学校编码：10384　　分类号_____密级_____

学号：15620111151940　　UDC _____

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

国债期货中的择券期权—定价与应用

Quality Option in Treasury Bond Futures-Pricing and Application

杜培俊

指导教师姓名：陈　蓉　　教授

专 业 名 称：金 融 工 程

论文提交日期：2014　年　　月

论文答辩时间：2014　年　　月

学位授予日期：2014　年　　月

答辩委员会主席：_____

评　　阅　　人：_____

2013 年　　月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　）课题（组）的研究成果，获得（　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘要

国债期货合约中内含的择券期权允许国债期货合约的空头在交割时选择可交割国债库中的任意一个国债进行交割。由于在交割前的任意一个时点上投资者都不知道交割时的最便宜可交割国债(CTD 券)是哪一个，因此，择券期权是有价值的。而由于该期权归国债期货的空头所有，因此，该择券期权的价值越大，则国债期货的价格越低。择券期权的存在对国债期货的定价及应用具有重大影响。因此，本文专注于研究择券期权定价、国债期货定价并基于定价提出了国债期货的投资交易策略。另外，本文还研究了在考虑择券期权时，国债期货的久期随国债利率水平的变化。通过本文的研究发现，首先，在目前的利率水平下，国债期货的择券期权基本没有价值；其次，采用 BDT 模型为国债期货定价具有较好的效果；最后，通过对不同可交割国债的基差进行研究发现，不同可交割国债基差的回报结构类似与不同的利率期权，投资者可以通过对其进行交易来选择适合自己的投资策略。本文的研究还发现随着利率水平的下降，国债期货的久期会呈现出阶段性下降与阶段性持平间隔出现的现象。

关键词：国债期货；择券期权；CTD 券

Abstract

The quality option implicit in treasury bond futures contract allows the short position to satisfy the contract by delivering one of a variety of specified bonds. As before the delivery day, knowledge of which of the allowed bonds will be cheapest at delivery is uncertain, then the quality option will have value. Besides, as the quality option is owned by the short position, the greater the value of the option, the lower will be the futures price. The existence of quality option makes great significance to treasury bond futures' pricing and application. This paper concentrates on pricing of quality option and treasury bond futures, and proposing some trading strategies on treasury bond futures based on pricing. In addition, this paper has studied the change of treasury bond futures' duration to the yield of treasury bond. Through research in this paper, we get some conclusions below. First, in the current situation, the quality option implicit in treasury bond futures is near to zero. Second, pricing the treasury bond futures using BDT is effective. Finally, the return structure of the basis of each delivery bonds is similar to different options of interest rate and investors can choose one suitable for themselves. At last, the research in this paper also presents that the duration of the treasury bond futures is a curve with Periodical decline and flatness occurred between intervals

Keywords: Treasury Bond Futures; Quality Option; CTD

目录

第一章 引言 1

1.1 选题背景 1

1.2 研究意义 2

1.3 研究内容 2

1.4 本文的贡献 3

1.5 本文结构 3

第二章 文献综述 5

2.1 基于债券价格随机过程进行择券期权定价的文献综述 5

2.2 基于即期利率随机过程进行择券期权定价的文献综述 7

2.3 基于国债期货的套期保值及套利策略设计的文献综述 8

2.4 文献综述小结 9

第三章 国债期货简介 11

3.1 我国的国债期货合约简介 11

3.2 我国国债期货合约与美国长期国债期货合约比较 12

第四章 理论模型 15

4.1 模型简介 15

4.2 选用该模型的理由 15

4.3 模型推导 15

4.4 BDT 模型数值算法 17

4.5 BDT 利率树的嫁接 20

第五章 基于 BDT 模型的国债期货及其择券期权定价 23

5.1 我国即期利率的正态性检验 23

5.2 择券期权及相关名词定义 25

5.3 数据描述 26

5.4 国债期货及择券期权定价 27

5.4.1 CTD 券的选取 27
5.4.2 择券期权定价 32
5.4.3 国债期货合约定价 33
5.4.4 国债期货理论定价与可交割国债价格的关系 36
5.4.5 可交割国债的基差 38
5.4.6 基于基差收益特征的国债期货交易策略设计 41
5.4.7 国债期货久期 47
第六章 结论与研究展望 49
6.1 本文结论 49
6.2 研究展望 50
参考文献 51
致谢 53

Contents

Chapter 1 Introduction 1

1.1 Background.....1

1.2 Significance 2

1.3 Contents.....2

1.4 Concentration 3

1.6 Structure 3

Chapter 2 Review of the Literature 5

2.1 Literature of Quality Option Pricing Based on Stochastic Bond Price.....5

2.2 Literature of Quality Option Pricing Based on Stochastic Spot Rate.....7

2.3 Literature of Hedging and Strategy Design Based on Treasury Bond Futures Pricing 8

2.4 Summary of Literature.....9

Chapter 3 Brief Introduction on Treasuty Bond Futures 11

3.1 Brief Introduction on China's Treasury Bond Futures.....11

3.2 Contrast Between China's and America's Treasury Bond Futures 12

Chapter 4 Theoretical Model.....15

4.1 Brief Introduction of the Model.....15

4.2 Reasons for Choosing the Model.....15

4.3 Model's Deduction.....15

4.4 BDT Model and its numerical Algorithm 17

4.5 Grafting of BDT Interest Rate Tree 20

Chapter 5 Pricing of Treasury Bond Futures and Quality Options Based on BDT.....23

5.1 Normal Test on Spot Rate 23

5.2 Definition of Quality Option and Related Expression 25

5.3 Data Description **26**

5.4 Pricing of Treasury Bond Futures and Quality Option **27**

5.4.1 Choosing CTD 27

5.4.2 Pricing of Quality Option 32

5.4.3 Pricing of Treasury Bond Futures 33

5.4.4 Relation Between Theoretic Price of Treasury Bond and its Futures 36

5.4.5 Basis of Treasury Bonds that can be Used for Delivery 38

5.4.6 Trading Strategies Based on Basis Return Structure 41

5.4.7 Duration of Treasury Bond Futures 47

Chapter 6 Conclusion and Deficiency **49**

6.1 Conclusion **49**

6.2 Futher Study **50**

Reference **51**

Acknowledgements **53**

第一章 引言

1.1 选题背景

在我国，利率市场化正在快速推进。利率市场化意味着利率的波动将会增加，为了配套利率市场化进程，让金融机构能够对利率风险进行对冲，我国国债期货合约于 2013 年 9 月 6 日正式推出。

中金所此次推出的国债期货合约是 5 年期国债期货合约，其标准券是票息为 3%，剩余期限为 5 年的记账式附息国债。由于该国债期货合约的交割可以用很多的可交割国债进行，中金所会发布针对每一个可交割国债对应于每个国债期货合约的转换因子，该转换因子可以将每个可交割国债与国债期货的标准券联系起来。尽管存在转换因子对各个可交割国债的差别进行调整，但是由于转换因子并不能完美反应各个可交割国债之间相对价值，因此会给利用国债期货进行风险对冲的投资者带来风险。之所以存在该风险，是因为投资者进行利率风险对冲时的收益会受到其用哪个可交割国债进行交割的影响。

当未来的国债利率随机变动时，由于很多国债都可以用来交割，投资者实际会选择哪个国债进行交割在交割之前无从得知的。由于可以用来进行交割的最便宜国债会随着时间变化，而国债期货的空头则拥有这样一种权利，即等到交割时选择一个最便宜的可交割国债用来交割，这种国债期货的空头所拥有的权利则被称为择券期权。

由于国债期货合约的空头拥有择券期权，因此，在均衡市场上，国债期货的实际价格会相对传统的持有成本定价方法[①]所得到的理论价格低，以反映空头所拥有的这样的权利。特别的，国债期货是依据最便宜可交割国债来定价的，因此，均衡市场上的国债期货价格会小于假设标的资产为最便宜可交割国债时通过持有成本模型得到的国债期货价格，而两者之间的差额正是反映了择券期权的价值。

正是由于择券期权的存在，使得国债期货的定价更加复杂，利用国债期货进行套保面临更大的基差风险[②]；同时也是因为择券期权的存在，使得国债期货有

[①] 该方法是不考虑期权时，利用当前的 CTD 券和市场融资利率，利用无套利方法得到国债期货价格。
[②] 基差风险即是由于基差组合中现货和期货的变化幅度不一致带来的基差组合价值波动的风险。

了它独特的魅力。本文即专注于研究该择券期权定价、基于择券期权的国债期货定价及基于定价的交易策略设计，并提出了考虑择券期权时的对利率产品进行套保的建议。

1.2 研究意义

国债期货合约中择券期权的存在对国债期货的定价和应用具有重大影响，这些影响主要体现在以下几个方面。

第一，择券期权的存在，使得国债期货的定价变得更加复杂。由于当前的最便宜可交割国债在交割时并不一定是最便宜的，所以国债期货在参照最便宜可交割国债进行定价时，需要考虑对该择券期权的价值进行调整。

第二，择券期权的存在使得基于每个可交割国债的基差组合可以设计出丰富的基差交易策略。

第三，择券期权的存在使得利用国债期货进行套期保值变得更加复杂。在不考虑择券期权时，国债期货的理论久期会在标准券票息 3%左右发生跳跃，而这与实际是不相符的，所以，如果使用不考虑择券期权时的理论久期指导利率产品的套保，则会带来较大的基差风险。而如果在考虑到择券期权后，国债期货的 理论久期才能更好的贴近实际，为实际进行套保提供有意义的指导。

择券期权是国债期货区别于其他期货的重要特征，对国债期货的定价及应用具有重大影响，因此，对其进行深入研究就显得尤为迫切。

1.3 研究内容

本文利用了银行间国债估值、国债期货每日收盘价及样本期内每天的利率期限结构等数据，选择了动态利率模型家族中的单因子模型 BDT[1](Fischer Black, Emanuel Derman and William Toy 1990)来为国债期货合约及其择券期权定价，主要得到以下结论：第一，在目前国债利率远高于国债期货标准券票息的情况下，国债期货的择券期权基本没有价值；第二，通过 BDT 模型所得到的理论国债期货价格在经过国债利率期限结构误差和国债利率与实际融资利率差额调整后，与国债期货市场价格的平均差额仅为 0.0806，且国债期货理论价格与国债期货实际

市场价格的差额归因于国债期货市场定价偏误；第三，可交割国债基差[③]的回报特征类似于不同的利率期权，可以为投资者提供多样化的投资机会；第四，通过模拟不同利率水平下国债期货的理论价格，可以得到国债期货的久期，本文的研究发现，由于受利率变化时 CTD 券切换的影响，国债期货的久期随着国债利率水平的下降呈现出阶段性下降与阶段性持平间隔出现的连续而非光滑曲线。

1.4 本文的贡献

本文的贡献主要体现在以下几个方面。第一，本文是国内首篇基于动态利率模型为国债期货及其择券期权定价的文献；第二，本文基于国债期货及择券期权定价提出了丰富多样的国债期货交易策略；第三，本文专门探讨了在考虑到择券期权时，国债期货的理论久期是怎样变化的，这可以在利用国债期货对固定收益类产品进行利率风险对冲时的效率有大幅改进。

1.5 本文结构

本文的内容主要分为以下几个部分：

第一章为引言。该章主要介绍了什么是择券期权，择券期权的由来、择券期权的重要性及研究该期权的意义。另外，这部分还对本文所使用的研究方法和主要结论及贡献进行了简要阐述。

第二章为文献综述。鉴于当前对我国国债期货合约中隐含的择券期权进行研究的文献寥寥无几，这部分主要是对国外研究择券期权定价及其应用的文献进行了介绍及总结。

第三章则主要介绍了我国的国债期货合约，并对比了中美国债期货合约之间的差异，提出了我国国债期货合约中的择时期权仅有应计利息期权，而没有月末期权和百搭牌期权，且应计利息期权相对美国的长期国债合约也较小，加之国外的研究表明择时期权对国债期货价格的影响甚微，本文专注于研究择券期权。

