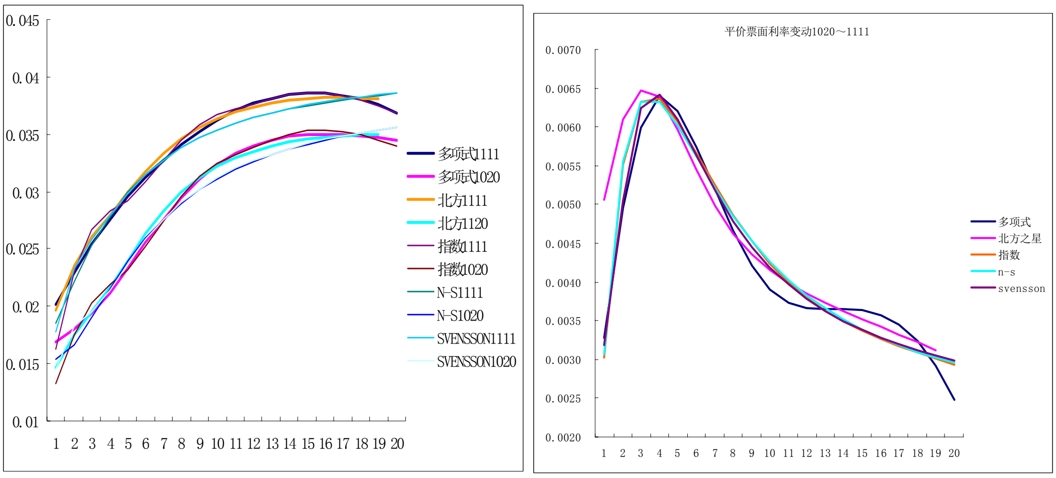
表2 不同估计方法拟合程度比较

	多项式样条误差	指数样条误差	N-S误差	Svensson误差
10月20日	20.02	18.14	26.97	25.38
11月10日	20.24	17.82	26.26	25.71
11月11日	21.06	18.86	27.28	26.51

5.2 不同时点的纵向比较

10月20日至11月11日阶段，交易所债市出现一轮大跌。市场实际情况是：1年期以上中长期券种风险释放力度较大。1年期以下品种，在央票发行力度不断加大的背景下，略有上扬。各方法估计得出的利率水平变动情况如下：

图7 2005/10/20至11/11交易所市场到期收益率变动情况

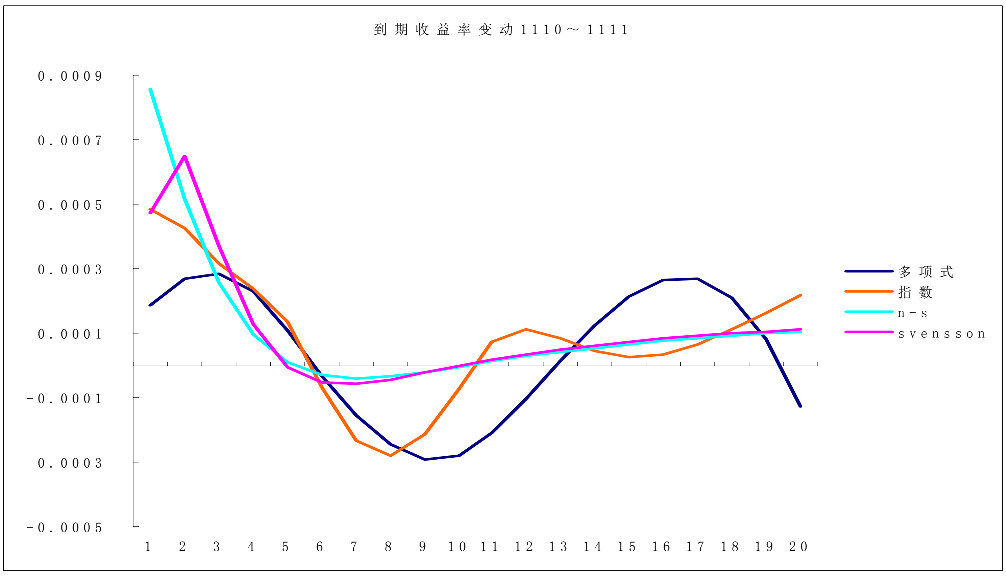


数据来源：上海交易所

各种方法都反映出：市场利率水平整体上移（左图），且3～4年期市场收益水平上升最快(右图)。各方法略有不同，其中多项式样条法反映出利率变化呈现集聚现象，大的变化集中在短端且长端翘尾（右图），这与市场实际不符合。

11月中旬以后，市场中长期品种开始企稳，短期品种开始补跌。11月10日至11月11日，各估计曲线都反映出短端利率开始上扬，中长期利率开始反弹。其中指数样条法显示在短端利率上扬的同时，7年期左右的中长期收益水平反弹力度较大。

图8 11/10~11/11交易所市场到期收益率变动情况



5.3 参数的稳定性

表3 各利率曲线拟合模型参数

多项式样条	b0	c0	d0	d1	D2	
10月20日	-0.01604	-0.000455	-0.00015	0.000194	-2E-05	
11月10日	-0.017	-0.002771	0.000146	0.000117	-1E-06	
11月11日	-0.01703	-0.002947	0.000179	8.75E-05	3.14E-05	
指数样条	b0	c0	d0	d1	D2	u
10月20日	0.470343	-0.319611	0.066142	4.340743	175.5602	0.249123
11月10日	0.473996	-0.247659	0.012358	5.009623	349.193	0.26899
11月11日	0.450192	-0.17818	-0.02532	4.163561	175.5557	0.249426
n-s	b0	b1	b2	b3		
10月20日	0.04144	-0.02408	-0.03943	0.629322		
11月10日	0.042178	-0.02888	-0.01725	0.688213		
11月11日	0.042466	-0.028052	-0.01558	0.621122		
svensson	b0	b1	b2	b3	1/i1	1/i2
10月20日	0.041268	-0.058607	-0.43551	0.373803	0.969041	1.062438
11月10日	0.042235	-0.050171	-0.393	0.337705	0.993285	1.028638
11月11日	0.042515	-0.051479	-0.37589	0.32332	0.947545	0.990549

实践中我们发现：所有模型参数都对样本点的选取比较敏感。如果一个市场流动性好，各期限券种价格连续，则模型参数都比较稳定，例如交易所债券市场；否则模型参数变化较大，例如银行间债券市场。

综上，我们着重曲线反映市场和解释市场的能力，通过比较认为：指数样条法拟合的曲线拟合度高，较符合中国债券市场的实际。

6 国开行含权债的定价

债券中经常会包含一种或数种期权，当债券中包含的期权和债券无法分开交易时，称为“内嵌期权”（Embedded Options）。可提前赎回债券（Callable Bonds）和可回售债券（Puttable Bonds）就属于这种类型。国开行是中国债券市场创新的急先锋，其发行的金融券不论从发行规模、发行数量还是交易量都仅次于国债，在银行间债券市场颇有影响力。截至2005年12月，国开行在银行间债券市场共发行内嵌式期权债券17只，上市15只（合并上市两只）。其中含发行人赎回权（callable）的债券5只，含持有人回售权（puttable）的债券6只以及含持有人换券权（exchangeable）债券4只。

6.1 可赎回（可回售）债券与普通债券关系

1. 可赎回债券

当债券发行以后，对于普通债券的发行人来说，如果利率上升将获利，因为他以相对低的利率完成了融资；反之，如果利率下降，则发行人受损，因为他们融资成本相对较高。可提前赎回债券赋予了发行人，在利率下降时回收原债券并发行新债券的权力，即当利率下降、债券价格上升时，发行人有权行使赎回权进行再融资。由此可知,发行人持有的赎回权是一个当标的价格上升的时候购买标的资产的权力，它是一个债券看涨期权。

在可提前赎回债券与对应的普通债券之间，存在一种重要的关系。所谓“对应”是指除了赎回条款之外，两种债券的其他性质完全相同。设P_C和P_{NC}分别代表可提前赎回债券和普通债券的价格，C代表赎回权的价格，则

$$P_C = P_{NC} - C$$

其中$C = Max(0, P_{NC} - X)$，X表示执行价。

因为发行人拥有选择权，所以可提前赎回债券的价格加上选择权的价格等于普通债券的价格。对于投资者而言，可提前赎回债券的价格等于普通债券的价格扣除选择权的价格。这是一个无套利等式，如果这个等式不成立，就存在无风险的套利

机会。

（1）如果$P_C < P_{NC} - C$，则下面投资组合可以获得无风险的利润。

买入P_C和C，卖空P_{NC}

因为如果利率下降，发行人执行赎回权，投资者将可赎回债券交割获得P_C，同时执行C，即以P_C的价格买入不可赎回的债券，然后它来交割债券空头头寸，这样投资者不会发生任何净现金流；同理如果利率上升，发行人没有执行赎回权，投资者用可提前赎回的债券交割债券空头头寸即可，这样投资者同样不会发生任何净现金流。

由于$P_C < P_{NC} - C$，所以投资者在期初有现金流入，而整个组合在未来任何情况下都不会有净现金流，所以该组合可以获得无风险的利润。

（2）如果$P_C > P_{NC} - C$，则下面投资组合可以获得无风险的利润。

卖空P_C和C，买入P_{NC}

因为如果利率下降，发行人执行赎回权，C也会被执行，投资者将不可赎回债券交割获得P_C，同时用P_C去执行债券空头，这样投资者不会发生任何净现金流；同理如果利率上升，发行人没有执行赎回权，投资者用到期的普通债券交割债券空头头寸即可，这样投资者同样不会发生任何净现金流。

由于$P_C > P_{NC} - C$，所以投资者在期初有现金流入，而整个组合在未来任何情况下都不会有净现金流，所以该组合可以获得无风险的利润。

总之，为了保证市场不不存在无风险的套利机会，必须有

$$P_C = P_{NC} - C$$

由此可见，在发行人持有赎回权的情况下，发行人可以通过最大化赎回权的价值来降低投资者持有的可赎回债券的价值。实际上发行人持有一个标的资产的看涨期权。

2．可回售债券

对于可回售债券，当债券发行以后，如果利率上升，债券价格下跌，投资者将

受损，因为他只能获得相对偏低的利率收入，而且债券价格上也有损失。反之，如果利率下降，债券价格上升，投资者将获利。所以投资者的提前执行是出现在利率上升，债券价格下跌的时候。由此可知，投资者持有的回售权是一个在标的价格下跌的时候出售标的资产的权力，所以它是一个看跌期权。

此时在可提前回售债券与对应的普通债券之间，也存在一种重要的关系。设 P_P 和 P_{NP} 分别代表可提前回售债券和普通债券的价格，P代表投资者持有的回售权的价格，则

$$P_P = P_{NP} + P$$

其中 $P = Max(0, X - P_{NC})$，X表示执行价。

因为投资者拥有选择权，所以可回售债券的价格减去选择权的价格等于普通债券的价格。对于投资者而言，可回售债券的价格等于普通债券的价格加上选择权的价格。实际上，投资者就是持有了一个标的债券的看跌期权。

6.2 中国国开行含权债券定价分析

通过含权债定价公式 $P_C = P_{NC} - C$ 、$P_P = P_{NP} + P$ ，（其中 P_c 表示内嵌发行人可赎回权债券价格、P_P 表示内嵌投资人可赎回权债券价格），我们可以看出含权券的价值由债券价值和期权价值两部分构成。其中，计算债券的价值需要知道债券发行人的利率期限结构、或者无风险利率和风险溢价。计算期权价值需要构建无套利条件、模拟风险中性世界中未来利率的变动，从而得到期权未来的回报，然后将期权的未来回报以无风险利率贴现得到期权价格。