第四章主要是对本文所使用的模型进行了简要介绍，包括模型推导、模型数值算法及计算过程中所使用的重要技术—利率树嫁接。

第五章则是本文的实证结果，包括模型假设检验、国债期货及其择券期权的

[③] 基差=现货净价-转换因子×期货价格

定价结果，基差交易策略方案设计及考虑择券期权时的国债期货久期模拟。

第六章为本文结论。

第二章 文献综述

国际上关于国债期货中的择券期权价值的研究主要集中于上世纪 70 年代至 90 年代，主要研究国债期货定价、择券期权、择时期权定价及利用国债期货进行套保的套保效率研究。

现有对择券期权进行定价的国外文献主要采用两个方法体系：第一个体系是直接假设每个债券所服从的动态过程，从而基于交换期权的定价体系来为择券期权定价；第二个体系是假定瞬时即期利率或瞬时远期利率服从的动态过程，从而把择券期权的价值表示成利率的函数来得到择券期权的价值。对于利率动态过程的建模则又可以分为单因子模型和多因子模型。其中单因子模型即直接对瞬时即期利率或瞬时远期利率进行建模，而多因子模型则是对影响利率变动的因子进行动态建模。

2.1 基于债券价格随机过程进行择券期权定价的文献综述

William Margrabe(1978)[2]阐述了对资产交换期权进行定价的思路。该文章表明：在假设资产价格服从几何布朗运动的基础上，考虑到两个资产之间的相关性，利用类似 BSM④的定价方式，即可以得到交换期权价值的解析解。

Gay and Manaster(1984)[3]利用了 William Margrabe(1978)交换期权的定价方法来为商品期货合约中的质量期权（在国债期货合约中被称为择券期权）定价，该文章中只考虑了两种可交割资产的情况，发现在小麦期货合约中，该质量期权的价值平均大约占期货价格的 2.2%。

Hemler（1988）[4]发展了 William Margrabe(1978)的交换期权定价方法，将两个资产的交换期权的定价方法扩展到了具有 n（n>=3）个资产的情况。通过该文章中的方法，我们可以为这样一种权利定价，即投资者持有这 n 个资产中的某个资产，在到期时，他有权利用这个资产去换取所有资产中价值最大的资产。

Hemler(1990)[5]利用了三种方法来计算择券期权的价值，第一种方法是利用无套利的方法来计算市场价格中隐含的择券期权价格，即假设 t 时刻投资者买入

④ Black, Scholes and Merton (1973)

最便宜可交割国债，同时卖出相应份的国债期货，并在交割日进行交割，所能获得的年化收益率等于现在的无风险利率，满足该条件的国债期货价格与实际国债期货价格的差额即为国债期货择券期权的价值。该方法计算出来的择券期权的价值是市场上的国债期货价格中所隐含的择券期权价值。

第二种方法是利用 payoff 法直接计算出在交割日这天执行期权的价值。该价值反映了过去一段时间内实际期权的价值，是一种事后的期权价值，只能作为实际择券期权价值占国债期货价格比例的一个参照，用来说明择券期权的重要性，并不能为我们提前确定择券期权的价值提供有意义的参考，也不是真实意义上的定价。

第三种方法是利用 Hemler（1988）交换期权的定价方法来实现为择券期权定价。在利用交换期权为择券期权进行定价时，Hemler 假设每个国债的价格都服从几何布朗运动，而这个假设在为我国的择券期权进行定价时略显牵强。因为，与美国的长期国债期货合约不同，我国的国债期货的可交割券为截止交割月第一天剩余期限为 4-7 年的记账式付息国债，而国债的价格在到期时会收敛于面值，因此，对于剩余期限为 4-7 年的国债假设其服从几何布朗运动不够合理。

Boyal（JOF 1989）[6]假设 n 种可交割券服从 n 维对数正太分布，假定截止期货到期日的利率是一个常数，该利率假定可可使期货价格等于远期价格。通过利用看涨期权和看跌期权复制远期的思路，通过为看涨期权和看跌期权定价，进而实现为择券期权定价。

$$F(\mathrm{t},[\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_\mathrm{n}]),(\mathrm{t},\mathrm{T})=\mathrm{e}^{RT}EC[\mathrm{t},[\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_\mathrm{n}],0,(t,\mathrm{T})]$$

其中，上式左边为考虑择券期权时的理论国债期货价格，右边是执行价格为 0，标的产品为资产$\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_\mathrm{n}$的最小值的欧式看涨期权价格的终值。为了给该看涨期权定价，该文章引用了 H.Ruben（1954）[7]，这篇文章解决了怎样为多维正态变量的顺序统计量求解矩的问题。但是，把这种方法应用于我国的国债期货的择券期权定价与 Hemler(1990)存在着同样的问题。

Grieves and Marcus(2005)[8]利用交换期权的定价方法来为只含有两个可交割券的择券期权定价，并研究了这种期权的存在对套期保值效果的影响。该文章的研究发现：假设利率期限结构是平的时，当利率水平在 6%附近（美国长期国债期货合约标准券的票息率）时，传统的不考虑择券期权时期货价格的基点值会发

生跳跃，而考虑到择券期权时期货价格的基点值则不会发生跳跃，从而当考虑到择券期权时，我们可以降低 CTD 券变化引起的套期保值风险。另外，该文章还发现，通过引入择券期权，可以解释国债期货价格在 6%附近呈现负凸性的现象。

2.2 基于即期利率随机过程进行择券期权定价的文献综述

Kane and Marcus(1986)[9]通过估计期货合约到期日的利率期限结构来估计到期时的 CTD 券。作者利用 1978-M1-1982-M12 的国债到期收益率信息，把每个月作为一个样本，作如下横截面回归：

$$y=b_0+b_1T^{1/2}+b_2T+b_3T^2+b_4T^3+coupon(c_0+c_1T)$$

然后对相邻两个月的回归系数做差分，利用 60 个月的 59 个差分数据，从而估计出系数的分布，采用蒙特卡罗模拟的方法，即可以得到期货合约到期时收益率期限结构系数的分布，从而可以得到在每一个利率路径上的 CTD 券，进而可以利用该分布确定出择券期权的价值。该文章估计出的择券期权的价格占期货合约价格的 1.9%-6.2%，是现存文献中估计结果最大的。该文章对择券期权的估计方法存在着诸多不足：首先，上述的横截面回归式不具有现实的经济意义，缺乏理论基础；其次，我们利用 59 个数据并不能很精确的模拟一个分布。因此，这种方法在用来为择券期权定价缺乏理论的支撑。

Richard J.Rendleman.JR(2004)[10]采用 BDT 模型来为瞬时即期无风险利率建模，从而得到了考虑择券期权时的国债期货价格，相应的也就得到了择券期权的价值。其次，该文章还得到了用国债期货对冲 CTD 券的对冲比率。该文章的研究表明：当假设利率期限结构是平的时，当利率处于 6%左右的水平时，传统的基于当前 CTD 券的对冲比率变动幅度很大，因此，并不能很好地实现利率风险对冲。而当利率显著不同于 6%时，传统的基于当前 CTD 券久期的方法得到的对冲比率则是比较准确的。这个结论与 Grieves and Marcus(JOD 2005)基于两个可交割券的研究结论是相符合的。再次，该文章的研究还表明：即期利率的波动率对传统的基于当前 CTD 券进行套期保值的效果具有很大影响，即期利率的波动率越大，传统的基于当前 CTD 券久期的套期保值比率越不准确。这种方法采用了 HJM 框架下的 BDT 模型，从而可以使模型的参数匹配当前市场的利率期限结构和波动率期限结构，因此，尽可能的利用了市场上的信息。然而，该模型在我国

的应用仍然存在着一定的局限性，由于我国不存在利率期权的产品，因而，我们不能提取市场上隐含的利率波动率，而只能使用历史波动率。

R Ben-Abdallah, H Ben-Ameur, M Bretor(2012)[11]同时考虑了择时期权，择券期权来为国债期货合约定价。本文分别采用了 vasicek 模型，CIR 模型和 HW 模型来对即期利率建模，采用向后递归的办法得到国债期货价格的数值解。该文章采用了 1990-2008 的数据作为样本。研究发现，在交割前两个月的时间，国债期货的市场价格比理论价格平均低约 2%，这说明如果 HW 模型适用于为利率建模，则市场高估了择券期权的价值。其次，根据本文的结论，择券期权是交割期权中价值最大的，在不考虑择时期权时，择券期权的价值约占期货合约面值的 0.33%，而当考虑到择时期权时，择券期权的价值约占期货合约面值的 0.36%。在不考虑择券期权时，择时期权约占期货合约面值的 0.072%，而当考虑到择券期权时，择时期权的价值约占期货合约面值的 0.1%。之所以出现这样的情况，是因为这两种期权是相互影响的，当拥有择时期权时，期货空头就有更多的时间去行使择券期权，从而使得期货空头可以从行使择券期权中获得更高的收益。这就解释了当拥有择时期权时，择券期权的价值会更大。再次，作者还对月末期权和百搭牌期权进行了独立估值，发现在样本期内，月末期权平均约占期货合约面值的 0.061%，而百搭牌期权平均约占期货合约面值的 0.007%。在该文章所采用的样本期内，期货价格倾向于被低估，这是因为在样本期内，利率期限结构大多数都是向上倾斜的，由于短期利率低，所以融资成本低，所以现券持有者（期货空头）会推迟交割，从而导致期货价格被低估。Gay and Manaster（1986）发现，在 1977-1983 年，市场的期货价格高于理论的期货价格，而恰好这段时期的利率期限结构是向下倾斜的，与本文的结论相同。

2.3 基于国债期货的套期保值及套利策略设计的文献综述

Alejandro Balba and Susana Reichardt（2010）[12]对择券期权采用了不同于前人的定义，其对择券期权的定义如下（前人的定义是 min）：

$$q=\max_{j}\left(\frac{p_{o,j}}{\delta_j}-\frac{f}{(1+r)^T}\right)$$

该文章采用了无套利的方法从市场价格中提取择券期权的价格，发现在德国

国债期货市场上，该择券期权的价值随着期货合约到期日的临近，其价值逐渐下降，从而可以利用该特点来进行趋势套利，这种方法与卖出基差最大的可交割券的基差的交易策略具有一定的相似性。因此，可以选择先卖出该择券期权，再在未来买入，即可获得较丰厚的套利收益。

Grieves and Marcus（2010）[13]采用了 CBOT 交易的 bond future 和 note future 来对 Grieves and Marcus(2005)的文章进行了实证检验，发现只包含两个可交割券（最高久期可交割券和最低久期可交割券）的方法所得到的结果与 note future 市场所呈现的结果比较一致，而与 bond future 市场上所呈现的结果并不符合。文章对该实证结果给出的解释是：利率期限结构是水平的这一假设并不合理且 bond future 的可交割券的期限跨度较大。

2.4 文献综述小结

在国外关于择券期权的研究中，许多文献采用了直接假设国债价格服从对数正态分布，考虑了资产的相关性，通过多资产交换期权来为国债期货及择券期权定价。这一系列的定价方法存在着两个缺陷：第一，与股票及其它资产价格不同，国债的价格在到期日时具有强制收敛性，不适合用一个随机过程去描述。特别是在我的国债期货合约中，由于可交割国债最长剩余期限仅为 7 年左右，假设其价格服从对数正态分布较为不合理。第二，由于国债期货具有很多的可交割国债，即使是剔除流动性较差的可交割国债以后，也会剩余 10 只左右的可交割国债，如果采用多资产交换期权的方法，每次都需要去估计各个资产之间的协方差矩阵，并且要采用复杂的计算过程才能得到结果，这势必会影响计算效率，不适合于推广。

另外，也有为数不少的文献采用了通过模拟未来利率期限结构的方法来为择券期权定价。由于每个可交割国债的价格都与当天的利率期限结构有关，且我国的国债期货合约的可交割券为截止期货合约交割月第一天剩余期限为 4~7 年的记账式附息国债国债，而这些国债都属于中期国债，所受影响因子也较为一致，具有较高的相关性。所以通过一个能够描述我国利率特征的利率模型去为我国国债期货及其择券期权定价，是具有合理性的。

第三章 国债期货简介

3.1 我国的国债期货合约简介

2013 年 9 月 6 日，为了配套我国的利率市场化改革，丰富固定收益类产品，为市场提供管理利率风险的工具，国债期货正式上市交易。我国首次推出的国债期货合约是标准期限为 5 年。我国国债期货的相关合约设置见表 1.

表 1　5 年期国债期货合约表

5 年期国债期货合约表

合约标的	面值为 100 万元人民币、票面利率为 3%的名义中期国债
可交割国债	合约到期月首日剩余期限为 4-7 年的记账式附息国债
报价方式	百元净价报价
最小变动价位	0.002 元
合约月份	最近的三个季月（3 月、6 月、9 月、12 月中的最近三个月循环）
交易时间	09:15—11:30， 13:00—15:15
最后交易日交易时间	09:15—11:30
每日价格最大波动限制	上一交易日结算价的±2%
最低交易保证金	合约价值的 2%
最后交易日	合约到期月份的第二个星期五
最后交割日	最后交易日后的第三个交易日
交割方式	实物交割
交易代码	TF
上市交易所	中国金融期货交易所

图表来源 中国金融期货交易所网站

正如表 1 所示，国债期货可用于交割的国债是截止合约到期月首日剩余期限为 4-7 年的记账式附息国债，这就意味着国债期货合约的空头可以用满足条件的可交割券库中的任何一个国债来交割，那么空头一定会选择最划算的国债进行交

割，我们通常把该交割最划算的国债称为最便宜可交割券（CTD）。通常，把国债期货空头所拥有的这个可以选择用交割券库中的任意国债进行交割的权利，称为择券期权，而该期权在一定条件下对国债期货的价格会产生重要影响。

另外，由于国债期货的最后交易日是交割月的第二个周五，那么在交割月最后交易日之前的时间内，投资者都有权利选择继续持仓或者交割。这同样会给投资者一个期权，一个期限为 7~13 天的期权，我们把该期权定义为我国期货合约的择时期权。

3.2 我国国债期货合约与美国长期国债期货合约比较

大量的针对国债期货交割期权进行研究的国外文献主要集中于对美国的长期国债期货合约，我们在此对美国的长期国债期货合约和我国的国债期货合约加以比较，意在通过比较两者的差别来对我们要研究的问题提供有意义的参考。美国的长期国债期货合约的相关信息见表 2.

表 2　5 年期国债期货合约表

美国长期国债期货合约表	
合约标的	面值为 10 万美元、票面利率为 6%的名义长期国债
可交割国债	合约交割月首日剩余期限为 15-25 年的长期国债。对于可赎回国债，在合约到期月首日接下来的 15 年内不可赎回。
报价方式	百元净价报价。报价方式为点位（1 点代表 1000 美元）+1/32 的点位，例如 134-16 代表 134 16/32
最小变动价位	1/32 点（代表一份合约变动 1000/32=31.25）
合约月份	最近的三个季月（3 月、6 月、9 月、12 月中的最近三个月循环）
交易时间	7:20 a.m.~2:00p.m
最后交易日交易截止时间	12:01 p.m.
每日价格最大波动限制	无
最后交易日	交割月最后一个工作日之前的第七个工作日
最后交割日	交割月最后一个工作日
交割方式	实物交割
上市交易所	CBOT

图表来源：CME 官网

通过对美国的长期国债期货合约与我国的国债期货合约的比较，我们可以发现，我国的国债期货合约与美国的长期国债期货合约中内嵌的交割期权主要有以下不同：

(1) 择券期权(Quality Option)。由于美国的长期国债期货的可交割国债为到交割月首日剩余期限在 15~25 年的美国国债，而我国国债期货的可交割国债则是到交割月首日剩余期限为 4~7 年的记账式付息国债。因此，从可交割国债的期限跨度上看，美国长期国债期货合约的跨度较长，从而在其它条件相同的情况下，美国的择券期权价值占国债期货合约面值的比例可能较我国国债期货合约大。

(2) 月末期权(End Of Month Option)。根据美国长期国债期货合约的设计，其最后交易日为交割月最后工作日之前的第七个工作日，而最后的交割日为交割月最后工作日，这就给予了美国长期国债期货空头 7 个工作日的时间来在交易终止后选择是否交割及用哪个国债交割的权利，这种权利被称为月末期权。但是，在我国的国债期货合约设计中，最后交易日交易结束时的未平仓合约全部进入自动交割程序，因此，我国的国债期货合约中并不存在月末期权。

(3) 百搭牌期权(Wild Card Option)。由于美国国债期货交易在下午 2 点结束，而国债现货的交易则在下午 8 点结束，并且国债期货的空头只需要在第二天下午 5 点之前准备好相应的国债进行交割即可。这就使得美国长期国债期货的空头可以在交割通知日的下午 2 点至第二天的下午 5 点之间都可以选择用哪个国债进行交割，这种权利被称为百搭牌期权。而对于我国的国债期货合约，由于国债期货空头在交割日下午 2 点之前申报交割，并且申报内容包括可交割国债名称和数量，这就导致在我国的国债期货合约中并不存在这种百搭牌期权。

(4) 应计利息期权(The Accrued Interest Option)。应计利息期权指的是，由于在交割月内的每一天，国债期货的空头都可以选择交割，所以，国债期货的空头会站在当前的时点上去分析是否应该推迟交割，我们把这种权利称为应计利息期权。由于当天的期货结算价已经确定，所以投资者推迟交割时将会多获得当前时间至最终交割日的 CTD 券票息收入与融资成本差额。如果 CTD 券的票息高于融资成本，则期货空头推迟交割，否则即选择提前交割。对于美国长期国债期货合约，其交割月内都可以进行交割，所以该期权是一个为期一个月的期权。而对于我国的国债期货合约，由于每天是按照买卖双方举牌的最小数量进行交割，所以

卖方在交割时间上几乎没有优势，应计利息期权在我国几乎不存在。

从上文的对比分析，我们可以看出，美国的长期国债期货合约中有 4 个期权，分别是择券期权、月末期权、百搭牌期权和应计利息期权。而我国的国债期货合约则没有月末期权和百搭牌期权，也几乎没有应计利息期权。

由于择券期权对于国债期货的价格影响较大，且对我们进一步研究利用国债期货进行套期保值及套利策略设计有重大影响，因此，本文将专注于国债期货择券期权方面的研究。

第四章 理论模型

4.1 模型简介

本文采用动态利率模型家族中的 BDT 模型来为国债期货及其择券期权定价，该模型由 Black, Derman and Toy 于 1990 年提出，Hull and White（1990）[14]给出了该模型的连续形式。该模型假定瞬时即期利率服从对数正态分布，并通过设定时变的漂移率和波动率以同时拟合当前市场上的即期利率期限结构和对应的波动率期限结构，该模型的特点是能够对市场上的现存信息加以充分利用。

通过 BDT 模型可以得到在国债期货交割日的即期利率期限结构分布，从而可以得到每个可交割国债在交割日每个状态下所可能具有的价格，进而可以计算出在交割日不同状态下的国债期货择券期权的价值，再对该价值按照不同的利率路径进行贴现后加权平均即可得到择券期权在定价日的价值。

4.2 选用该模型的理由

之所以选择该模型，主要是基于以下几方面的考虑。

(1) 该模型假定瞬时即期利率服从对数正态分布，这可以保证利率始终为正。

(2) 通过对我国国债一个月期限的利率进行检验，发现其满足对数正态分布。

(3) BDT 模型的漂移率和波动率都是时变的，能够同时拟合市场上的利率期限结构和波动率期限结构，对市场信息的利用更为充分。

(4) 相对于多因子的动态利率期限结构模型，该模型的计算相对容易，能够方便快速的计算出择券期权的价值。

(5) 该模型是在美国市场上应用较为广泛的模型。

4.3 模型推导

Black，,Derman and Toy(1990)[1]最早提出该模型的离散形式，Hull and White（1990）给出了该模型的连续形式，该形式通过利率动态过程表示如下：

$$d\ln(r(t)) = [\hat{u}(t) + \frac{\sigma_t^{'}(t)}{\sigma(t)}\ln(r(t))]dt + \sigma(t)d\tilde{z}(t) \tag{1}$$

Proof：由于假设即期利率服从对数正态分布，所以即期利率可以通过下面的方程表示：

$$\begin{aligned} r(t) &= u(t)\exp(\sigma(t)z(t)) \\ \ln(r(t)) &= \ln(u(t)) + \sigma(t)z(t) \end{aligned} \tag{2}$$

其中，$r(t)$ 为 t 时刻的瞬时即期利率，$z(t)$ 为标准布朗运动，$\ln(u(t)) = E(\ln(r(t)))$ 为瞬时即期利率对数的均值，$\sigma(t) = \sqrt{\mathrm{var}(d\ln(r(t)))/dt}$ 为即期利率对数的波动率。为了证明出（1）式，我们对（2）式两边求微分：

$$\begin{aligned} d\ln(r(t)) &= d\ln(u(t)) + z(t)d\sigma(t) + \sigma(t)dz(t) \\ &= d\ln(u(t)) - \frac{\ln(u(t)) - \ln(r(t))}{\sigma(t)}d\sigma(t) + \sigma(t)dz(t) \\ &= [\frac{u^{'}(t)}{u(t)} - \frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}(\ln(u(t)) - \ln(r(t)))]dt + \sigma(t)dz(t) \\ &= [\frac{u^{'}(t)}{u(t)} - \frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}\ln(u(t)) + \frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}\ln(r(t))]dt + \sigma(t)dz(t) \end{aligned}$$

令 $\hat{u}(t) = \frac{u^{'}(t)}{u(t)} - \frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}\ln(u(t))$ 即可得到（1）式。

通过(1)式我们可以看出，在 BDT 模型中，瞬时即期利率 $r(t)$ 的变化主要由两个参数决定，即 $\hat{u}(t)$ 和 $\sigma(t)$，参数 $\sigma(t)$ 保证模型生成的瞬时即期利率的波动率能够拟合当时的即期利率的波动率期限结构，而 $\hat{u}(t)$ 和 $\sigma(t)$ 共同决定了模型生成的瞬时即期利率能够拟合当前市场的即期利率期限结构。

通过观察 BDT 模型的连续形式及推导过程我们可以发现，BDT 模型生成的瞬时即期利率具有以下性质：

(1) 模型生成的瞬时即期利率总是非负的。

(2) 模型生成的利率具有均值回归的特征，且均值回归速度由利率的波动率期限结构决定。

Proof：通过模型的推导，发现瞬时即期利率的对数可以表示(3)式：

$$d\ln(r(t)) = [\frac{u^{'}(t)}{u(t)} - \frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}(\ln(u(t)) - \ln(r(t)))]dt + \sigma(t)dz(t) \tag{3}$$

由于，通常情况下，市场上长期利率的波动率小于短期利率的波动率，也就是说，$\sigma^{'}(t)<0$。所以，当$r(t)>u(t)$，即瞬时即期利率大于其长期均值时，瞬时即期利率的漂移率$\frac{u^{'}(t)}{u(t)}-\frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}(\ln(u(t))-\ln(r(t))$将会相对较小，从而减缓即期利率的增长速度，相反，瞬时即期利率的漂移率将会较大，从而增加瞬时即期利率的增长速度。因而，该模型具有均值回归的特性，其均值回归速度是$\frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}$，由利率的波动率决定。

4.4 BDT 模型数值算法

由于该模型假定瞬时即期利率服从对数正态分布，即瞬时即期利率的对数服从正态分布，在实际的数值计算中，是通过二项分布去近似正态分布。

假设当前时刻为 0，离散时间间隔为 1 年，一年期即期利率$r(t,t+1)$要么以 1/2 的概率上升至r_u,要么以 1/2 的概率下降至r_d，我们可以通过树图的形式表示，见图 1。

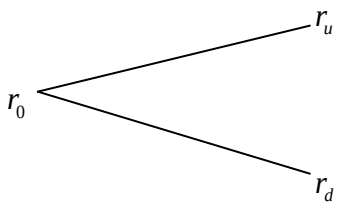

图 1 一年期即期利率单期利率树图

在此，以一个三年期的树图为例来说明怎样构建利率树图，假设构建该树图所需的的利率期限结构信息和波动率期限结构信息见表 3。[⑤]

表 3 即期利率及其波动率期限结构

剩余期限	即期利率	即期利率波动率
1	10%	
2	11%	19%
3	12%	18%

[⑤] 此例子引自陈蓉，郑振龙，固定收益证券[M]，北京大学出版社，2011.