郑振龙、康朝锋（2005）运用多样式样条法和BDT模型对国开行含权券作了深入的研究，但文中假设国开行与国债的信用等级相同，利用国债利率曲线替代国开行利率曲线，这与实际市场情况不相吻合，因为我们知道国债利息收入是免税的，而国开行发行的金融债却要缴交所得税。

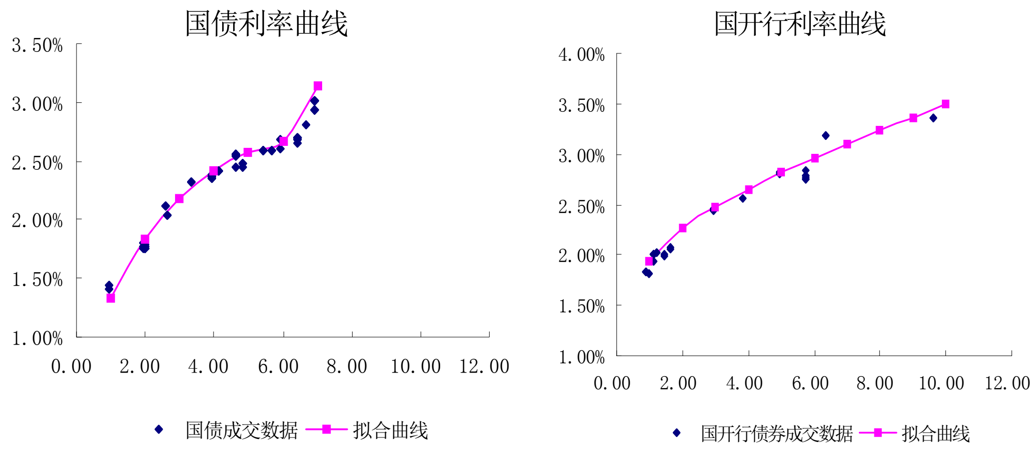
为了进一步研究国开行含权券定价，我们需要知道：无风险利率期限结构、发

行人（国开行）利率期限结构，以及选择合适的利率动态模型。其中计算国开行利率期限结构的方法有两种方法，第一种方法是在无风险利率上加一个利差；第二种方法是直接利用国开行非含权债券成交信息拟合。由于国开行债券交易频率高，因此我们采用第二种方法。

1、利率期限结构

分析析日期2005年12月28日，分析数据来源为银行间债券市场。我们采用指数样条法分别拟合国债利率期限结构和国开行利率期限结构。拟合结果如下：

图9 2005/12/28国债和金融债利率曲线



数据来源：www.chinabond.com.cn

其中，国债利率期限结构（即期利率，付息频率1次/年）：1年1.33%、2年1.83%、3年2.17%、5年2.58%、7年3.07%。

国开行利率期限结构（即期利率，付息频率1次/年）：1年1.94%、2年2.26%%、3年2.47%、5年2.82%、7年3.10%。

2、定价研究对象

当日有交易的含权券为03国开02和03国开15。其中03国开02到期日为2013年3月31日，前五年（2003年3月31日-2008年3月31日）的票面利率2.87%，后五年（2008年3月31日-2013年3月31日）的票面利率在前五年票面利率的基础上加130个基点。

内嵌发行人可赎回条款，行权日为2008年3月31日，行权价为100元。

03国开15票面利率为2.77%，每年付息一次，到期日为2013年8月28日，内嵌投资人可回售条款，行权日为2008年8月28日，行权价为100元。

3、定价模型

我们使用BDT模型（Black，Derman和Toy，1990）利用Matlab软件估计利率动态，BDT模型的基本结构如下：

$$
r \begin{cases} \xrightarrow{1/2} re^{m\tau+\sigma\sqrt{\tau}} \begin{cases} \xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}} \\ \xrightarrow{1/2} re^{(m+m')\tau+\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}} \end{cases} \\ \xrightarrow{1/2} re^{m\tau-\sigma\sqrt{\tau}} \begin{cases} \xrightarrow{1/2} re^{(m+m'')\tau-\sigma\sqrt{\tau}+\sigma'\sqrt{\tau}} \\ \xrightarrow{1/2} re^{(m+m'')\tau-\sigma\sqrt{\tau}-\sigma'\sqrt{\tau}} \end{cases} \end{cases}
$$

其中我们从国开行的历史期限结构中得到利率对数波动率期限结构如下：

期限（年）	1	2	3	4	5	6	7	8	9
利率对数波动率	60.14%	31.93%	26.46%	22.51%	21.02%	20.08%	18.57%	20.94%	20.15%

数据来源：北方之星债券分析系统

4、定价过程及结果

我们以03国开15为例，首先利用国开行利率期限结构、波动率期限结构、并以债券派息日为分段点，运用BDT模型建立国开行利率二叉树，其中投资人可以在3.67年（2008年8月28日）行使回售权：

表4 国开行利率模拟结果

期限（年）	0.67	1.67	2.67	3.67	4.67	5.67	6.67	7.67
利率树	1.944%	1.56%	2.04%	2.02%	1.95%	1.75%	1.88%	0.83%
		3.05%	2.74%	2.65%	2.54%	2.31%	2.36%	1.26%
			3.69%	3.47%	3.30%	3.04%	2.97%	1.92%
				4.56%	4.29%	4.01%	3.73%	2.93%
					5.58%	5.29%	4.69%	4.46%
						6.98%	5.88%	6.80%
							7.40%	10.37%
								15.81%

其中二叉树上下的概率为风险中性世界的概率0.5。

二叉树各节点对应03国开15的价格（不考虑含期情况）为：

表5 03国开15价格模拟

期限（年）	0.67	1.67	2.67	3.67	4.67	5.67	6.67	7.67
价格树（元）	98.385	100.144	101.240	102.307	102.892	103.001	102.540	101.924
		93.625	96.633	98.784	100.316	101.257	101.526	101.491
			90.788	94.257	96.948	98.930	100.126	100.834
				88.496	92.568	95.824	98.210	99.845
					86.956	91.715	95.582	98.382
						86.360	92.012	96.227
							87.225	93.114
								88.740

我们考虑期权执行情况，投资人可在3.67年选择执行以100元卖还发行人，期权的回报如下：

表6 03国开15内嵌期权回报

期限（年）	0.67	1.67	2.67	3.67	4.67	5.67	6.67	7.67
期权树（元）	–	–	–	0.000	–	–	–	–
		–	–	1.216	–	–	–	–
			–	5.743	–	–	–	–
				11.504	–	–	–	–
					–	–	–	–
						–	–	–
							–	–
								–

按风险中性概率，期权在3.67年的价值为4.048元，以无风险利率贴现得3.833元。

按 $P_P = P_{NP} + P$ 公式，03国开15的理论价格应该为98.385+3.833=102.218元。而市场实际成交价为103.419〉理论价，说明市场对该券高估。

按同样方法我们可以得到03国开02（含发行人可赎回权）的理论价 $P_C = P_{NC} - C$ 为103.233元高于市场价101.411元，说明市场低估该券。

5、利率风险测量

由于债券含权，因此我们需要通过计算债券的OAS得到债券的有效久期和有效凸性。

首先我们在国开行利率树上加上一个利差OAS，使得经过期权调整后的债券现金流按利率树贴现的理论值等于市场价,单变量求解得03国开02（含发行人可赎回权）的OAS为58.12BP，03国开15（含投资人可回售权）的OAS为-35.26BP。

表7 国开行债券OAS

期限（年）	**0.25**	**1.25**	**2.26**	**3.26**	**4.26**	**5.26**	**6.26**	**7.26**
03国开02 价格树（元）	101.411	100.382	99.987	100.000	103.627	103.211	102.411	101.401
OAS等于 58.12BP		97.989	99.276	100.000	101.928	101.944	101.598	101.007
			97.138	99.270	99.974	100.485	100.661	100.539
				96.403	97.752	98.804	99.589	99.999
					95.218	96.868	98.336	99.369
						94.638	96.884	98.626
							95.220	97.756
								96.748

期限（年）	0. 67	1. 67	2. 67	3. 67	4. 67	5. 67	6. 67	7. 67
03国开15 价格树（元）	103.419	103.411	103.219	103.998	104.272	104.052	103.247	102.282
OAS等于 -35. 26BP		100.072	100.561	100.402	101.651	102.284	102.224	101.846
			99.442	100.000	98.226	99.925	100.808	101.184
				100.000	93.772	96.776	98.873	100.188
					88.066	92.613	96.218	98.715
						87.187	92.612	96.545
							87.779	93.412
								89.011

其次我们假设OAS不变，而使利率数整体上移25BP求得价格P_+，整体下移25BP得到P_-。

最后根据有效久期和有效凸性的公式

$$\text{有效久期} = \frac{P_- - P_+}{2(P_0)(\Delta y)}$$

$$有效凸性＝\frac{P_- + P_+ - 2(P_0)}{(P_0)(\Delta y)^2}$$

利率对债券价格的变动影响为：

$$\frac{\Delta P}{P} = -ED \times \Delta y + \frac{1}{2} \times EC \times \Delta y^2$$

其中ED表示有效久期、EC表示有效凸性、P表示债券价格、Y表示利率。

我们可以得到：

表8 国开行利率风险测量

债券名称	含权类型	**OAS（BP）**	有效久期	有效凸性	**利率变动+25BP 价格变动(%)**	**利率变动-25BP 价格变动(%)**
03国开02	可赎回权	58.12	3.85	-1.82	-0.964	0.963
03国开15	可回售权	35.26	4.19	443.85	-0.908	1.186

我们可以看出由于03国开02含有发行人可赎回权，有效凸性呈现负凸性，为-1.82。

6、模型的不足

首先，银行间市场流动性不足导致价格信号失真，模型分析可能有偏差。

其次，波动率的选择对定价结果影响较大。本文波动率来自历史数据，没有考虑预期。

第三，本文二叉树选取步数选择较少，可以根据实际需要增加二叉树步数。

7 中国债券市场资产证券化产品定价初探

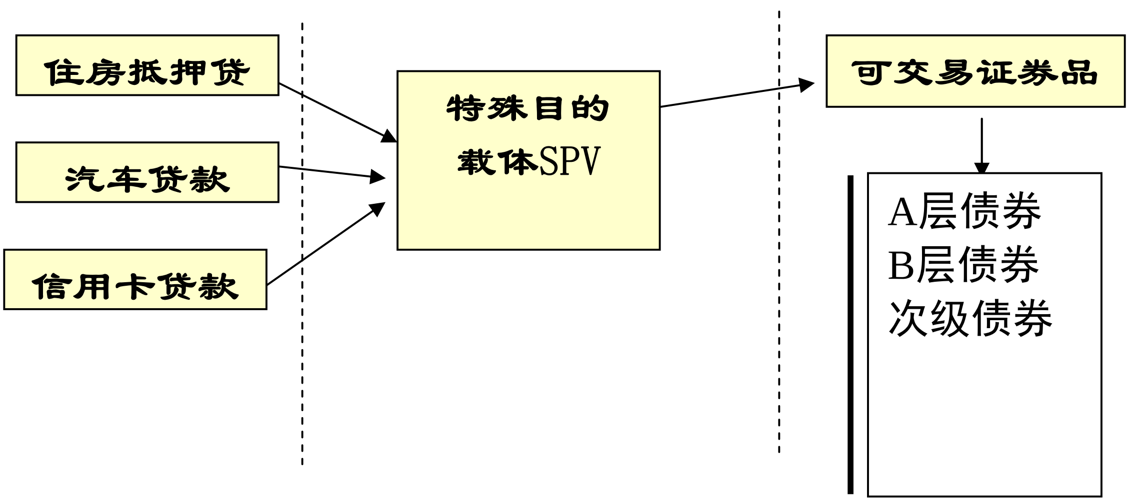
资产证券化最早出现在上世纪70年代美国金融市场，随后被众多成熟市场经济国家接受和采用，近年来又在多数新兴市场国家得以推行。截至2004年9月末，美国资产支持证券余额达7.2万亿美元，占到美国债券市场余额的31%。2005年中国债券市场迎来了首批ABS和MBS产品，分别是国开行信贷资产证券化产品（以下简称国开行ABS）、中国联通CDMA网络租赁费收益计划、粤高速ABS和建行住房抵押贷款证券化产品（以下简称建行MBS）。