首先，为了能够保证模型生成的瞬时即期利率能够拟合表 3 所给定的利率期限结构，r_u 和 r_d 需要满足方程式(4)，即：

$$(\frac{1}{2}e^{-r_u}+\frac{1}{2}e^{-r_u})\cdot e^{-10\%}=e^{-11\%\times 2} \tag{4}$$

其次，为了保证模型生成的瞬时即期利率能够拟合表 3 所给定的波动率期限结构，我们进行如下推导：

$$E[\ln y(1,2)]=\frac{1}{2}\ln y_u(1,2)+\frac{1}{2}\ln y_d(1,2)$$

$$\begin{aligned}Var[\ln y(1,2)]&=\frac{1}{2}(\ln y_u(1,2)-E[\ln y(1,2)])^2+\frac{1}{2}(\ln y_d(1,2)-E[\ln y(1,2)])^2\\&=\frac{1}{4}(\ln\frac{y_u(1,2)}{y_d(1,2)})^2\\&=\frac{1}{4}(\ln\frac{r_u}{r_d})^2\end{aligned}$$

由于，0 时刻期限为 2 年的国债在 1 时刻的剩余期限为 1 年，所以，此时的 $y(1,2)$ 的波动率即为 0 时刻剩余期限为 2 年的即期利率的波动率，也就是说 $y(1,2)$ 在 1 时刻的波动率为 19%，进而上式可以转化为(5)式：

$$\frac{1}{2}\ln\frac{r_u}{r_d}=19\% \tag{5}$$

联合(4)式和(5)式，我们既可以获得 1 时刻的利率状态 r_u 和 r_d 。

接下来，我们将树图拓展到第三期，相应的瞬时即期利率树图将会拓展为图 2 的情况。

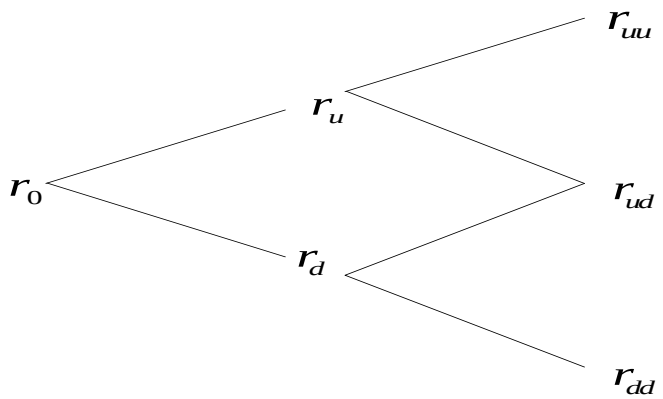

图 2 一年期即期利率两期树图

由于 BDT 模型本身并不能保证节点的重合，为了能够减少未知参数的增加以方便求解，模型通过施加外生的约束以保证节点重合，即，$r_{ud}=r_{du}$。在保证节点重合的条件下，通过图 2 我们发现，在第三期时，我们有三个未知的瞬时远期利率需要求解，分别是r_{uu}，r_{ud}和r_{dd}。那么我们至少需要找到三个方程才能保证求解出这三个未知的瞬时即期利率。

我们首先构建第一个方程。由于，无论一年后的瞬时即期利率是r_u还是r_d，其波动率都应该是相等的，基于瞬时即期利率服从对数正态分布的假设，我们可以构建(6)式作为第一个方程。

$$\frac{1}{2}\ln\frac{r_{uu}}{r_{ud}}=\frac{1}{2}\ln\frac{r_{ud}}{r_{dd}} \tag{6}$$

接下来，我们构造第二个方程。为了能够拟合表 3 中的利率期限结构，r_{uu}，r_{ud}和r_{dd}需要满足(7)式所表示的方程。

$$[\frac{1}{4}(e^{-r_{uu}}\cdot e^{-r_u})+\frac{1}{4}(e^{-r_{ud}}\cdot e^{-r_u})+\frac{1}{4}(e^{-r_{ud}}\cdot e^{-r_d})+\frac{1}{4}(e^{-r_{dd}}\cdot e^{-r_d})]\cdot e^{-10\%}=e^{-12\%\times 3} \tag{7}$$

最后，我们需要构造的第三个方程，即让r_{uu}，r_{ud}和r_{dd}的取值能够拟合表 3 中的波动率期限结构，那么我们需要构建如下(8)式的方程。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(e^{-r_{uu}}\cdot e^{-r_u})+\frac{1}{2}(e^{-r_{ud}}\cdot e^{-r_u})=e^{-y_u(1,3)}\\&\frac{1}{2}(e^{-r_{ud}}\cdot e^{-r_d})+\frac{1}{2}(e^{-r_{dd}}\cdot e^{-r_d})=e^{-y_d(1,3)}\\&\frac{1}{2}\ln\frac{y_u(1,3)}{y_d(1,3)}=18\%\end{aligned} \tag{8}$$

联立(6)、(7)、(8)式，我们既可以求解出满足节点重合，能够同时拟合表 3 中的利率期限结构和波动率期限结构的瞬时即期利率r_{uu}，r_{ud}和r_{dd}。

对于超过三期的利率树构建及瞬时即期利率的求解过程，我们可以完全模仿第三期的情形得到。

4.5 BDT 利率树的嫁接

本文专注于对我国国债期货合约及其中隐含的择券期权进行定价。要实现该定价，我们需要知道在各个利率节点上，每个可交割国债的价格。在我国，国债期货的可交割国债是截止国债期货交割月第一天剩余期限为 4~7 年的记账式附息国债，加上我们对国债期货或其内含择券期权的定价日在交割月之前，所以我们所构建的利率树的跨度至少需要 8 年，如果我们的时间间隔取日，那么该利率树将需要约 365*8=2920 段，对于这么长的树，软件计算的时间将会是一个很值得考虑的问题。另外，当在波动率较大的时候，利率树图的间隔太多会使得向下波动的瞬时即期利率无限的向 0 逼近，当该利率小到超过软件的计算精度时，软件会默认此时的瞬时即期利率为 0，这在一定程度上会影响 BDT 模型的计算精度。但是，在不考虑相关的择时期权的情况下，假定交割日为国债期货交割月最后交割日之前的某一天，那么国债期货的交割日仅仅是一天，也就是说国债期货择券期权的行权日仅仅是该时间跨度内的某一天。

基于上文中的表述，我们发现两个问题。第一，受计算效率及精度要求，所构建的利率树不宜过长；第二，由于国债期货择券期权的行权日仅仅为整个时间跨度内的某一天，所以对于期权价值或国债期货价格的计算，为了保证计算精度，又必须使用时间间隔为日的利率树。这就产生了一对矛盾，我们既不能直接采用时间间隔为日的利率树，也不能直接采用时间间隔更大（例如月）的利率树。

为了解决这个矛盾，我们需要对利率树进行嫁接。[6]所谓嫁接，即我们使用一个时间间隔较大的利率树（下文简称大树），再使用一个时间间隔较小的利率树（下文简称小树），并且使小树和大树能够在某个时间节点上成功衔接，利率树嫁接的直观体现见图 3。

在本文的实证中，在为国债期货及其择券期权定价时，使用了时间间隔为月，时间跨度为 8 年的大树和时间间隔为日，时间跨度为 100 天的利率小树，以保证能够精确的使用 BDT 模型实现定价。

[6] 该思想来源于 Fischer Black, Emanuel Derman and William Toy (1990).

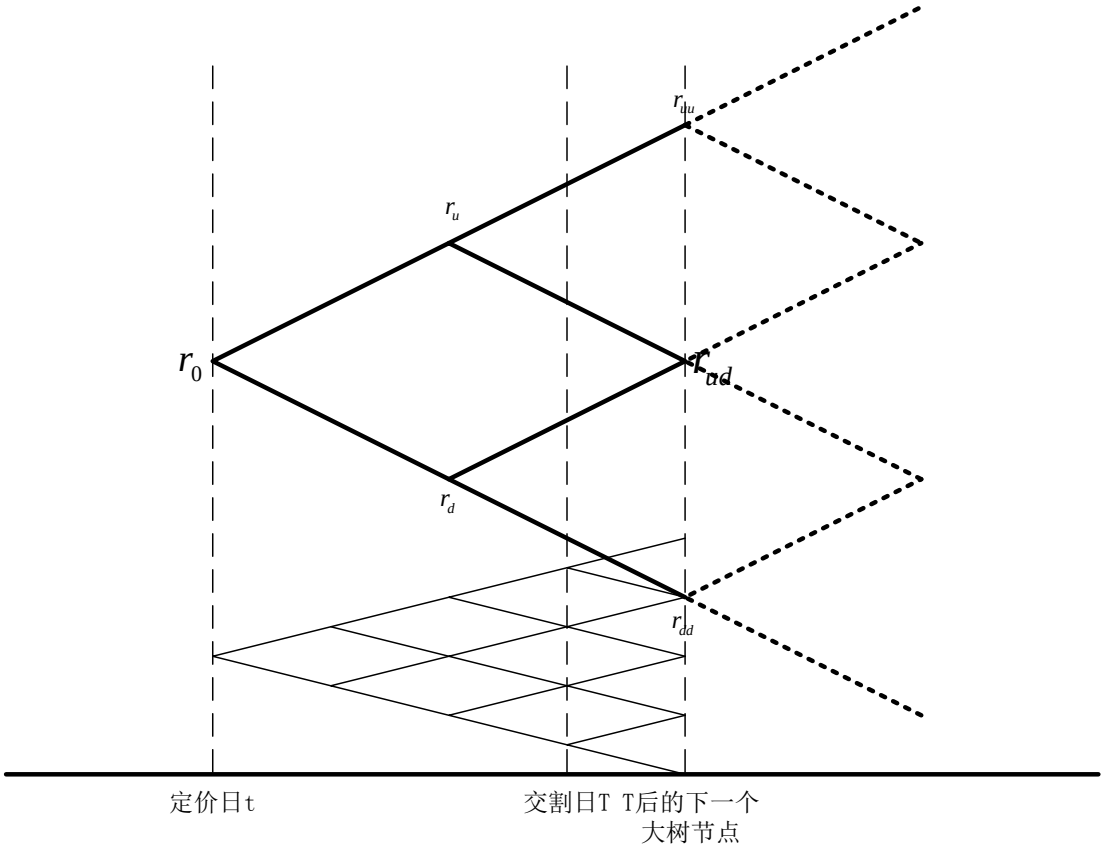

图 3 利率树嫁接示意图

第五章 基于 BDT 模型的国债期货及其择券期权定价

5.1 我国即期利率的正态性检验

由于 BDT 模型假设瞬时即期利率服从对数正态分布，即瞬时即期利率的对数服从正态分布。因此，为了检验模型的适用性，需对我国的瞬时即期利率是否服从对数正态分布进行检验。由于在本文的定价中，我们所使用的瞬时即期利率的代表分别为一个月的即期利率和一天的即期利率，因此，我们分别对这两个期限的即期利率的正态分布性进行检验。对这两个期限样本内数据的检验结果分别见图 4 和图 5.