7.1 资产证券化理论简介

1、资产证券化的核心理论

资产证券化(asset securitization)是指企业或金融机构将其能产生的现金收益的资产加以组合并作为担保，然后发行成证券产品出售给投资者的过程。

图10 资产证券化流程



资产证券化的核心理论：证券化表面上是以资产为支持，但实际上是以资产所

产生的现金流为支持。

2、资产证券化的基本原理

一资产重组原理：选择特定的、能产生未来现金流的资产进行重新配置与组合，形成资产池。

一风险隔离原理：与资产原始所有者的风险（其他资产风险、破产风险）无关，而只与证券化资产本身相关。主要以真实销售（公司型）或信托（信托型）方式实现。

一信用增级原理：为了吸引更多的投资者并降低发行成本，提高资产支持证券的信用等级，分为外部信用增级（第三方担保）和内部信用增级（次级结构、超额抵押、储备帐户、利差帐户）。

3、资产证券化的发起动机

•提升资产负债管理能力，解决资产负债期限不匹配带来的流动性风险和利率风险。

•以外部融资方式实现资金来源多样化。

•资产负债表外化，降低风险资产比例，提高资本充足率。

•降低资金成本：资产支持证券能获得比发起人本身更高的信用评级。

•获得稳定的中间业务收入：出售资产后保有收付款服务的权利。

4、资产证券化产品的分类

（1)MBS:房地产抵押贷款支持证券。可分为RMBS---住房抵押贷款支持证券和CMBS--商业地产抵押贷款支持证券

（2） ABS:资产支持证券。狭义的ABS：包括汽车贷款、信用卡、学生贷款设备租赁、住房权益、资产支持商业票据（ABCP)。广义的ABS还包括CDO:担保债务凭证，分为CLO（担保贷款凭证）和CBO(担保债券凭证）

5、资产证券化产品受青睐的原因

•高回报：成熟市场中，收益率高于国债和同评级的企业债。

•信用质量好：通过破产隔离、真实出售、信用增级等措施，证券化产品的评级可高于发起机构的自身评级，且评级的稳定性高于一般的企业债。

•更多的投资选择：证券化产品经过分层后，可提供多样化产品：久期不同、本金偿还速度不同、票息不同（固定、浮动、反向浮动）。

6、证券化产品的风险

（1）违约风险，即借款人不能及时支付利息和本金的风险。ABS的违约风险更加突出。解决方法：通过控制资产质量、制订严格明确的资产池标准（例如贷款质量、集中度等）、风险隔离和信用增级（次级结构）等措施降低违约风险。

（2）提前还款风险，即借款人提前偿还部分或全部本金的，导致每期现金流不稳定的风险。可分为收缩风险和扩张风险，即借款人提前还款速度比原定假设快（或慢）导致债券实际到期时间缩短（或延长）的风险。提前偿还风险主要体现在MBS上。解决方法：通过分层设计将风险重新分配给不同档次的证券；通过设立准备金调节帐户缓冲提前偿付带给各期现金流的冲击。

图11 不同风险在各挡证券分配

<table>
<tr><td>违约风险</td><td colspan="4">提前偿付风险 大 → 小</td></tr>
<tr><td rowspan="2">小
↓
大</td><td>优先A档</td><td>优先B档</td><td>……</td><td>优先N档</td></tr>
<tr><td colspan="4">次级档</td></tr>
</table>

（3）经营风险，即服务机构操作风险、破产风险等。解决方法：选择优质的中介机构、服务机构参与证券化的股权（发起人认购次级部分）。

（4）结构设计风险，即证券化产品设计的法律风险、双重课税风险等。解决方法：充分考虑法律上的可行性。

通过资产证券化理论的简介我们也可以看出，较普通债券相比，证券化产品的

现金流不仅期限间分布不规则，而且因内嵌诸多期权，例如借款人提前还款权等，导致现金流可变，使得定价较为复杂。

7.2 ABS 产品定价

7.2.1 ABS 估值原理

资产支持证券Assets-Backed Securities（简称ABS）是一种信托受益凭证，代表特定目的信托的信托受益权份额，受托机构以信托财产为限向投资机构承担支付资产支持证券收益的义务。即使发行人破产，投资机构依然能按约定受偿；倘若信托财产不足以偿付证券，投资机构不能要求发行人用其他财产来偿付证券。

ABS的支持资产必须是可以产生稳定、且可预测现金流的资产。早期的ABS要求资产必须是同质的或者说标准化的有形资产,例如汽车贷款ABS。资产有形可以为ABS提供抵押支持，资产同质可以保证现金流的稳定性。

创新首先来自概念的更新。信用卡ABS和住房权益(home equity)ABS,将未来现金流的所有权作为资产包放入ABS的资产池，突破了有形资产的概念，即将资产支持引申为现金流支持。目前该类ABS成为美国市场规模最大的ABS品种。

CDO(担保债务凭证)成为近年来美国市场发展最为迅猛的ABS产品。CDO分为CLO（担保贷款凭证）和CBO（担保债券凭证），其特征是突破了资产同质概念，不同类型的资产(现金流)放在一起重组打包形成ABS.例如国开行贷款证券化项目属于CDO。

一、ABS信用风险识别

信用风险是投资ABS的主要风险。与企业债不同，ABS信用评级的对象是证券化资产池中的资产，而不是传统概念中的发行人。如果说支付能力是发行人评级的关键的话，那么对ABS评级的关键在于以下四点（一）抵押资产的信用质量（二）发行人/服务人的素质（三）现金流压力和支付结构（四）法律安排，其中前两点最为重要。

（一）资产池中抵押资产的信用质量

1、资产的类型。

抵押资产的信用质量取决抵押资产的类型。信用评级公司将关注借款人的支付能力、还本付息等行为，以及评估证券化前后这些行为是否发生了变化。

2、贷款的集中度

资产池中借款人数量越多，ABS信用风险越小（diversification）。但如果出现少数借款人贷款占总体比例较大的情况，分散化效用将被削弱，违约风险将加大，这被称为集中度风险（concentration risk）。

3、信用增级

除资产本身的质量外，美国所有ABS都进行了信用增级（credit enhancement），通过外部和内部的一些措施提高ABS的信用质量保障投资人的权利。

外部信用增级一般以第三方担保的形式来完成，例如企业担保、信用证和保险等形式，在一定损失范围保障投资者的利益。

内部信用增级是通过改变内部现金流的方式来提升抵御违约风险的能力。例如准备金、超额抵押以及主/次级结构等。其中准备金分两种：一种是与信用证或保险相联系，在发行过程中，将发行人利润的一部分提存作为违约的准备；另一种称为超额服务费用帐户，即在支付净利息、服务费用以及其他费用后，超额收取的费用存在一个单独帐户用来支付未来可能的损失。

（二）发行人/服务人的素质

ABS服务人的素质也影响ABS的信用评级。一般来说评价服务人的标准有（1）从业历史servicing history（2）从业经验experience(3)组织结构originations（4）业务能力servicing capabilities（5）人力资源human resource（6）财务状况financial condition（7）竞争环境growth/competition/business environment。

（三）现金流压力和支付结构

支付结构意味着支付的优先权，决定本金如何分期摊销、多余的现金如何使用

等。支付结构分为转手Pass－throughs和转付pay－throughs。转手结构意味着资产池中的现金流等比例地分配给投资者，而转付结构是重整资产池中的现金流，对于不同的分支，利息与本金的偿还顺序也不同。信用评级机构一般假设违约率以及模拟不同利率情景，测试支付结构是否能保证，抵押资产的现金流与发行人的义务相匹配，是否能够顺利支付利息、本金和服务费用。

（四）法律结构

普通企业债的信用级别不会高于企业自身的信用级别，通过ABS企业可以获得更高的信用等级，降低自己的融资成本。一般来说ABS发行人还在ABS中保留一部分利益，例如保留一个次级系列。为了将发起人的倒闭风险与ABS隔离，美国要求成立SPV（bankruptcy－remote special purpose vehicle），以SPV作为ABS的发行人。

按照我国人行《信贷资产化试点管理办法》第二条规定，我国信贷资产ABS是以银行业金融机构作为发起机构，将信贷资产信托给受托机构，由受托机构以资产支持证券的形式向投资机构发行受益证券，以该财产所产生的现金支付资产支持证券收益。发起机构、受托机构和投资机构之间构建信托关系。在这个基础之上，受托机构又将其处理信托事务的职责分别委托给贷款服务机构、资金保管机构等等，以保证妥善管理贷款并按约定分配贷款本息。

二、ABS定价分析

任何债券的价值都是预期现金流，以合适的贴现率，按一定方法贴现而得到的。

（一）ABS现金流分析

ABS的抵押物可以是分期摊销的资产也可以是非分期摊销的资产。

（1）分期摊销资产（amortizing assets）

分期摊销资产存在现金流的阶段性支付。阶段性支付的现金主要由本金的分期偿还和利息的支付组成（scheduled）。任何超过当期计划本金偿还数的现金支付称为提前偿付。所有分期摊销资产必须考虑提前偿付风险。汽车贷款以及我国的信贷资产证券化项目都属于分期摊销资产。

如果借款人的提前偿付行为主要是受市场利率水平的影响，那么我们就必须预测未来利率水平，并考虑未来提前偿付行为发生的可能性。如果资产池中的资产是同质的（homogeneous），提前偿付的分析可以基于整个资产池（pool-level analysis），将整个资产池视为单一资产，票面利息是资产池中各资产的加权平均票面利息,到期日也为加权平均到期日。如果资产池中的资产差别较大，则可以单独对每个资产的提前偿付风险进行分析（loan-level analysis）.

（2）非分期摊销资产（no-amortizing assets）

非分期摊销资产没有本金的分期偿付，而是规定每期现金支付的最小额度。当现金支付小于当期的应付利息，短缺部分计入应付本金，当现金支付大于应付利息，差额部分冲减应付本金。非分期摊销资产没有提前偿付风险。信用卡应收款属于非分期摊销资产。

（二）ABS的贴现率

（1）即期利率spot rates

在已知现金流的基础上将现金流贴现将得到ABS的价格,这里我们需要搞清楚的是ABS现金流将以什么贴现率来贴现。目前我国债券市场都是以到期收益率来判别债券的价值，到期收益率与即期利率最大的区别就是它假设收益率曲线是水平的，所有各期限现金流都用一个利率贴现。对于按期付息到期一次还本的普通券，由于其主要的现金流集中在到期一次性支付的本金上，因此用到期收益率和即期利率贴现得出的价格相差不大。当利率曲线陡峭，对于本金分期摊销的MBS和ABS或者本金支付受利率水平影响（例如含callable、puta）的含权债券来说，用到期收益率贴现将歪曲债券价值。因此我们需要确定的贴现率不是单一的利率，而是与现金流期限相对应的一组即期利率。

（2）零波动价差zero-volatility spread和期权调整价差OAS

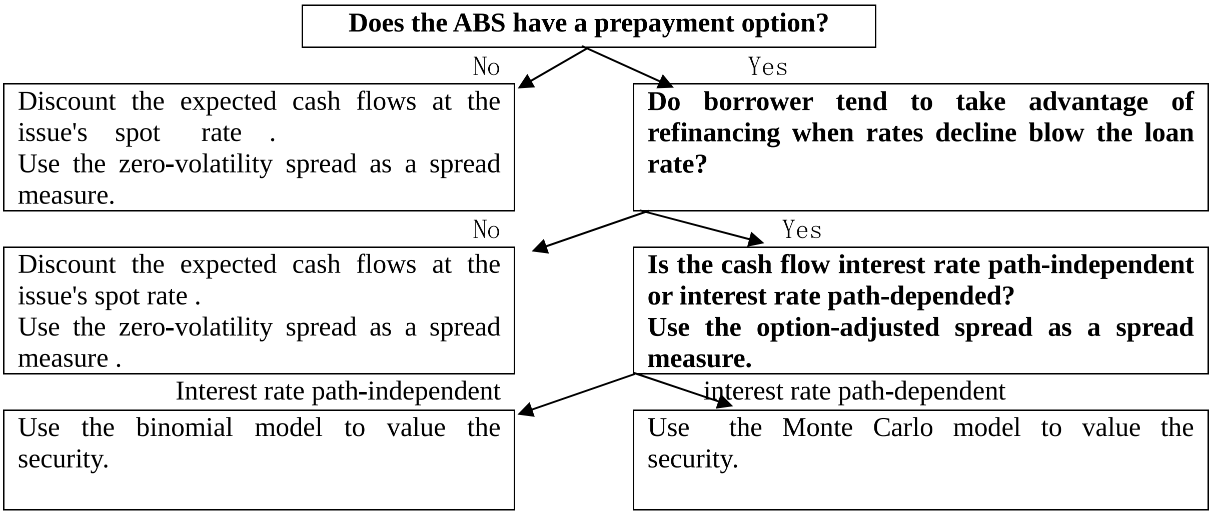
对于非国债类债券，我们必须在无风险即期率曲线上加上一个溢价得到风险债券的即期利率曲线。这个溢价包括信用风险溢酬、流动性风险溢酬和其他风险溢酬。对于非含权类债券这个溢酬称为零波动价差 zero-volatility spread，即在整条无

风险即期利率曲线上，对所有的利率加一个溢价（曲线水平移动），而不是仅对一个利率（到期收益率）上浮。对于含权债则必须通过模型模拟利率的未来变动，对所有利率加上一个溢酬，这个溢价被称为期权调整价差OAS，例如利用二叉树模型模拟利率变动，对整个树上的利率统一加一个溢价.

（三）ABS估值模型的选择

首先我们必须判断ABS是否含有提前偿付期权（prepayment option），如果没有则直接贴现预期现金流，否则就必须判断提前偿付行为是否与利率水平有关，如果没有则直接贴现，否则还要判断提前偿付行为是否是路径依赖的，如果不是则运用二叉树模型估值，如果是路径依赖则运用Monte Carlo模拟模型估值。

图12 ABS估值模型的选择



7.2.2 ABS 估值在中国的实践------国开行 ABS 价值初探

一、开元ABS发行概况

国开行于2005年12月15日成功发行了国内首个信贷资产证券化项目。其中优先A档29.24亿、优先B档10.03亿、次级档2.50亿，合计42亿元。资产池中资产涉及电力、电信、交通运输等10个行业、51个贷款合同，基础贷款平均利率为5.3%，剩余平均期限为0.99年。

图13 开元ABS流程

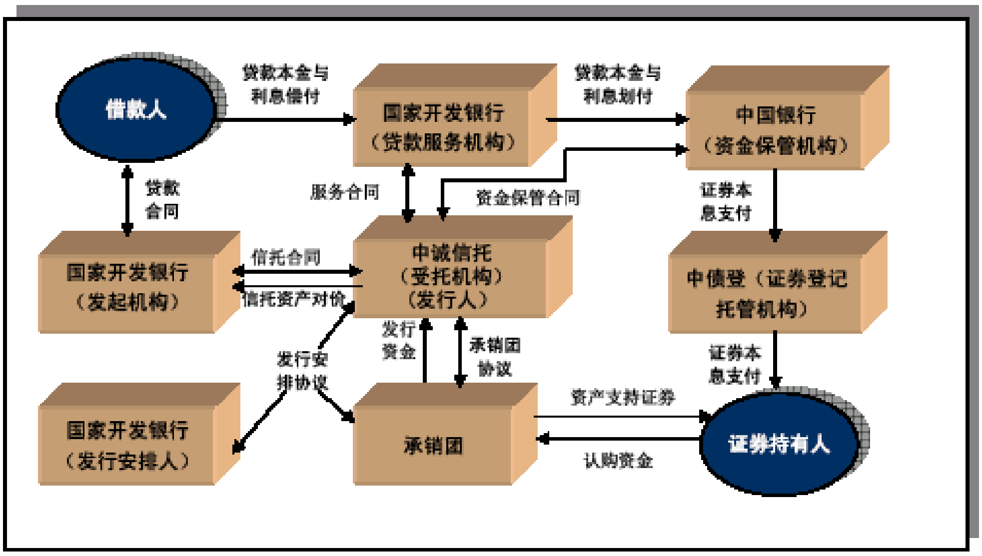


表9 开元ABS概况

	优先 A 档	优先 B 档	次级档 C	贷款池资产
	固息债	浮动债		
规模(亿元)	29．24	10．03	2.50	41.77
占比	70%	24%	6%	100%
加权平均期限（年）	0.67	1.15	1.53	0.99
利率（%）	2.29	1 年期定存+0.45		5.30
到期日	2006-12-31	2007-6-30	2007-6-30	2007-6-30
起息日	2005-12-21	2005-12-21		
付息频率（次/年）	4	4		
信用评级	AAA	A		

数据来源：2005 年第一期开元信贷资产支持证券发行说明书

二、各期限本金分布估计

由于发行说明书中没有披露资产池预期现金流分布，因此为了给各档证券定价，我们需要通过公开信息对资产池现金流进行估计。

假设违约率为 0、提前偿付率为 0，各档 ABS 的加权剩余期限计算公式应为：

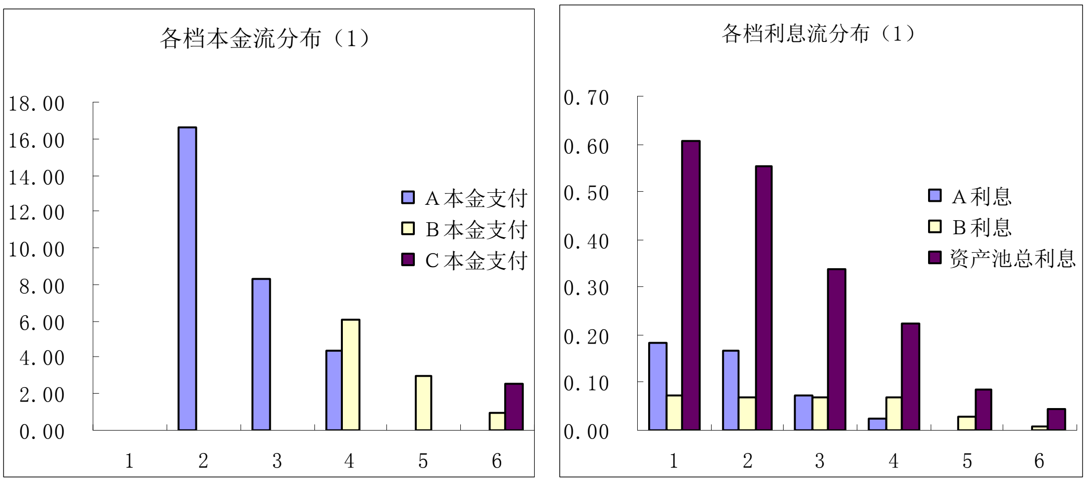
$T=\sum_{i=1}^{n} t_i \times p_i$，其中 t 表示剩余年限，p 表示对应的本金流。

通过规划求解，测算各档本金分布如下：

表10 开元ABS各档本金流分布估计（假设违约率=0，CPR=0）

季度数	剩余年限（年）	A 本金剩余（万元）	A 本金支付（万元）	B 本金剩余（万元）	B 本金支付（万元）	C 本金剩余（万元）	C 本金支付（万元）	资产池本金剩余（万元）
0	-	292408.90	-	100254.48	-	25063.62	-	417727.00
1	0.27	292408.90	0.00	100254.48	0.00	25063.62	-	417727.00
2	0.52	126562.20	165846.70	100254.48	0.00	25063.62	-	251880.30
3	0.78	43638.85	82923.36	100254.48	0.00	25063.62	-	168956.95
4	1.03	0.00	43638.85	40012.05	60242.43	25063.62	-	65075.67
5	1.27			9728.61	30283.45	25063.62	-	34792.23
6	1.52			0.00	9728.61	25063.62	25063.62	0.00

图14 开元ABS各档现金流分布（假设违约率=0，CPR=0）



三、现金流的支付顺序

在进一步分析违约率和提前偿付率对 ABS 影响之前，我们须知道现金流支付的

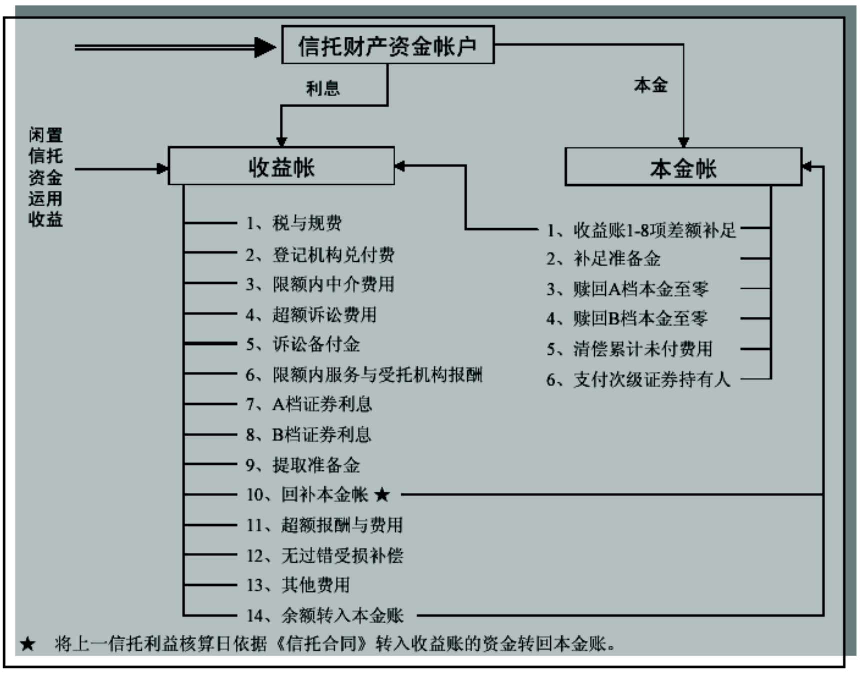
顺序以及税费等对现金流的影响。

1、现金流支付顺序

资产池每期将产生两个现金流：本金收入和利息收入。其中本金收入主要包括计划偿还本金、拖欠回收本金、提前偿付本金以及扣减违约本金。利息收入主要包括计划支付利息、拖欠回收利息以及扣减违约利息。

开元 ABS 对现金流进行了分层设计，保证了优先档的利息和本金的偿付。正常情况下，现金流支付顺序如下：先缴交税和规费、提诉讼备付金、再偿付 A 档利息、B 挡利息、提取准备金、再支付 A 档本金至零、支付 B 档本金至零，最后期末剩余部分支付给次级档持有人。现金流现金流支付顺序如下：