本文所用到的即期利率样本数据分别为 2006/3/1~2014/2/21 的国债 1 个月估值利率和剩余期限为 1 天的国债估值利率。

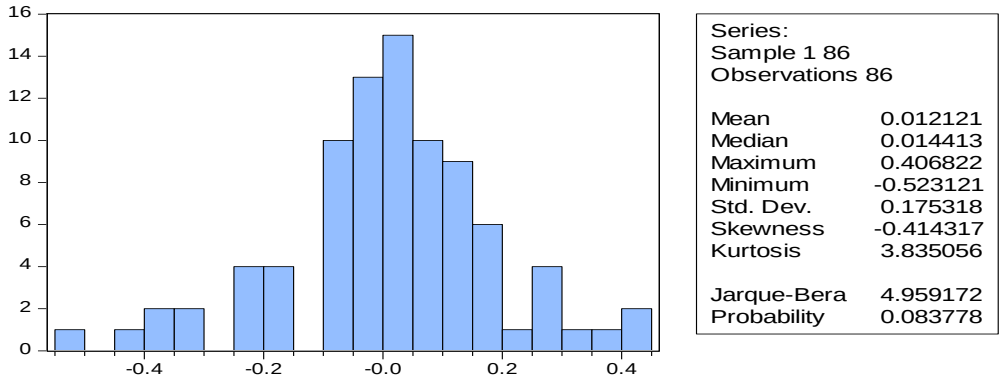

图 4 我国 1 个月即期利率的正态性检验

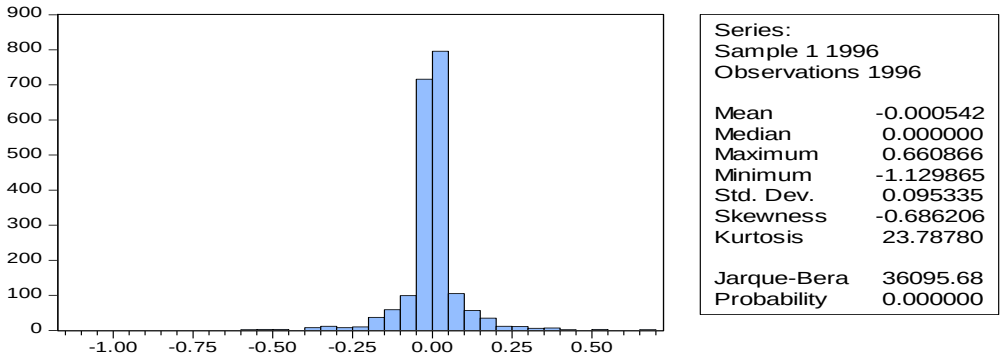

图 5 我国期限为一天的国债即期利率正态性检验

根据图 4 所示的正态检验结果可以看出，月利率对数的 JB 统计量对应的 P 值为 8.4%，在 5%的显著性水平下不拒绝月利率服从正态分布的原假设。而根据图 5 的结果的可以看出，日利率对数的 JB 统计量对应的 P 值为 0，因此，不能认为我国的国债日利率服从对数正态分布。

之所以日利率并不服从正态分布，是因为日利率的波动性非常高，有时候，受到打新股，市场交易噪音等因素的影响，会导致日利率产生非常大的波动，而这种剧烈的波动无法用正态分布去刻画。类似股票的收益率，日利率的分布也表现出一定的尖峰厚尾特征。

目前来看，对于我国国债日利率的描述，并没有找到一个很好的分布。要能正确的研究该利率的分布，可能需要加入跳跃，这将会使得定价的复杂性大幅提高。

通过对数据的观察，我们发现，当把国债日利率对数的变化限制在-19%~19%，则国债的日利率变化将服从对数正态分布，而国债日利率的变化幅度在该范围内的样本占到总样本的 59.3%，也就是说，通过正态分布能够描述日利率变化的 59.3%。当我们把国债日利率对数的变化限制在-19%~19%时，针对该利率的检验结果见图 6。

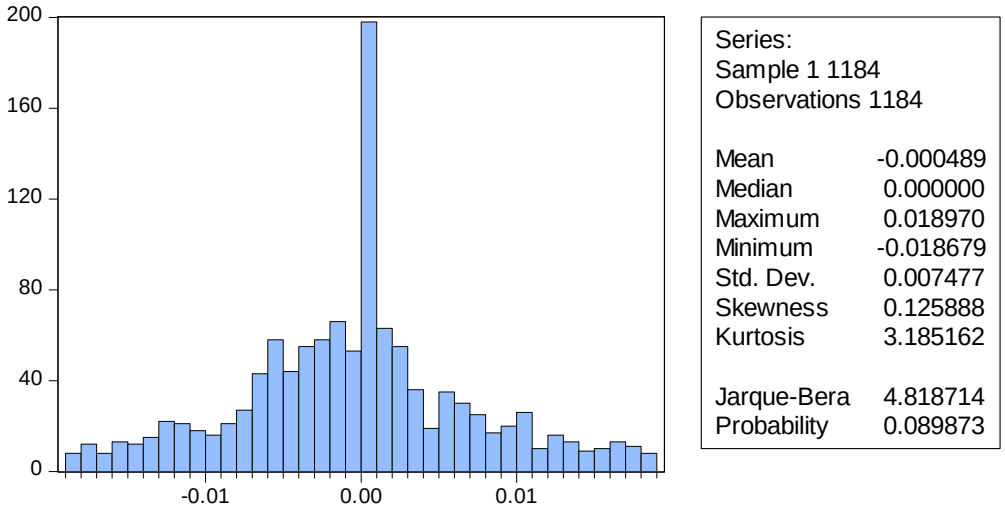

图 6 日利率变化限制在-19%~19%时的正态性检验

虽然在日利率并不服从对数正态分布时，通过 BDT 模型为国债期货合约及其择券期权定价并不完美，但是，由于月利率仍然能够通过正态性检验，所以首

先利用大树给可交割国债定价是合理的，另外，由于利率小树的时间跨度仅为 100 天左右，加之正态分布能够描述日利率变化的 59.3%，所以，小树的利率不服从对数正态分布不会对定价的精度产生不可接受的影响。

5.2 择券期权及相关名词定义

本文意在对国债期货及其中隐含的择券期权进行定价，择券期权的产生是因为国债期货有多个可交割国债，现在最便宜的可交割国债并不一定在交割时是最便宜的。交割时哪个国债会更便宜取决于从现在到交割的利率走势。

为了能够更好的理解择券期权及相关概念，在此对择券期权及相关名词做如下定义。

择券期权：记现在时刻为t，国债期货的交割日为T，t时刻的CTD券为CTD_t，T时刻的CT为CTD_T，那么择券期权的价值为$[P_{CTD,t}(T)-CF_{CTD,t}\cdot\frac{P_{CTD,T}(T)}{CF_{CTD,T}}]\cdot B(t,T)$。，其中，$P_{CTD,t}(T)$表示 t 时刻的 CTD 券在 T 时刻的净价，$P_{CTD,T}(T)$表示 T 时刻的 CTD 券在 T 时刻的净价，$CF_{CTD,t}$和$CF_{CTD,T}$分别表示 t 时刻 CTD 券和 T 时刻 CTD 券的转换因子，$B(t,T)$表示$t\to T$的无风险贴现因子。

证明：如果在国债期货的交割日，投资者用当日的 CTD 券进行交割，那么根据无套利条件，投资者进行该交割所能获得的利润应该为 0，即：

$$CF_{CTD,T}\cdot F-P_{CTD,T}(T)=0$$

而如果投资者用t时刻的 CTD 券进行交割，那么投资者所能获得的利润为：

$$CF_{CTD,t}\cdot F-P_{CTD,t}(T)$$

由于t时刻的 CTD 在交割时并不一定等于 0，所以上式理论上为非正值。因此，对于一单位的国债期货合约，其对应的择券期权价值等于上述两个交割利润的差的贴现值，即：

$$
\begin{aligned}
Q &= (CF_{CTD,T} \cdot F - P_{CTD,T}(T) - [CF_{CTD,t} \cdot F - P_{CTD,t}(T)])B(t,T) \\
&= (P_{CTD,t}(T) - CF_{CTD,t} \cdot F)B(t,T) \\
&= [P_{CTD,t}(T) - CF_{CTD,t} \cdot \frac{P_{CTD,T}(T)}{CF_{CTD,T}}]B(t,T)
\end{aligned}
$$

CTD 券：即最便宜可交割国债，即在特定时点上买入该国债，并持有至交割日进行交割，能够获得最高收益率的国债，也就是说，CTD 券是能够获得最高的隐含回购利率的可交割国债。

隐含回购利率（IRR）：t 时刻，每个可交割国债的隐含回购利率为 t 时刻买入该可交割国债，并持有至交割日进行交割，所能获得的年化收益率。一般情况下，在计算隐含回购利率时，假设 t 时刻至交割日期间获得的利息仍以隐含回购利率进行再投资。

另外，为了方便后文对国债期货进行定价及比较分析，对应于国债期货合约，我们在此给出一个最便宜可交割国债远期的概念，具体定义如下：

最便宜可交割国债远期：最便宜可交割国债远期是这样一份合约，t 时刻，该远期的多头和空头约定，多头在远期合约到期日 T 可以获得所有可交割国债中经转换因子调整的最便宜可交割国债净价所对应的现金流，即 $\min_i\{\frac{P_i(T)}{CF_i}\}$，其中，$P_i(T)$ 为债券 i 在 T 时刻的净价，CF_i 为债券 i 对应某个国债期货合约的转换因子。而多头需要付出的价格则称为最便宜可交割国债远期价格。

5.3 数据描述

本文对国债期货及其内含择券期权进行定价，所用到的数据主要有国债即期利率期限结构，国债即期利率的波动率期限结构，国债期货合约上市以来的每日收盘价，可交割国债的交易量数据，估值数据及可交割国债的其他信息。另外，在对国债期货定价进行分析时，还需要用到估值日的七天回购利率。本文中所用到的所有原始数据的来源均为 wind。

国债即期利率的期限结构使用的是中债的银行间国债即期利率期限结构。国债即期利率的波动率期限结构则是通过对不同期限的国债即期利率求其历史波动率获得，大树的波动率使用的是定价日前三年的数据估计的即期利率月波动率，

而小树的波动率则使用的是定价日前三个月数据所估计的波动率。

为了能够准确的对国债期货及其内含的择券期权进行定价，需要考虑到每个可交割国债的流动性，因为，国债期货是通过具有流动性的 CTD 国债来定价的，为此，我们需要对可交割国债按照一定的流动性标准进行筛选。其次，国债的主要交易市场是银行间，且银行间的交易价格往往与交易所有较大差别，不能放在一起进行对比分析。本文的筛选标准是将在定价日前一个月有交易的所有可交割国债作为实际定价所用到的可交割国债。另外，为了能够对不同的可交割国债进行比较，可交割国债的价格数据均采用中债估值。

5.4 国债期货及择券期权定价

5.4.1 CTD 券的选取

为了能够对择券期权进行定价，我们首先需要选取每个定价日的 CTD 券。在选取 CTD 券之前，我们先根据流动性筛选标准对可交割国债进行选取。在国债期货上市前一天，中金所公布了每个期货合约的可交割国债，TF1312 的可交割国债见表 4。

表 4 TF1312 可交割国债

序号	国债代码			票面利率（%）	到期日期	转换因子
	银行间	上交所	深交所			
1	050012	010512	100512	3.65	2020-11-15	1.0403
2	080003	019803	100803	4.07	2018-03-20	1.0424
3	080018	019818	100818	3.68	2018-09-22	1.0299
4	090003	019903	100903	3.05	2019-03-12	1.0024
5	090007	019907	100907	3.02	2019-05-07	1.0010
6	090016	019916	100916	3.48	2019-07-23	1.0245
7	090023	019923	100923	3.44	2019-09-17	1.0230
8	090027	019927	100927	3.68	2019-11-05	1.0366
9	100002	019002	101002	3.43	2020-02-04	1.0240
10	100007	019007	101007	3.36	2020-03-25	1.0203
11	100012	019012	101012	3.25	2020-05-13	1.0145
12	100024	019024	101024	3.28	2020-08-05	1.0168
13	100031	019031	101031	3.29	2020-09-16	1.0176
14	100034	019034	101034	3.67	2020-10-28	1.0411

15	110003	019103	101103	3.83	2018-01-27	1.0314
16	110006	019106	101106	3.75	2018-03-03	1.0294
17	110017	019117	101117	3.70	2018-07-07	1.0294
18	110021	019121	101121	3.65	2018-10-13	1.0288
19	120005	019205	101205	3.41	2019-03-08	1.0196
20	120010	019210	101210	3.14	2019-06-07	1.0069
21	120016	019216	101216	3.25	2019-09-06	1.0129
22	130001	019301	101301	3.15	2018-01-10	1.0056
23	130003	019303	101303	3.42	2020-01-24	1.0230
24	130008	019308	101308	3.29	2020-04-18	1.0164
25	130013	019313	101313	3.09	2018-05-30	1.0036
26	130015	019315	101315	3.46	2020-07-11	1.0270

通过对可交割国债按照 5.3 中所指出的方法，进行筛选，筛选后的可交割国债见表 5。

表 5　经流动性标准筛选后的银行间可交割国债

序号	国债代码	票面利率	转换因子
1	130015.IB	3.46	1.0270
2	090023.IB	3.44	1.0230
3	110021.IB	3.65	1.0288
4	120005.IB	3.41	1.0196
5	120010.IB	3.14	1.0069
6	120016.IB	3.25	1.0129
7	130001.IB	3.15	1.0056
8	130003.IB	3.42	1.0230
9	130008.IB	3.29	1.0164
10	130013.IB	3.09	1.0036

为了能够获得每个定价日的 CTD 券，我们需要对经筛选后的表 5 的可交割国债计算其 IRR。本文实证过程中采用的交割日为交割月第一交割日，从 2013/9/6~2013/11/29 日，每个经筛选后的可交割国债对应于 TF1312 的可交割国债的 IRR 见表 6，同时，为了更直观观察每个可交割国债的 IRR 变化，把表 6 的结果在图 7 中予以表示。

从表 6 及图 7 的结果可以看出，自国债期货上市以来，在不考虑新发券 130020.IB 的情况下，对 TF1312，每天 IRR 最大的银行间可交割国债，即 CTD 券均为 130015.IB。

表 6 经筛选的可交割国债各个定价日对应于 TF1312 合约的 IRR

IRR	130015.IB	090023.IB	110021.IB	120005.IB	120010.IB	120016.IB	130001.IB	130003.IB	130008.IB	130013.IB
2013-09-06	3.11%	0.79%	-3.49%	-1.47%	-0.28%	0.60%	-5.96%	1.72%	2.49%	-4.77%
2013-09-09	2.91%	0.18%	-4.89%	-2.60%	-1.09%	-0.02%	-7.27%	1.29%	2.20%	-6.02%
2013-09-10	3.39%	0.33%	-4.53%	-2.35%	-1.01%	0.10%	-7.23%	1.65%	2.63%	-5.91%
2013-09-11	3.89%	0.68%	-5.20%	-2.67%	-1.04%	0.39%	-8.03%	2.24%	3.21%	-6.69%
2013-09-12	4.44%	1.47%	-4.71%	-1.78%	-0.01%	1.23%	-7.71%	2.65%	3.66%	-6.40%
2013-09-13	4.33%	1.61%	-4.73%	-1.69%	0.13%	1.38%	-7.70%	2.68%	3.58%	-6.48%
2013-09-16	4.59%	1.89%	-4.73%	-1.60%	0.29%	1.64%	-7.87%	3.00%	3.90%	-6.52%
2013-09-17	4.75%	2.50%	-3.61%	-0.74%	1.00%	2.26%	-6.50%	3.38%	4.10%	-5.27%
2013-09-18	4.46%	2.08%	-3.90%	-1.29%	0.51%	1.84%	-6.52%	3.09%	3.88%	-5.12%
2013-09-23	4.52%	1.28%	-4.82%	-1.95%	-0.23%	1.05%	-7.74%	2.57%	3.67%	-6.46%
2013-09-24	4.55%	1.33%	-5.31%	-2.17%	-0.29%	1.09%	-8.03%	2.61%	3.70%	-7.05%
2013-09-25	4.62%	1.33%	-5.41%	-2.14%	-0.22%	1.10%	-8.59%	2.63%	3.74%	-7.21%
2013-09-26	4.69%	1.58%	-5.81%	-2.18%	-0.05%	1.35%	-8.48%	2.80%	3.85%	-7.72%
2013-09-27	3.87%	0.51%	-6.71%	-3.16%	-1.10%	0.28%	-10.16%	1.86%	2.99%	-8.66%
2013-09-30	4.54%	0.90%	-6.69%	-3.03%	-0.86%	0.65%	-9.77%	2.38%	3.60%	-8.62%
2013-10-08	3.74%	0.14%	-8.56%	-4.41%	-1.97%	-0.16%	-12.73%	1.63%	2.79%	-10.82%
2013-10-09	4.37%	0.42%	-9.08%	-4.58%	-1.89%	0.11%	-13.11%	2.04%	3.33%	-11.36%
2013-10-10	4.09%	-0.28%	-9.39%	-4.94%	-2.38%	-0.57%	-13.65%	1.54%	2.98%	-11.73%
2013-10-11	4.28%	-0.27%	-10.12%	-5.91%	-2.96%	-0.61%	-14.28%	1.64%	3.13%	-12.02%
2013-10-14	4.57%	-0.48%	-11.56%	-6.16%	-3.02%	-0.81%	-16.26%	1.66%	3.31%	-14.23%
2013-10-15	4.00%	-2.63%	-13.41%	-8.69%	-5.72%	-3.06%	-17.57%	0.54%	2.58%	-15.62%

2013-10-16	4.38%	-1.87%	-12.37%	-7.68%	-4.78%	-2.28%	-16.36%	0.99%	2.93%	-14.65%
2013-10-17	4.51%	-1.95%	-13.27%	-8.23%	-5.13%	-2.40%	-18.36%	1.08%	3.00%	-15.91%
2013-10-18	4.32%	-1.79%	-13.61%	-8.05%	-4.73%	-2.19%	-18.46%	0.89%	2.84%	-16.30%
2013-10-21	4.70%	-2.03%	-14.52%	-9.02%	-5.57%	-2.53%	-19.79%	1.21%	3.16%	-17.25%
2013-10-22	4.42%	-3.08%	-15.69%	-10.16%	-6.69%	-3.59%	-20.81%	0.39%	2.64%	-18.37%
2013-10-23	5.85%	-3.09%	-15.92%	-10.99%	-7.31%	-3.68%	-21.05%	1.36%	3.97%	-18.11%
2013-10-24	4.67%	-3.42%	-17.11%	-12.00%	-7.96%	-4.04%	-21.98%	0.74%	2.95%	-19.22%
2013-10-25	6.10%	-2.48%	-15.62%	-10.62%	-6.80%	-3.09%	-20.78%	1.76%	4.23%	-17.87%
2013-10-28	5.91%	-1.46%	-15.50%	-9.21%	-5.36%	-2.04%	-22.66%	2.24%	4.48%	-19.04%
2013-10-29	4.93%	-2.19%	-16.30%	-10.25%	-6.31%	-2.81%	-24.43%	1.76%	3.88%	-20.07%
2013-10-30	5.87%	-1.60%	-15.78%	-9.43%	-5.55%	-2.20%	-24.52%	2.24%	4.55%	-20.16%
2013-10-31	6.06%	-1.33%	-16.32%	-10.52%	-6.15%	-2.01%	-22.67%	3.20%	5.27%	-19.08%
2013-11-01	5.15%	-2.09%	-16.68%	-9.58%	-5.51%	-2.58%	-24.15%	0.90%	3.32%	-20.51%
2013-11-04	5.18%	-4.96%	-21.09%	-14.48%	-9.89%	-5.67%	-29.08%	-0.13%	2.88%	-24.57%
2013-11-05	4.90%	-5.68%	-23.03%	-16.17%	-11.16%	-6.46%	-30.99%	-0.35%	2.71%	-26.47%
2013-11-06	6.55%	-3.50%	-20.22%	-13.28%	-8.55%	-4.27%	-29.09%	1.58%	4.68%	-24.12%
2013-11-07	4.71%	-7.41%	-27.48%	-19.53%	-13.77%	-8.35%	-36.76%	-1.22%	2.34%	-31.56%
2013-11-08	-0.78%	-13.13%	-34.48%	-25.93%	-19.85%	-14.14%	-43.29%	-6.41%	-2.84%	-38.19%
2013-11-11	-0.80%	-15.01%	-40.27%	-29.94%	-22.83%	-16.25%	-52.17%	-7.14%	-2.89%	-45.48%
2013-11-12	1.88%	-11.37%	-38.04%	-27.40%	-19.78%	-12.66%	-49.12%	-3.09%	0.77%	-42.61%
2013-11-13	6.11%	-11.70%	-41.54%	-29.79%	-21.23%	-13.18%	-54.13%	-2.48%	2.80%	-47.11%
2013-11-14	2.33%	-16.21%	-47.94%	-35.30%	-26.25%	-17.76%	-62.19%	-6.40%	-0.99%	-54.13%
2013-11-15	5.22%	-15.27%	-51.70%	-37.49%	-27.01%	-17.09%	-66.22%	-4.08%	1.84%	-57.80%
2013-11-18	9.83%	-15.79%	-59.70%	-42.46%	-29.84%	-17.98%	-77.74%	-2.38%	5.03%	-67.27%
2013-11-19	3.52%	-27.14%	-75.42%	-56.76%	-42.87%	-29.58%	-96.18%	-11.94%	-3.08%	-84.37%

2013-11-20	11.45%	-20.81%	-76.77%	-55.58%	-39.24%	-23.60%	-94.40%	-3.63%	5.56%	-83.54%
2013-11-21	14.15%	-12.18%	-75.69%	-52.50%	-32.97%	-15.15%	-96.51%	1.53%	8.21%	-83.90%
2013-11-22	7.72%	-11.31%	-81.87%	-56.70%	-34.75%	-14.57%	-101.59%	3.26%	7.52%	-89.04%
2013-11-25	3.73%	-28.25%	-134.35%	-97.27%	-64.13%	-33.14%	-166.20%	-5.48%	2.00%	-146.92%
2013-11-26	7.82%	-34.92%	-155.78%	-110.87%	-73.97%	-40.30%	-195.72%	-8.48%	2.73%	-173.01%
2013-11-27	7.58%	-39.67%	-182.14%	-129.83%	-86.01%	-45.85%	-227.15%	-8.85%	3.04%	-200.82%
2013-11-28	-19.04%	-57.58%	-232.33%	-161.71%	-103.26%	-62.74%	-283.26%	-37.25%	-25.44%	-252.79%
2013-11-29	-51.07%	-149.86%	-360.58%	-282.78%	-220.54%	-159.38%	-418.68%	-82.64%	-57.97%	-382.87%

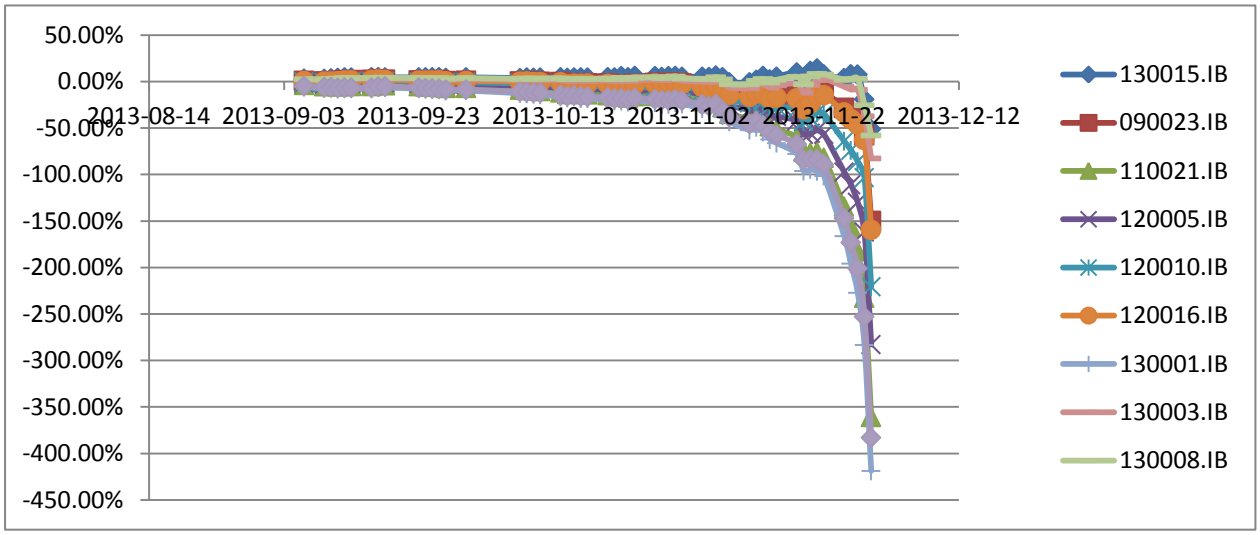

图 7 每个可交割国债对应于 TF1312 合约的 IRR

5.4.2 择券期权定价

通过对 TF1312 的 CTD 券 130015.IB 的择券期权进行定价，发现在 2013/9/6~2013/11/29 之间，利用每个定价日的即期利率期限结构和波动率期限结构，计算出该期权的价值都基本为 0，图 8 为通过 BDT 模型计算出来的 CTD 即 130015.IB 的择券期权价值。