附图：正常情况现金流分配顺序



数据来源：2005 年第一期开元信贷资产支持证券发行说明书

其中涉及诉讼备付金账户（最低限额 300 万元）、准备金账户（最低限额 310 万）。

2、相关税费

根据发行说明书，ABS 税费收取请况如下：

- 营业税及附加：我们按利息收入的 5.5%计提。

- 固定费用：

固定费用：按季度支付（万元）

第 0 季度	第 1 季度	第 2 季度	第 3 季度	第 4 季度	第 5 季度	第 6 季度	第 7 季度	合计
	21.89	23	3	3	13	23	13.44	100.33

- 变动费用：年费率为 0.48%，折季费率为 0.12%，基数为每季初的贷款余额，支付方式为每季度支付一次。

四、违约和提前偿付对 ABS 的影响

违约和提前偿付行为会影响资产池各期的本金流和利息流，因此会改变 ABS 各分档证券的加权剩余期限。

（一）违约对 ABS 的影响

开元ABS发行说明书中对违约的定义:任一贷款的利息或本金逾期15天以上时，该笔贷就被认定违约。对 ABS 的影响具体分析如下：

1、分层设计导致“计划本金”的支付面临更大的违约风险。

由于开元 ABS 分层设计首先保证 “计划利息”的支付，一旦发生违约，将从本金流部分和准备金账户中划拨资金补足应付利息差额的部分,因此当期“计划本金”的足额支付面临风险。

2、超额利息收入为“计划本金”的支付提供一定保护。

由于资产池中的贷款平均利率比 ABS 各档利率高，因此超额利息收入将弥补当期因违约而导致的本金支付不足部分。剩余收入将划入准备金账户进行累计。

但是一旦准备金账户中累计的超额利息收入耗尽，违约将影响当期计划本金的支付。未能及时支付的部分将延后至下期待偿。

例如，当期计划支付本金 2000 万，利息收入在支付计划利息和计提诉讼准备后累计剩余 500 万，假设发生本金支付违约 600 万，则本金实际违约金额为 2000-600+500=100 万。

3、加速清偿条款将加速各档证券的到期。

加速清偿条款规定：如果累计违约本金额占剩余待偿付本金金额的 15%，则启

动加速清偿。加速清偿时，现金流支付顺序变为：先支付 A 档利息、再支付 A 档本金至零、再支付 B 挡利息、B 档本金至零，最后支付次级部分。

4、情景分析

为保证一定压力，我们假设一旦发生违约则全部损失，同时假设提前偿付率为 0。

表11 违约对开元ABS各档加权平均剩余期限的影响

违约比率	0.10%	0.20%	0.30%	0.40%	0.50%	0.60%	0.70%	0.80%	0.90%	1.00%
A	0.6700	0.6700	0.6700	0.6700	0.6700	0.6700	0.6700	0.6700	**0.6704**	**0.6710**
B	1.1500	1.1500	1.1500	1.1500	1.1500	1.1500	1.1500	**1.1699**	**1.1863**	**1.1311**
C	1.5300	1.5300	1.5300	1.5300	1.5300	1.5300	1.5300	1.5300	1.5300	1.2700
C 档损失（万元）	-	-	-	-	-	-	281.53	1209.49	2131.88	2680.18

注：这里违约比率是指每个季度发生的违约金额占剩余本金的比率。

情景分析表明，由于超额利息的保护和分层设计，违约率只有在达到较高水平后才会对优先档形成冲击，即优先档的加权剩余期限变长(扩张风险)。但是开元剩余期限较短，因此总体而言，优先档的违约风险较小。其中我们注意到当违约率为 0.7%时，次级档 C 档本金开始遭受损失。

（二）提前偿付对 ABS 的影响

提前偿付是指借款人提前还贷的行为。ABS 的分层设计会将提前偿付的本金支付给优先档，因此优先档的加权平均期限会减少（收缩风险）。

1、国开行披露的各行业贷款提前偿付率历史数据如下：

公路	电力	铁路	城建	电信	制造	煤炭	石化
2.10%	2.80%	3.60%	2.40%	12.90%	4.10%	3.60%	2.40%

其中开元 ABS 资产池中各行业贷款分布如下：

表12 开元ABS资产池中各行业贷款分布

编号	行业	合同个数	金额(万元)	金额占比
1	电力、热力的生产和供应业	27	182,277	43.64%
2	电信和其他信息传输服务业	6	82,000	19.63%
3	公共设施管理业	7	61,500	14.72%
4	铁路运输业	4	48,000	11.49%
5	石油和天然气开采业	1	20,000	4.79%
6	交通运输设备制造业	1	8,000	1.92%
7	道路运输业	2	4,500	1.08%
8	煤炭开采和洗选业	1	4,300	1.03%
9	医药制造业	1	4,300	1.03%
10	化学原料及化学制品制造业	1	2,850	0.68%
	合计	51	417,727	100%

数据来源：2005 年第一期开元信贷资产支持证券发行说明书

通过加权平均可以估算资产池中加权提前偿付率为 4.8%（对应每季度提前偿付率约为 1.22%）。

2、情景分析

我们假设没有违约，测算 ABS 对提前偿付率的敏感性。（下表对应的提前偿付率为季度数据）

表13 提前偿付对开元ABS各档加权平均剩余期限的影响

提前偿付率（季度）	0%	0.50%	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	3.50%
CPR	**0%**	**1.99%**	**3.94%**	**5.87%**	**7.76%**	**9.63%**	**11.47%**	**13.28%**
A 档	0.6700	0.6600	0.6500	0.6401	0.6303	0.6206	0.6109	0.6013
B 档	1.2700	1.1185	1.0955	1.0807	1.0663	1.0521	1.0382	1.0274

注：CPR 是年提前偿付率=1-（1-季度偿付率）^4

可以看出，优先档对提前偿付较为敏感，随提前偿付率的增加，优先档的加权平均剩余期限在减少。

（三）违约和提前偿付对开元 ABS 的综合影响

我们综合考虑违约和提前偿付因素，并假设每期的诉讼准备（300 万）都用完、超额利息收入的剩余部分全部滚入准备金账户累计、违约本金全部损失，情景模拟优先 A、B 档的各期本金流和利息流，并测算其加权剩余期限，结果如下：

1、随违约和提前偿付率的提高，加速偿还条款启动时间发生变化，但模拟结果显示，加速偿还启动时间最早发生在第 4 季度，即优先 A 档偿付结束时间。因此由上诉两因素引起的加速偿付不会对 A、B 档现金流产生影响。（详见表 14）

2、A 档的加权平均期限变动区间为（0.6013 年，0.67 年），变化不大。（详见表 15）

3、B 档的加权平均期限变动区间为（1.0274 年，1.15 年），即可能提前一个季度支付完毕。（详见表 16）

通过以上情景分析，可以看出，由于开元 ABS 的期限短，资产池贷款利率高于 ABS 各档利率，因此开元 ABS 投资风险较小。

五、开元定价分析

1、用指数样条法估计发行日无风险利率曲线，我们取的是银行间国债市场数据，计算得出得出与本期 ABS 相对应期限的即期利率为：

季节数	1	2	3	4	5	6
期限（年）	0.27	0.52	0.78	1.03	1.27	1.52
即期利率	1.58%	1.63%	1.69%	1.74%	1.79%	1.84%

2、ABS 相对无风险利率会有溢价，这个利差包含了信用风险、流动性风险、税收溢价以及借款人提前偿付期权溢价等等。由于资产池中贷款都是浮动利率贷款，影响借款人提前还款的因素很复杂，不完全是利率水平的原因。为反映各种提前偿付条件下 ABS 相对无风险投资的溢价水平，我们结合上述的情景分析，在无风险利率曲线上水平上移一个溢价水平，OAS。

3、利用估计出的各情景下 ABS 各档对应的本金流和利息流，用无风险利率加 OAS 进行贴现，使得计算值等于各档发行价（面值）的利差就是所求 OAS。

4、从定价结果(详见表 17 表 18)，可以看出 A 档的 OAS 水平在 63.89BP~65.36BP 区间波动，B 档 OAS 水平在 96.21BP~99.03BP 区间波动。

5、A 档为 AAA 级，加权平均剩余年限为 0.63 年左右，B 档为 A 级，加权平均剩余年限为 1.08 年左右，两者的利差在 32.32BP~33.72BP 之间。

6、通过与同期限同信用等级其他发行主体债券相对无风险利率曲线的溢价比

较，可以看出开元 ABS 溢价水平较金融债高、较短期融资券低。我们判断一旦开元 ABS 解决上市和允许抵押融资等流动性问题，其相对无风险溢价水平将降低。

	信用等级	期限（年）	**Z-spread\OAS**
金融债	AAA	0.6	5BP
国开 **ABS—A** 档	AAA	0.63	63.89BP~65.36BP
CP	A-1+	0.42	98.68 BP

表14 开元ABS加速清偿条款触发时间

触发加速清偿季度数 提前偿付率（季度）	违约比率 0.10%	0.20%	0.30%	0.40%	0.50%	0.60%	0.70%	0.80%	0.90%	1.00%
0.50%	–	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00	4.00	4.00	4.00	4.00
1.00%	–	5.00	5.00	5.00	5.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
1.50%	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
2.00%	5.00	5.00	5.00	5.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
2.50%	5.00	5.00	5.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
3.00%	5.00	5.00	5.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
3.50%	5.00	5.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00

表15 开元ABSA档加权平均剩余年限敏感性分析

A档加权平均年限 提前偿付率（季度）	违约比率 0.10%	0.20%	0.30%	0.40%	0.50%	0.60%	0.70%	0.80%	0.90%	1.00%
0.50%	0.6600	0.6600	0.6600	0.6600	0.6600	0.6600	0.6600	0.6600	0.6605	0.6610
1.00%	0.6500	0.6500	0.6501	0.6501	0.6501	0.6501	0.6501	0.6501	0.6505	0.6511
1.50%	0.6401	0.6402	0.6402	0.6402	0.6402	0.6402	0.6403	0.6403	0.6407	0.6413
2.00%	0.6303	0.6304	0.6304	0.6304	0.6304	0.6305	0.6305	0.6305	0.6309	0.6315
2.50%	0.6206	0.6206	0.6207	0.6207	0.6207	0.6208	0.6208	0.6208	0.6212	0.6218
3.00%	0.6109	0.6110	0.6110	0.6110	0.6111	0.6111	0.6112	0.6112	0.6116	0.6122
3.50%	0.6013	0.6014	0.6014	0.6015	0.6015	0.6016	0.6016	0.6017	0.6020	0.6026

表16 开元ABS B档加权平均剩余年限敏感性分析

B档加权平均年限	违约率									
提前偿付率（季度）	0.10%	0.20%	0.30%	0.40%	0.50%	0.60%	0.70%	0.80%	0.90%	1.00%
0.50%	1.1186	1.1186	1.1187	1.1188	1.1188	1.1189	1.1190	1.1238	1.1325	1.1420
1.00%	1.0955	1.0956	1.0956	1.0957	1.0958	1.0958	1.0959	1.0971	1.1019	1.1114
1.50%	1.0808	1.0809	1.0810	1.0811	1.0812	1.0812	1.0813	1.0825	1.0857	1.0893
2.00%	1.0664	1.0665	1.0666	1.0667	1.0668	1.0669	1.0671	1.0682	1.0713	1.0749
2.50%	1.0522	1.0524	1.0525	1.0526	1.0528	1.0529	1.0531	1.0542	1.0572	1.0608
3.00%	1.0383	1.0385	1.0387	1.0388	1.0390	1.0392	1.0393	1.0404	1.0434	1.0470
3.50%	1.0274	1.0274	1.0274	1.0274	1.0274	1.0274	1.0274	1.0274	1.0274	1.0274

表17 开元ABS各情景下A档相对无风险利率的溢价水平（OAS）

A档 oas(bp)	违约比率									
提前偿付率	0.10%	0.20%	0.30%	0.40%	0.50%	0.60%	0.70%	0.80%	0.90%	1.00%
0.50%	63.93	63.93	63.93	63.93	63.93	63.93	63.93	63.93	63.91	63.89
1.00%	64.16	64.16	64.15	64.15	64.15	64.15	64.15	64.15	64.14	64.12
1.50%	64.20	64.39	64.39	64.38	64.38	64.38	64.38	64.38	64.37	64.35
2.00%	64.62	64.62	64.62	64.62	64.62	64.62	64.62	64.62	64.60	64.58
2.50%	64.86	64.86	64.86	64.86	64.86	64.86	64.86	64.86	64.84	64.82
3.00%	65.11	65.11	65.11	65.11	65.10	65.10	65.10	65.10	65.09	65.06
3.50%	65.36	65.36	65.36	65.36	65.35	65.35	65.35	65.35	65.33	65.31

表18 开元ABS各情景下B档相对无风险利率的溢价水平（OAS）

B档 oas	违约比率									
提前偿付率	0.10%	0.20%	0.30%	0.40%	0.50%	0.60%	0.70%	0.80%	0.90%	1.00%
0.50%	96.84	96.83	96.83	96.83	96.83	96.83	96.82	96.69	96.46	96.21
1.00%	97.41	97.41	97.41	97.41	97.41	97.41	97.41	97.38	97.26	97.00
1.50%	97.74	97.74	97.74	97.74	97.74	97.74	97.73	97.71	97.64	97.55
2.00%	98.08	98.08	98.08	98.07	98.07	98.07	98.07	98.04	97.97	97.88
2.50%	98.42	98.42	98.41	98.41	98.41	98.40	98.40	98.37	98.30	98.21
3.00%	98.76	98.76	98.75	98.75	98.74	98.74	98.74	98.71	98.64	98.55
3.50%	99.03	99.03	99.03	99.03	99.03	99.03	99.03	99.03	99.03	99.03

7.3 MBS 定价初探

7.3.1 MBS 估值原理

MBS定价是在一些假设的基础上，基于未来的现金流，预测各档平均期限。首先需要在正常还本付息情况下测算资产池中各期现金流；其次引入提前偿还率等期权计算未来各期现金流；最后根据各分档的情况计算各分档的现金流。投资者需要管理提前偿付风险和利率风险。

根据美国市场经验，影响提前偿还率的因素有（1）现行的住房贷款利率；（2）资产池中住贷的特征，例如帐龄、地域分布、还款方式等；（3）季节因素；（4）社会经济状况。将这些因素与提前偿付行为进行回归分析，可以得出各种预测提前偿付率的模型，当然这需要数量足够多时间足够长的数据积累。

美国PSA标准就是基于住房贷款帐龄的提前偿付预测基准。PSA基准假设：对于30年的住贷，其第一个月的年提前偿付率（CPR）为0.2%，以后每个月增加0.2%，直到第30个月CPR为6%，以后CPR不变。这个基准也称为“100PAS”。人们也可以根据实际情况调整提前偿还速度，比如“50PSA”、“350PSA”，数字对应的是基于PSA假设提前偿还率的倍数：“0.5倍”、“3.5倍”

与一般ABS不同的是，MBS的提前偿还行为不仅与未来的利率水平有关，而且还与利率的变动路径有关，这被称作路径依赖。比如对于固定利率住贷，假设初期再融资利率为8%；第二期再融资利率降到6%，这将引发较大的提前偿付，因为借款人可以先还款赎回房产、然后再以更低的利率抵押房产融资；第三期利率升到9%，没有人愿意提前还款；第四期利率又降到6%，此时虽然也会有提前偿付发生，但提前偿付的量远不如第二期，因为大多数对利率敏感的借款人都已经偿还了贷款。

对于路径依赖的含权债券估值需要用蒙特卡罗模拟(Monte Carlo Simulation)。基于市场利率期限结构和利率波动率假设的利率动态模型,模拟未来利率随机路径。根据利率水平与再融资利率的关系可以得到随机的再融资利率，将随机的再融资利率结合到提前偿付预测模型中，就可以得到各期随机的现金流。在随机利率上加上

合适的利差对各期的现金流贴现。重复模拟多次，例如2000次，将得到的贴现值进行算术平均就可以得到MBS的价格。

7.3.2 建行 MBS 估值初探

2005年12月15日中国建设银行在银行间市场发行了中国首支个人住贷抵押贷款证券化证券，发行额共计30.17亿，其中分优先A、优先B、优先C档和次级档。

资产支持证券	预定评级	发行额（万元）	占比（%）	利率
A 级	AAA	266,976.45	88.50	浮动
B 级	A	20,362.61	6.75	浮动
C 级	BBB	5,279.19	1.75	浮动
次级	无评级	9,050.06	3.00	
合计		301,668.31	100.00	
初始起算日	2005 年 11 月 10 日			
交割日	2005 年 12 月 19 日			
法定最终到期日	2037 年 11 月 26 日			
入池资产	中国建设银行股份有限公司发放的个人住房抵押贷款，抵押资产分别位于上海、无锡、福州、泉州			
本金余额	人民币 301,668.31 万元			
发起/服务机构	中国建设银行股份有限公司			
受托机构	中信信托投资有限责任公司			

由于存在诸多可变因素，而且建行在发行说明中也未详尽披露资产池的现金流预期分布，投资者的心态都比较谨慎，加之建行对各档招标利率都设置了上限，导致机构普遍认购不踊跃。

2006年1月作为受托人的中信信托进行了后续性的信息披露，发布了建元MBS第一期受托机构报告。报告的期间为05年11月11日至05年12月31日。报告的主要内容是：披露由于本息支付、提前偿付以及违约等状况，导致各档资产支持证券现金流的变化、信用的变化。我们试图在掌握更多信息的基础上对中国MBS的估值进行探讨。

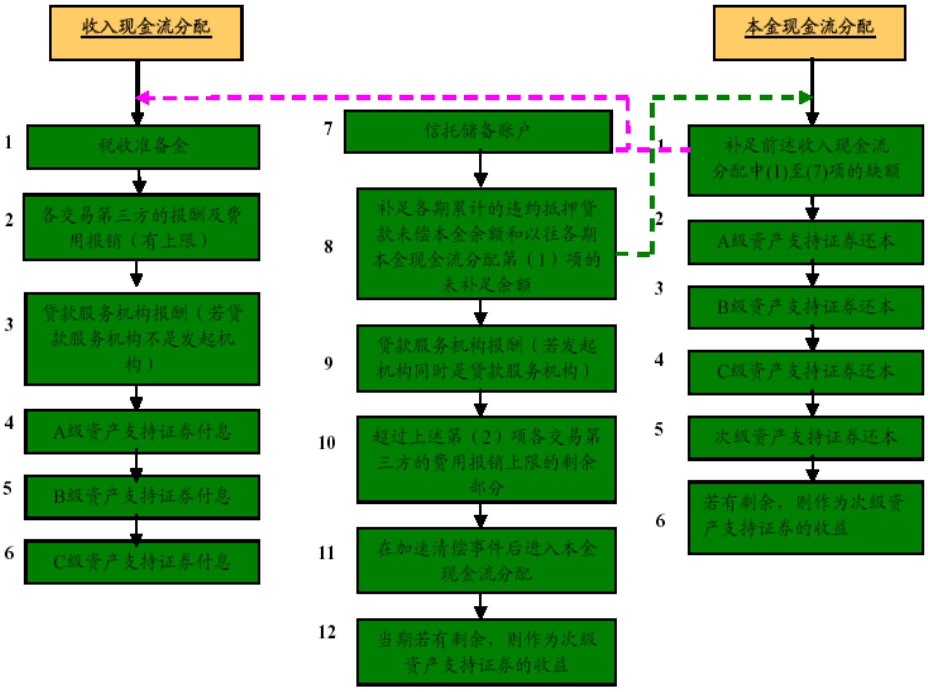
1、现金流

建元MBS现资产池会产生两大现金流，利息收入和本金收回。其中利息收入包括计划内利息收入和拖欠回收利息收入（含罚息），利息收入扣减营业税及附加后进入信托帐户（收入分帐户），然后依次支付服务费和各档利息，如有剩余可用于支付违

约本金部分、储备帐户等。

本金收回部分：实际本金回收=应收本金+拖欠回收+提前偿付-违约本金，用于依次支付各档本金。

图14 建元MBS现金流



2、提前偿付率

MBS期限长，利率风险和提前偿付风险比ABS产品大，尤其建行MBS带有“中国特色”，什么因素影响中国MBS提前偿付率，仅仅是利率？

难点1：建行MBS证券化资产为浮动利率贷款，而国外普遍为固定利率贷款；

难点2：中国人特殊的消费习惯；

难点3：中国PSA（月提前偿付率）数据缺乏。

提前偿付会影响 MBS 的平均回收期、引起再投资风险和价格风险（主要是固定利率证券、浮动利率证券价格风险较小）。中信信托在受托报告中披露报告期内发生本金提前偿付 8265.31 万，其中提前结清 6495.18 万、部分结清 1770.13 万。经换算，A 档月度提前偿付率 SMM 为 2.44%，年化提前偿付率 CPR 为 25.69%，远高于建

行在发行说明书中 12.98%的假设。

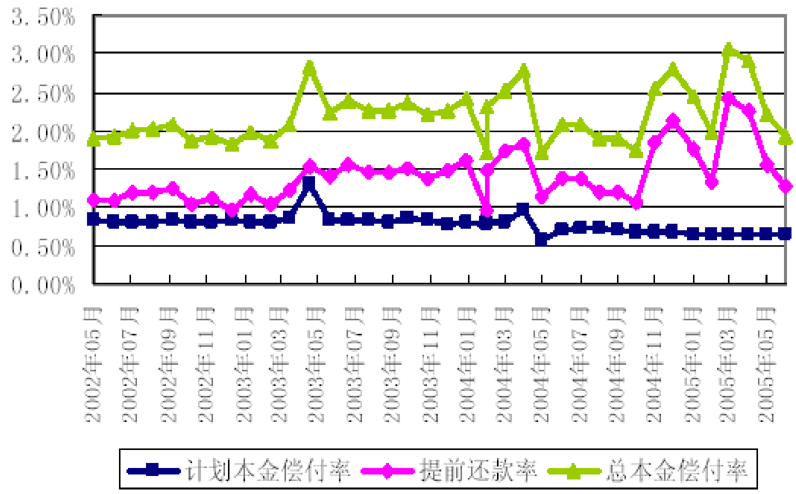
如果按此速度，A 档的平均回收期（WAL）将由 3.15 年缩短为 2 年左右，B 档将由 10 年缩短为 6.5 年左右，C 档将由 12.41 年缩短为 7.5 年左右。

我们试图分析引起本次提前偿付激升的原因以及分析这些原因是否能够会持续。

（1）利率因素

由于建元MBS全部由浮动利率贷款构成，因此“升息”会促进提前偿付行为的发生。2004年10月人民银行向上普调了一次利率，2005年3月17日又将住贷利率，由5.31%上调至5.52%，两次调息都引发了较大的提前偿付。而建元MBS贷款96.33%是帐龄超过一年的“老贷款”，将于2006年1月1日起执行新的住贷利率，新利率的执行会刺激提前偿付行为，但该因素持续时间应不长。