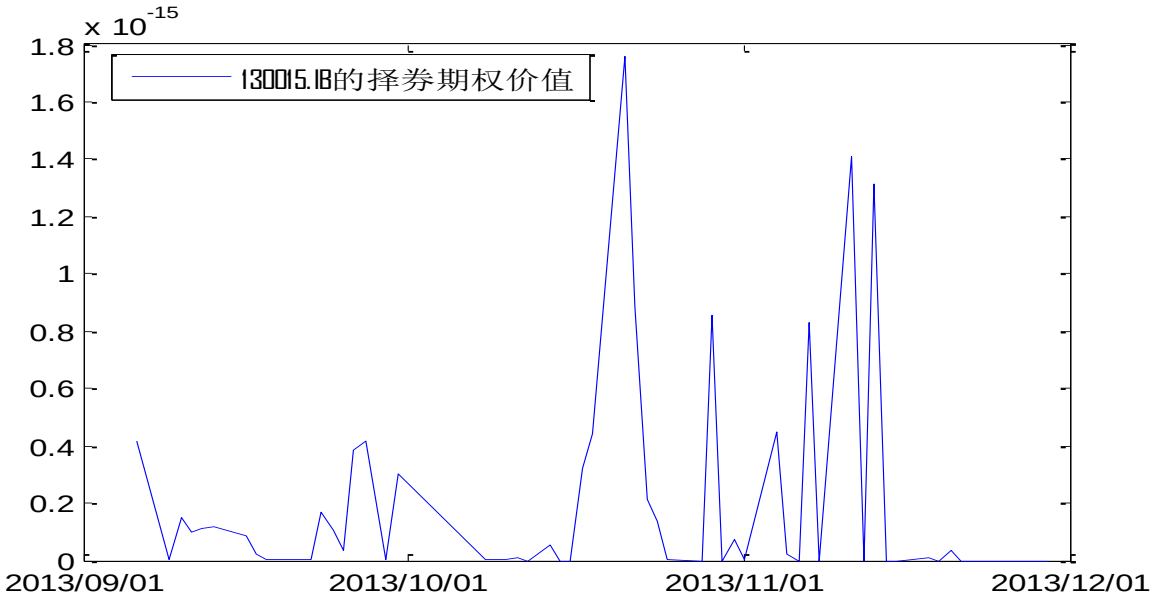

图 8 CTD 130015 的择券期权

图 8 的结果表明，在 2013/9/6~2013/11/29 之间，CTD 券的择券期权价值基

本持续的维持在 0，这是符合实际情况的，因为在这段时间内，7 年期国债的收益率水平总是维持在 4 之上，市场上当前的波动率不足以使得 CTD 券发生切换。

5.4.3 国债期货合约定价

为了对国债期货进行定价，我们首先对 5.3 中所定义的最便宜可交割国债远期进行定价。之所以使用这样的方法，有如下两个原因，第一，最便宜可交割国债远期和国债期货的标的是相同的；第二，在用 BDT 模型定价时，所用到的利率期限结构是国债的利率期限结构，所以实际上我们通过 BDT 模型所得到价格是最便宜可交割国债远期的价格。

由于我们通过 BDT 模型得到的价格是最便宜可交割国债远期的价格，而非国债期货的理论价格，因此，我们需要对通过 BDT 模型得到的最便宜可交割国债远期价格进行修正，以得到国债期货的理论价格。

通过远期与期货定价的区别，可以知道，给最便宜可交割国债远期定价时使用的无风险利率是国债的利率，而对国债期货定价需要使用的无风险利率则是实际的融资利率，那么基于这两者的差别，我们可以对最便宜可交割国债远期价格进行修正以得到国债期货的价格。

使用 BDT 模型计算出的最便宜可交割国债远期的价格及国债期货的市场价格在 2013/9/6~2013/11/29 的价格走势见图 9。

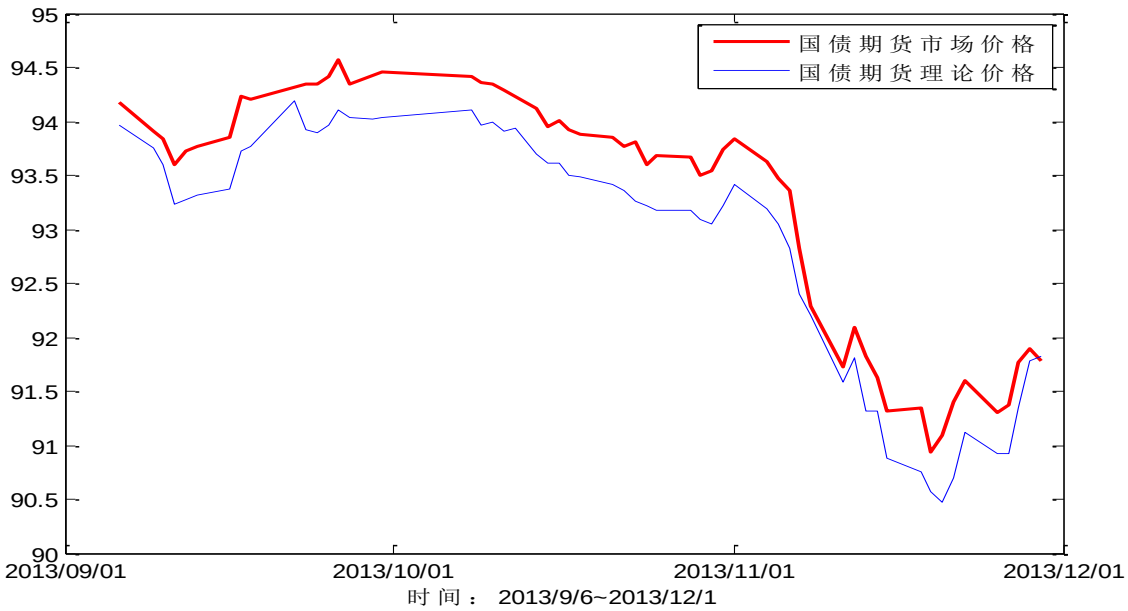

图 9 最便宜可交割国债远期价格与国债期货市场价格

通过图 9 我们可以发现，利用 BDT 模型计算出的最便宜可交割国债远期价格与国债期货的市场价格走势基本一致，但是，两者的差额则具有一定的不稳定性。两者的差额介于-0.046~0.693 之间，平均值为 0.3993。

首先，我们对实际融资利率和国债利率之间的差额所带来的国债期货理论价格与最便宜可交割国债远期的价格之间的差额进行调整。由于在我国，银行间的七天质押式回购交易较为活跃，由于其期限相对一天质押式回购较长，为了避免每天轧平资金头寸的麻烦，机构投资者对七天的质押式回购具有较高的偏好。其次，由于市场上并不是每个期限的融资利率都有，因此，我们在本文中采用七天质押式回购利率来代表融资利率。经过七天质押式回购利率与国债利率差额调整后的国债期货价格走势见图 10。

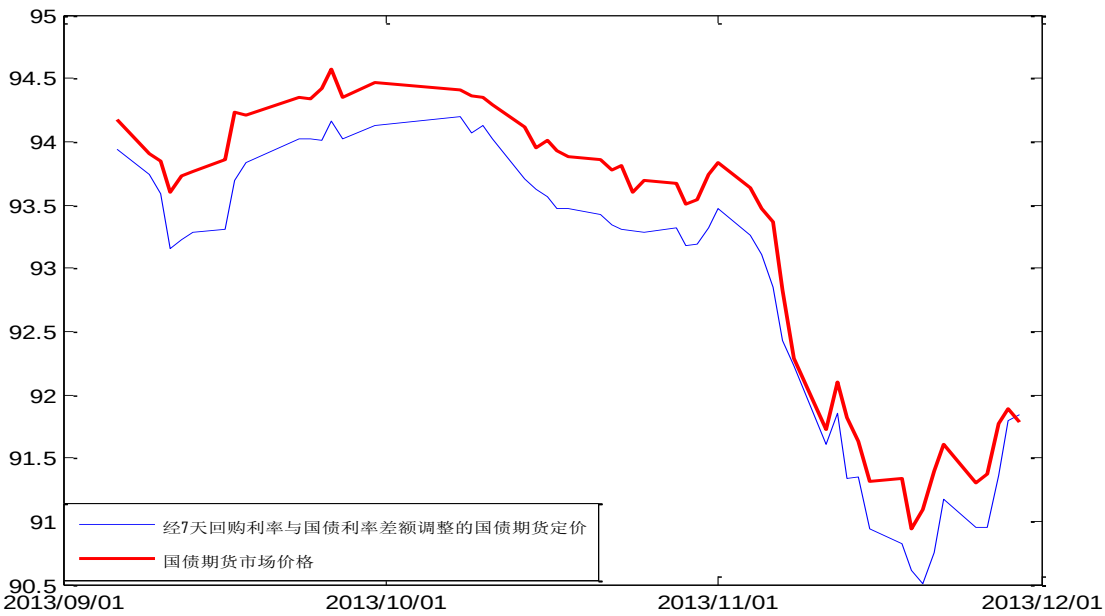

图 10 经 7 天回购利率与国债利率差额调整的国债期货理论价格与市场价格

经 7 天质押式回购利率与国债利率差额调整后，国债期货的理论价格与实际价格的差额有所减小，该差额介于-0.055~0.644 之间，平均值为 0.363，相对没调整前的差额减少 0.036。

其次，由于本文中所用的利率期限结构是中债银行间国债即期利率期限结构，而该期限结构的估计中本来就会有误差。经检验，在 2013/9/6~2013/11/29 之间，通过中债即期利率期限结构进行贴现计算出的国债价格平均比中债估值净价低 0.2825，在此，我们对每天利率期限结构带来的估值误差进行调整，调整后的国

债期货理论定价与国债期货的市场价走势图见图 11。

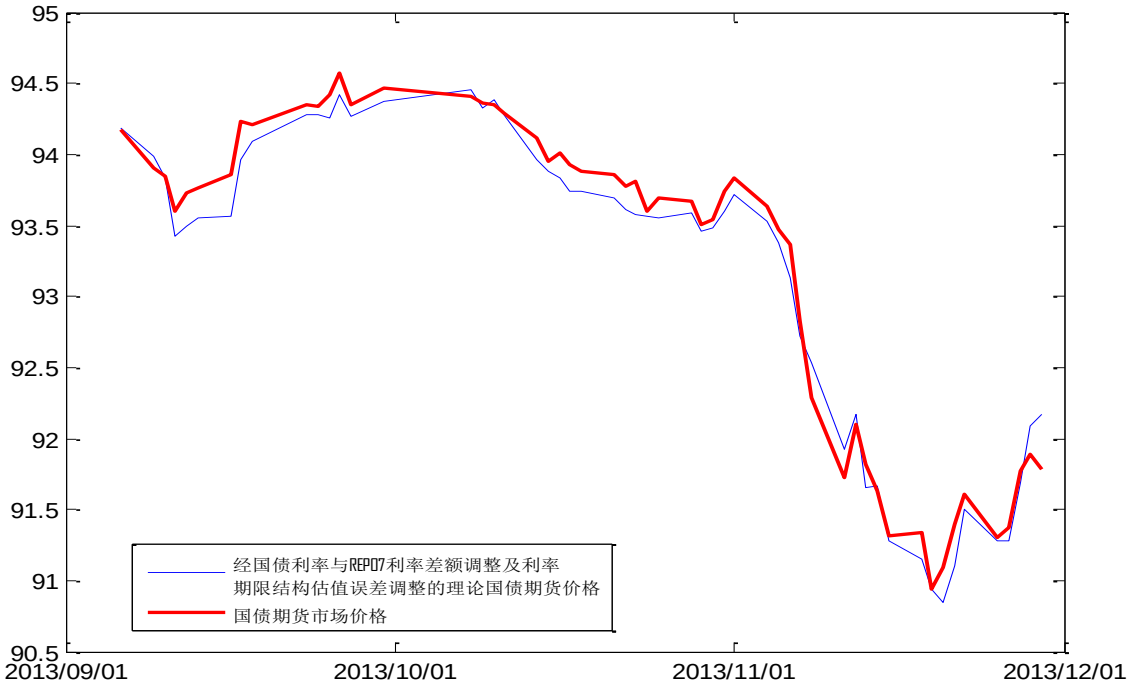

图 11 经利率差额及利率期限结构误差调整后的国债期货理论价与市场价

通过利率期限结构估计的误差调整后，我们发现，国债期货理论定价与市场定价的偏差得以大幅下降，该偏差的在-0.3843~0.2904 之间，平均偏差为 0.0806。