图15：建行住贷本金偿付历史数据



数据来源：建行MBS发行说明书

（2）其他因素

- 贷款的帐龄，是自贷款发放日至计算日的年限。根据美国PSA标准，帐龄3年以下的贷款提前偿付行率是不断提高的，而建行MBS贷款中帐龄小于3年的贷款金额占比为63.67%，因此提前偿付率有走高趋势。

- 季节因素。由于年末至春节前后是中国企业核算利润核发奖金的时点，而中国人又尚未习惯贷款消费，觉得支付利息是总负担且不合算，因此有闲钱先还贷。

我们认为引起本次提前偿付率的激升的主要因素：利率因素和季节因素不具有持续性，而帐龄因素将在相当一段长的期间持续。

综上，我们认为建行估计的12.98%CPR过低，应适当提高至15%~20%。根据建行发行说明书的测算表，调整后的A档平均回收期（WAL）为2.5年，B档为9年，C档为10年。

图16 建元MBS各档加权平均回收期测算表

"A级资产支持证券"加权平均回收期（不同提前还款率）

	CPR 0.0%	CPR 5.0%	CPR 10.0%	CPR 15.0%	CPR 20.0%	CPR 25.0%	CPR 30.0%	CPR 35.0%	CPR 40.0%	CPR 45.0%	建行假设 CPR 12.98%
平均回收期 (WAL)	6.56	4.76	3.63	2.88	2.35	1.97	1.67	1.43	1.24	1.09	3.15

"B级资产支持证券"加权平均回收期（不同提前还款率）

	CPR 0.0%	CPR 5.0%	CPR 10.0%	CPR 15.0%	CPR 20.0%	CPR 25.0%	CPR 30.0%	CPR 35.0%	CPR 40.0%	CPR 45.0%	建行假设 CPR 12.98%
平均回收期 (WAL)	16.81	13.90	11.34	9.32	7.75	6.57	5.63	4.88	4.26	3.74	10.08

"C级资产支持证券"加权平均回收期（不同提前还款率）

	CPR 0.0%	CPR 5.0%	CPR 10.0%	CPR 15.0%	CPR 20.0%	CPR 25.0%	CPR 30.0%	CPR 35.0%	CPR 40.0%	CPR 45.0%	建行假设 CPR 12.98%
平均回收期 (WAL)	20.01	16.41	13.82	11.57	9.75	8.27	7.11	6.18	5.40	4.75	12.41

数据来源：建行MBS发行说明书

（3）价值简析

本次MBS为浮动利率债，基准为银行间7天回购利率的月度加权平均利率（B-1M），其中A档加110BP，B档加170BP，C档加280BP。2005年12月份的基准为1.42%，对应得A档（AAA）利率为2.52%B档（A）为3.12%，C档（BBB）为4.22%。根据调整后A档平均回收期（WAL）为2.5年，B档为9年，C档为10年。与市场同信用同久期的企业债相比，例如AAA级剩余期限1.9年02中移动到期收益率2.61%、剩余期限2.99年01广核债到期收益率3.29%，建元MBS收益水平依然偏低。

8 进一步的研究

本文主要以BDT模型和二叉树方法对中国可变现金流债券的估值进行了尝试性研究，对理论和实践都有一定的借鉴意义，但存在许多不足和有待进一步深入研究的地方：

1．在利率期限结构静态估计方面，我们仅比较了时点上的拟合程度，没有在时间序列上进行统计检验，另外我们发现所有模型对初始参数和样本券的选择都十分敏感，如何选择初始参数和确定样本券等方面的研究将是今后研究的方向。

2．在含权债券的定价方面，我们仅对固定票面利率的债券进行了定价，而市场上已出现以7天回购加权利率为基准的浮动利率的含权券。因此含权债券的定价问题需要更深入的研究。

3．在ABS、MBS估值方面，由于中国资产支持证券市场还处于萌芽阶段，市场不成熟，发行人信息披露不规范，甚至连基本的资产池现金流情况都没有向投资者披露，因此本文主要探讨了资产证券化产品的估值原则和简单的运用，该方面的研究有待深入。

4．最后，本文使用单因子模型对含权产品定价，多因子模型的研究是今后的任务。

参考文献

[1] Black Fisher，Emanuel Derman and William Toy, 1990, “A One Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options”, Financial Analysts Journal, January-February：33-39.

[2] Black, F. & Scholes, M,1973, "The Pricing of Options & Corporate Liabilities" The Journal of Political Economy May .

[3] Black, Fischer and Piotr Karasinski, 1991, "Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal"，Financial Analysts Journal 47：52-59.

[4] Brennan, Michael J. and Eduardo Schwartz, 1979, "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds"，Journal of Banking and Finance 3：133-155.

[5] Carleton, W. T., and I.A. Cooper, 1976, “Estimation and Uses of the Term Structure ofInterest Rates”, Journal of Finance, 31, 1067-1083.

[6] Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephen A. Ross, 1985a, "A Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices"，Econometrica 53：363-384.

[7] Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephen A. Ross, 1985b, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," Econometrica 53：385-407.

[8] Fabozzi, Frank J.，1997 The Handbook of Fixed Income Securities, McGraw-Hill

[9] Fabozzi, Frank J.,2000, Bond Market Analysis and Strategies, 4thed, Prentice Hall, Inc.

[10] Fisher, M., D. Nychka, and D. Zervos, 1995, “Fitting the Term Structure of Interest Rateswith Smoothing Splines”, Working Paper of Federal Reserve Board.

[11] Harrison JM and D. Kreps, 1979, “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets”, Journal of Economic Theory, 20, 381--408.

[12] Heath, David, Robert Jarrow and Andrew Morton, 1990, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation," Journal of Financial Quantitative Analysis 25：419-440.

[13] Heath, David, Robert Jarrow and Andrew Morton, 1992, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology," Econometrica 60：77-105.

[14] Ho, Thomas S. Y. and Sang-Bin Lee, 1986, “Term Structure Movements and PricingInterest Rate Contingent Claims,” Journal of Finance 41：1011-1029.

[15] Hong Yan ,2001 , “Dynamic Models of the Term Structure”, Financial Analysts Journal,60-75.

[16] Hull, J.C.,2000, Options, Futures and Other Derivatives(fourth edition), Prentice Hall.

[17] Hull, John and Alan White, 1990, "Pricing Interest Rate Derivative Securities," The Review of Financial Studies 3：573-592.

[18] Hull, John and Alan White, 1994a, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models," The Journal of Derivatives 2：7-16.

[19] Jamil Baz,George Chacko, 2004，Financial Derivatives Pricing,Applications,and Mathematics, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.

[20] Kopprasch, Robert, William Boyce, Mark Koenigsberg, Armand Tatevossian, and Michael Yampol, 1987, “Effective Duration and the Pricing of Callable Bonds,” Salmon Brothers.

[21] Lin, B.H., and S.K. Yeh, 2001, “Estimation for Factor Models of the Term Structure of Interest Rates with Jumps: the Case of the Taiwanese Government Bond Market”, Journal ofInternational Financial Markets, Institutions and Money, 11, 167-197.

[22] Lin, Hai,,Zhenlong Zheng, 2003 ,“Dynamic Behavior of Interest Rates in China”,Chinese Business Review, Nov.2003, Vol. 2, No.4.

[23] Mcculloch, J.H., 1971,”Measuring the Term Structure of Interest Rates”, Journal ofBusiness, 44, 19-31.

[24] Merton Robert C., 1973, “Theory of Option Pricing”, Bell Journal of Economics and Science, Vol 4.

[25] Merton Robert C., 1992, Continuous-Time Finance, Blackwell Publisher, Cambridge, Massachusetts USA. Chapter 3, On the Mathematics and Economics Assumptions of Continuous-Time Models, ：57-97.

[26] Narasimhan Jegadeesh , Bruce Tuckman, 2000，Advanced Fixed-Income Valuation Tools ，JOHE WILEY&SONS,INC.

[27] Nelson C, Siegel A. “Parsimonious modeling of yield curve”. Journal of Business,1987, 60:473-489

[28] Shea, G. S., 1984, “Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: EquilibriumModels and Spline Approximation”, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 19, 253-269.

[29] Svensson L E.Estimating and interpreting forward interest rates:Sweden 1992-1994[R].Centre for Economic Policy Research,1994:1051

[30] Vasicek O A,Fong H G. Term structure Modeling Using Exponential splines[J]. The Journal of Finance. 1982,52(5):339-350

[31] 陈蓉，“期权调整利差及其运用研究”，《统计研究》2005年，第8期。

[32] 陈雯、陈浪南，“国债利率期限结构：建模和实证”，《世界经济》2000,第 8 期。

[33] 贺涛、陈蓉，“期权调整价差对含权债券定价的作用”，《中国货币市场》，2005年，第6期。

[34] 林海、郑振龙，《中国利率期限结构：理论与运用》，北京：中国财经出版社，2004。

[35] 林海、郑振龙，“中国利率动态模型研究 ”，《财经问题研究》，2005年第9期。

[36] 康朝峰，“中国利率衍生产品的定价和保值”，厦门大学博士学位论文，2004年。

[37] 唐革榕、朱峰，“我国国债收益率曲线变动模式及组合投资管理研究”，《金融研究》，2003年，第11期。

[38] 郑振龙，《金融工程》，高等教育出版社，2003年。

[39] 郑振龙，林海, “中国市场利率期限结构的静态估计”， 武汉金融, 2003b,(3), 33-37.

[40] 郑振龙、康朝锋，“含期权债券利率风险的衡量”，《金融论坛》，2005年，第8期。

[41] 郑振龙、康朝锋，“国开行可赎回和可回售债券的定价”，《证券市场导报》，2005年，第12期。

[42] 朱峰, “国债即期收益率曲线的拟合估计”.证券市场导报,2003,(4):31-36.

附录 1 利率期限结构估计程序（Microsofe Visual Basic）

1、多项式样条

```
Function ps(x, a, b, c, d, e) '多项式样条贴现函数,x 剩余年限，分段点为 4，10
If 0 < x And x < 4 Then
ps = 1 + a * x + b * x ^ 2 + c * x ^ 3
ElseIf 4 <= x And x < 10 Then
ps = 1 + a * x + b * x ^ 2 + c * (x ^ 3 - (x - 4) ^ 3) + d * (x - 4) ^ 3
Else
ps = 1 + a * x + b * x ^ 2 + c * (x ^ 3 - (x - 4) ^ 3) + d * ((x - 4) ^ 3 - (x - 10) ^ 3) + e * (x - 10) ^ 3
End If
End Function

Function pb(r, f, x, a, b, c, d, e) '理论价格,r 票面利率 x 剩余年限 f 付息频率
If f = 0 Then
pb = 100 * ps(x, a, b, c, d, e)
ElseIf f = 1 Then
pb = 100 * ps(x, a, b, c, d, e)
While x > 0
pb = pb + r * ps(x, a, b, c, d, e)
x = x - 1
Wend
ElseIf f = 2 Then
pb = 100 * ps(x, a, b, c, d, e)
While x > 0
pb = pb + (r / 2) * ps(x, a, b, c, d, e)
x = x - 0.5
Wend
End If
End Function
```

2、指数样条

```
Function es(x, a, b, c, d, e, u) '指数样条贴现函数,x 剩余年限，分段点为 4，10
If 0 < x And x < 4 Then
es = 1 + a * (Exp(-u * x) - 1) + b * (Exp(-2 * u * x) - 1) + c * (Exp(-3 * u * x) - 1)
ElseIf 4 <= x And x < 10 Then
es = 1 + a * (Exp(-u * x) - 1) + b * (Exp(-2 * u * x) - 1) + c * (Exp(-3 * u * x) - (Exp(-u * x) - Exp(-4 * u)) ^ 3 - 1) + d * (Exp(-u * x) - Exp(-4 * u)) ^ 3
Else
es = 1 + a * (Exp(-u * x) - 1) + b * (Exp(-2 * u * x) - 1) + c * (Exp(-3 * u * x) - (Exp(-u * x) - Exp(-4 * u)) ^ 3 - 1) + d * ((Exp(-u * x) - Exp(-4 * u)) ^ 3 - (Exp(-u * x) - Exp(-10 * u)) ^ 3) + e * (Exp(-u * x) - Exp(-10 * u)) ^ 3
End If
End Function

Function pe(r, f, x, a, b, c, d, e, u)      '理论价格,r 票面利率 x 剩余年限 f 付息频率
If f = 0 Then
pe = 100 * es(x, a, b, c, d, e, u)
ElseIf f = 1 Then
pe = 100 * es(x, a, b, c, d, e, u)
While x > 0
pe = pe + r * es(x, a, b, c, d, e, u)
x = x - 1
Wend
ElseIf f = 2 Then
pe = 100 * es(x, a, b, c, d, e, u)
While x > 0
pe = pe + (r / 2) * es(x, a, b, c, d, e, u)
x = x - 0.5
Wend
End If
End Function
```

3、N-S 模型

```
Function ns(x, a, b, c, d) 'n-s 模型,x 剩余年限
ns = a + (b + c) * (1 - Exp(-d * x)) / (d * x) - c * Exp(-d * x)
```

```
End Function

Function pbns(r, f, x, a, b, c, d) '理论价格,r 票面利率 x 剩余年限 f 付息频率
If f = 2 Then
pbns = 100 * Exp(-ns(x, a, b, c, d) * x)
While x > 0
pbns = pbns + (r / 2) * Exp(-ns(x, a, b, c, d) * x)
x = x - 0.5
Wend
Else
pbns = 100 * Exp(-ns(x, a, b, c, d) * x)
While x > 0
pbns = pbns + r * Exp(-ns(x, a, b, c, d) * x)
x = x - 1
Wend
End If
End Function
```

4、Svesson 模型

```
Function sv(x, a, b, c, d, e, u) 'svensson 模型,x 剩余年限
sv = a + b * (1 - Exp(-e * x)) * Exp(-e * x) / e / x + c * ((1 - Exp(-e * x)) / e / x - Exp(-e * x)) + d * ((1 - Exp(-u * x)) / u / x - Exp(-u * x))
End Function

Function pbsv(r, f, x, a, b, c, d, e, u) '理论价格,r 票面利率 x 剩余年限 f 付息频率
If f = 2 Then
pbsv = 100 * Exp(-sv(x, a, b, c, d, e, u) * x)
While x > 0
pbsv = pbsv + (r / 2) * Exp(-sv(x, a, b, c, d, e, u) * x)
x = x - 0.5
Wend
Else
pbsv = 100 * Exp(-sv(x, a, b, c, d, e, u) * x)
While x > 0
```

```
pbsv = pbsv + r * Exp(-sv(x, a, b, c, d, e, u) * x)
x = x - 1
Wend
End If
End Function
```

附录 2 在 Matlab 中估计 BDT 模型

BDT 利率树代表的是在一段时间的利率的动态演变过程，我们将如何利用 Matlab 中的金融衍生工具箱构造 BDT 利率树。

建立 BDT 利率树

构造 BDT 利率树

Matlab 使用 bdttree 函数来创建一个 BDT 利率树，调用该函数的语法为

BDTTree = bdttree(VolSpec, RateSpec, TimeSpec)

这个函数有三个输入参数，其中 VolSpec 是利率波动率的期限结构参数，它用 bdtvolspec 函数来设定。RateSpec 是利率期限结构参数，它用 intenvset 函数来设定。TiemSpec 是树图时间展开结构参数，它用 bdttimespec 函数来设定。

（1）设定波动率期限结构（VolSpec）

bdtvolspec 函数用来设定利率波动率的期限结构，调用 bdtvolspec 函数的语法为：

VolSpec = bdtvolspec(ValuationDate，VolDates，VolCurve，InterpMethod)

bdtvolspec 函数的输入参数有 4 个，ValuationDate 是利率树中的第一个观测日，也是估值的日期；VolDates 是收益率波动率的结束日期组成的向量；VolCurve 是收益率波动率组成的向量；还有一个可选参数 InterpMethod 设定的是插补（interpolation）的方法，默认的方法是线性插值。

例：

```
ValuationDate = datenum('01-01-2000');
EndDates = datenum(['01-01-2001'; '01-01-2002'; '01-01-2003';'01-01-2004'; '01-01-2005']);
Volatility = [.2; .19; .18; .17; .16];
BDTVolSpec = bdtvolspec(ValuationDate, EndDates, Volatility)
```

输出结果为：

BDTVolSpec =

FinObj: 'BDTVolSpec'

ValuationDate: 730486

VolDates: [5x1 double]

VolCurve: [5x1 double]

VolInterpMethod: 'linear'

（2）设定利率期限结构（RateSpec）

intenvset 函数用来设定利率期限结构。它的调用格式为：

RateSpec = intenvset('Compounding',1,'Rates', Rates,'StartDates', StartDates, 'EndDates', EndDates,'ValuationDate', ValuationDate)

例：

Compounding = 1;

Rates = [0.02; 0.02; 0.02; 0.02];

StartDates = ['01-Jan-2000';'01-Jan-2001';'01-Jan-2002';'01-Jan-2003'];

EndDates = ['01-Jan-2001';'01-Jan-2002';'01-Jan-2003';'01-Jan-2004'];

ValuationDate = '01-Jan-2000';

RateSpec = intenvset('Compounding',1,'Rates', Rates,'StartDates', StartDates, 'EndDates', EndDates,'ValuationDate', ValuationDate)

输出结果为：

RateSpec =

FinObj: 'RateSpec'

Compounding: 1

Disc: [4x1 double]

Rates: [4x1 double]

EndTimes: [4x1 double]

StartTimes: [4x1 double]

EndDates: [4x1 double]

StartDates: [4x1 double]

ValuationDate: 730486

Basis: 0

EndMonthRule: 1

可以用 datedisp 函数检验定义在变量 RateSpec.中日期。例如

datedisp(RateSpec.ValuationDate)

输出结果将是

01-Jan-2000

（3）设定树图时间展开结构（TiemSpec）

bdttimespec 函数用来设定 BDT 利率树图时间展开结构，这个结构定义了从观测时间到对应日期的映射。调用 bdttimespec 函数的格式为：

TimeSpec = bdttimespec(ValuationDate, Maturity, Compounding)

其中 ValuationDate 是树图中的第一个观测日，Maturity 是在树图节点上发生现金流的日期，Compounding 是每年计复利的次数。

用设定利率期限结构相同的参数调用 bdttimespec 就可以设定对应利率树图的时间展开结构。

例：

Maturity = EndDates;

TimeSpec = bdttimespec(ValuationDate, Maturity, Compounding)

则输出结果为：

TimeSpec =

FinObj: 'BDTTimeSpec'

ValuationDate: 730486

Maturity: [4x1 double]

Compounding: 1

Basis: 0

EndMonthRule: 1

要注意的是在 TimeSpec 中设定的到期日并不一定要和设定利率期限结构的时候使用的 EndDates 一致。

例：构造一个 BDT 利率树

使用前面的例子中设定的波动率期限结构，利率期限结构和树图时间展开结构作为 bdttree 的输入参数。

BDTTree = bdttree(BDTVolSpec, RateSpec, TimeSpec)

输出结果为：

BDTTree =

FinObj: 'BDTFwdTree'

VolSpec: [1x1 struct]

TimeSpec: [1x1 struct]

RateSpec: [1x1 struct]

tObs: [0 1.00 2.00 3.00]

TFwd: {[4x1 double] [3x1 double] [2x1 double] [3.00]}

CFlowT: {[4x1 double] [3x1 double] [2x1 double] [4.00]}

FwdTree: {[1.02] [1.02 1.02] [1.01 1.02 1.03] [1.01 1.02 1.02 1.03]}

（二）BDT 利率树的运用

在使用 BDT 模型的时候，Matlab 金融衍生工具箱用树图来代表利率和价格。这些树图包含了几个 Matlab 结构，这些结构包含了用来解释树图所含信息的所有信息。现在我们看看 BDT 利率树图结构的详细信息。

BDT 利率树图的结构

输入 BDTTree

输出结果为

BDTTree =

FinObj: 'BDTFwdTree'

VolSpec: [1x1 struct]

TimeSpec: [1x1 struct]

RateSpec: [1x1 struct]

tObs: [0 1 2 3]

TFwd: {[4x1 double] [3x1 double] [2x1 double] [3]}

CFlowT: {[4x1 double] [3x1 double] [2x1 double] [4]}

FwdTree: {1x4 cell}

FwdTree 包含的是实际的利率树，它在 Matlab 中用一个元素矩阵来表示，其他变量中包含着解释 FwdTree 的元素的信息。其中最重要的是 VolSpec、TimeSpec 和 RateSpec，它们分别包含了波动率期限结构、树图时间展开结构以及利率期限结构的信息。

输入

[BDTTree.RateSpec.StartTimes
BDTTree.RateSpec.EndTimesBDTTree.RateSpec.Rates]

显示结果为：

ans =

0 1.0000 0.1000

0 2.0000 0.1100

0 3.0000 0.1200

0 4.0000 0.1250

下面是查看第 2、3 和 4 期的利率的命令与输出结果：

BDTTree.FwdTree{2}

ans =

1.0979 1.1432

BDTTree.FwdTree{3}

ans =

1.0976 1.1377 1.1942

BDTTree.FwdTree{4}

ans =

1.0872 1.1183 1.1606 1.2179

2．用 treepath 来验证结果

treepath 函数可以用来观察从根节点出发的一条利率演变路径。举个例子，设有一条利率路径从根节点出发，然后上行、下行最后再下行。我们要看在这条路径上利率的演变过程，可以用下面的命令：

FRates = treepath(BDTTree.FwdTree, [1 2 2])

返回结果为：

FRates =

1.1000

1.0979

1.1377

1.1606

3．树图结构的图形显示

treeviewer 函数可以用图形的形式来看利率树图，调用格式为：

treeviewer(BDTTree)

4.将二叉树导出

例如 10 期的二叉树

```
Rate=zeros(10,10);
for i=1:10
    Rate(i,1:i)=cell2mat(BDTTree.FwdTree(i));
End
```

后 记

经过艰苦的努力，论文写作终于接近尾声。回首过往，虽然论文撰写的每一环节都是十分辛苦，但自己无论在理论水平还是研究能力上，都得到一次有益的锻炼和提升，我想这应该是我从论文写作中获得的最大收获。

在研究生生活即将结束之际，首先我要感谢的是我的导师郑振龙教授。郑老师带领我进入了一个崭新的研究领域，使我这个原来对金融工程一无所知的学生，已能窥其全貌。郑老师不遗余力地精心教导，传授给我一生都受用不尽的知识，这是我一生最大的财富。郑老师在研究、工作和生活中的睿智让我佩服不已。郑老师的教学理念系统、科学，而且一直走在国内的前沿，能成为郑老师的弟子我感觉很幸运。

同时，也要感谢金融系的朱孟楠教授、陈国进教授、邱崇明教授、魏巍贤教授，感谢他们对我学习上的指导和点拨。还要感谢这里未能提及的关心和支持过我的老师们。

深深感谢陈蓉、林海在学术上的指导，感谢王保合、郑泽星、唐革榕、黄兴李、冯玲、陈淼鑫、林琳、阚路、杨伟、陈蕾、李明……你们的同学之情是我最难忘的回忆。

最后还要感谢我的家人，你们是我所有动力的源泉。

贺　涛
2006年3月于厦门大学