通过上述调整以后的国债期货定价即为国债期货的理论价值，之所以该国债期货的理论价格仍然与国债期货的市场价格存在一定的偏差，是因为国债期货的市场定价本身受到市场情绪及市场风险偏好等的影响存在着一定的定价误差，该定价误差也可以从表 6 中的 IRR 数据中看出。在表 6 中，CTD 券 130015.IB 的 IRR 最高可达 14.15%，最低仅为-51.07%，与当日的市场融资利率完全不匹配。

最后，为了说明图 10 中的国债期货理论价格与市场价格的差额主要由市场定价误差引起的，我们将国债期货的理论定价再进行如下调整，即假设市场上的融资利率恰好为 IRR，通过对 IRR 与 REPO7 的差额进行调整以后，国债期货新的理论价格与市场价格则基本完全吻合。经市场定价误差调整后的国债期货理论价格与国债期货市场价格的走势图见图 12。

对市场定价误差进行调整以后，国债期货理论价格与实际市场价格的偏差再次大幅缩小，该偏差的均值为 0.049，最大偏差为 0.0747，最小偏差为-0.154。

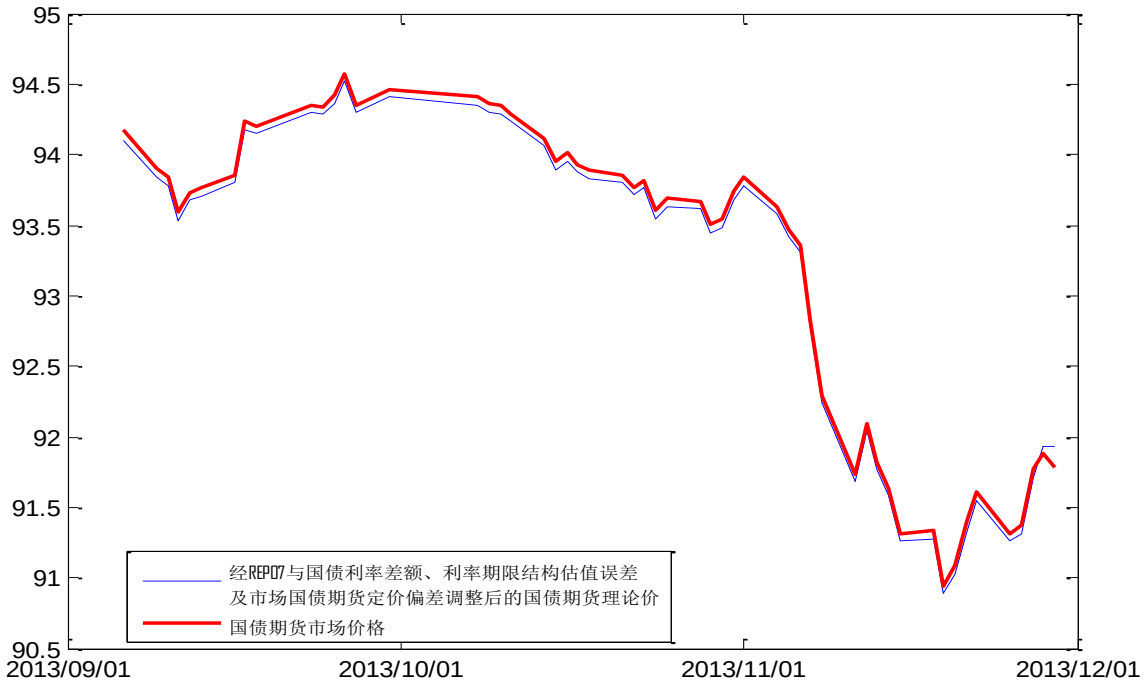

图 12 在图 10 的基础上经过市场误差调整后的国债期货理论价与市场价

最后，我们对利用 BDT 模型进行定价的步骤进行总结。第一步，利用银行间市场国债利率期限结构和波动率期限结构计算出最便宜可交割国债远期的价格；第二步，通过实际的市场融资利率与国债利率之间的差额对第一步所得到的国债期货理论定价进行修正；第三步，在第二步的基础上，对国债即期利率期限结构的估计误差带来的国债期货定价偏差进行调整即可得到国债期货的最终理论价格。

5.4.4 国债期货理论定价与可交割国债价格的关系

在考虑到择券期权时，国债期货的理论价格与可交割国债的价格具有什么样的关系呢？由于国债期货是依据 CTD 券和择券期权的价值来定价的，而哪个国债会成为 CTD 券则主要由市场上当前的国债收益率水平决定。一个自然的问题是国债期货的理论价格及不同可交割国债随着国债收益率的变化是怎样变化的？其次，在这个变化的过程中，国债期货的理论价格与不同可交割国债的价格是一个什么样的关系？为此，我们对 TF1312 合约在交割日假定其国债利率期限结构呈现水平变动时，不同可交割国债及国债期货理论价格的变化予以研究，通过该

研究，我们得到了图 13 所示的结果。

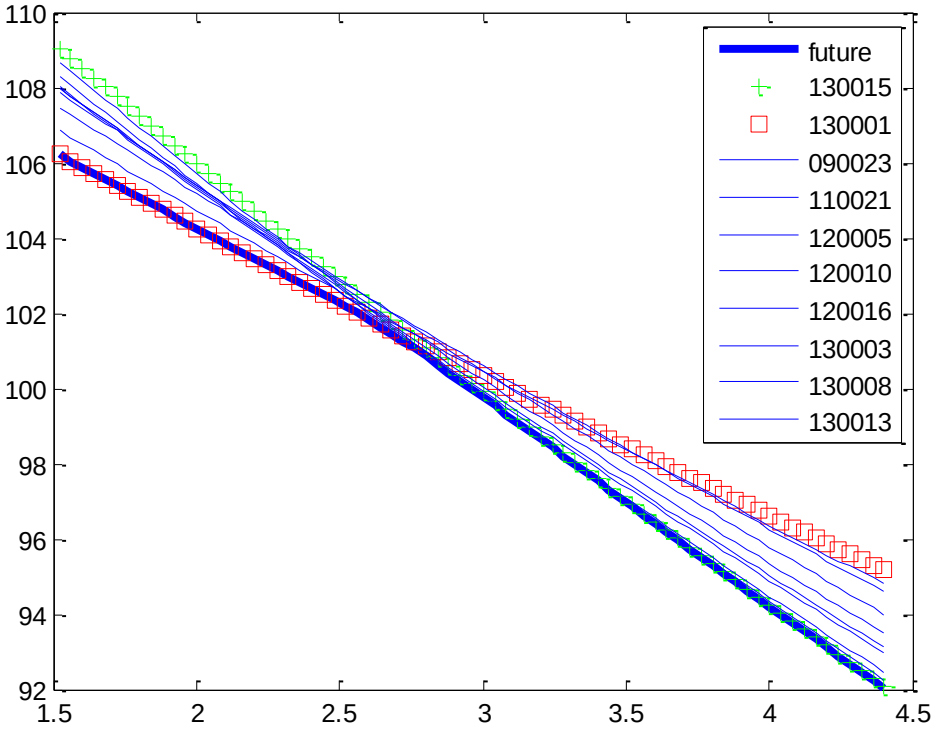

图 13 国债期货理论价格与经转换因子调整的可交割国债价格之间的关系

通过图 13 我们可以发现，国债期货的理论价格是一个上凸的弧形，其价格总是在各个可交割国债经转换因子调整的价格(P/CF)之下。在利率处于较高水平时，其价格接近于最高久期的可交割国债（130015.IB），当利率处于较低水平时，其价格接近于最低久期的可交割国债（130001.IB），这与经验法则下的 CTD 判断是一致的。

然而，CTD 券是否要么是久期最高的可交割国债，要么就是久期最低的可交割国债呢？对此，由图 13 中我们并不能得到很直观的答案。为此，我们以图表的方式列示不同利率水平下的 CTD 券，见表 7。

表 7 最便宜可交割券的转换

7 年即期利率	<2.64	2.64~3.2	3.2~3.48	>3.48
最便宜可交割国债	130001.IB	130003.IB	130008.IB	130015.IB
最便宜可交割国债久期	3.81	5.47	5.73	5.93

从表 7 可以看出，CTD 券并不总是最高久期的 130015.IB 或最低久期的 130001.IB，而是当利率处于 2.64~3.48 之间时，分别为中久期的 130003.IB 和 130008.IB。

另外，不同的可交割国债经转换因子调整的价格减去理论的国债期货价格即为这些可交割国债所对应的理论基差的倍数，由于可交割国债的基差具有很好的特性，接下来，我们对不同可交割国债的基差予以专门研究。

5.4.5 可交割国债的基差

为了研究择券期权，通常学者将注意力主要集中于 CTD 券上，但正如 5.4.2 所表述的，当前市场条件下的择券期权基本没有价值。而对于投资者来说，对不同可交割国债的基差进行研究有着重要意义，原因在于，除了 CTD 券的基差主要反映了择券期权价值和持有净收益外，由于非 CTD 券的久期与国债期货的久期相差较大，这就导致买入非 CTD 券同时卖空 CF 份国债期货(买入非 CTD 基差组合)，并持有该基差组合至到期的过程中，该基差组合的价值波动是不能完全对国债收益率的变动免疫的，因此，我们可以设计一些策略用于对收益率的变化进行交易。

为了能够更方便表述，我们以定理的方式表述进行可交割国债基差交易的收益及收益率。

【命题 1】 在不考虑国债期货保证金融资成本的条件下，假设投资者在 t 时刻买入现券，并卖空转换因子(CF)份的期货，并在期货交割日平仓，则投资者可以获得的收益为 $Basis_T - Basis_t + (C_T + I_{t\to T} - C_t)$。其中 $Basis_t$ 是 t 时刻的该现券所对应的基差(其中 C 代表应计利息，其下标为时点，I 为对应于下标时间段内的利息支付)

证明：投资者 t 时刻买入现券所需要的货币支出为 $P_t + C_t$，T 时刻现券平仓所获得货币收入为 $P_T + C_T$，期间的利息收入为 $I_{t\to T}$，则投资者通过现券交易所获得的收益为 $P_T + C_T + I_{t\to T} - (P_t + C_t)$，其中 P 为国债现券的净价，下标为对应时点。

投资者 t 时刻卖空 CF 份期货，并在 T 时刻平仓。投资者通过期货交易所获

得的收益为$CF(F_t - F_T)$，其中 F 代表国债期货的价格，下标为对应时点。

那么投资者现货端和期货端的总收益为：

$$\begin{aligned}&P_T + C_T + I_{t\to T} - (P_t + C_t) + CF(F_t - F_T)\\&= (P_T - CF\cdot F_T) - (P_t - CF\cdot F_t) + (C_T + I_{t\to T} - C_t)\\&= Basis_T - Basis_t + (C_T + I_{t\to T} - C_t)\end{aligned}$$

【命题 2】 在不考虑国债期货保证金融资成本的条件下，假设投资者在 t 时刻买入现券，并卖空转换因子份的期货，持有至期货交割日平仓，则投资者可以获得的收益率为$(Basis_T - Basis_t + (C_T + I_{t\to T} - C_t))/(P_t + C_t)\cdot\dfrac{365}{T-t}$。

首先，为了能够更了解各个可交割国债的基差，本文分析可交割国债的基差受收益率变化的影响。方便期间，假定在交割日 T，收益率发生了不同变化时，我们来分析各个可交割国债的基差所对应的变化，在此仍以 TF1312 为例，来分析收益率变化对不同可交割国债在交割日的基差的影响，见图 14 及 15。

从上文结果可以看出，自国债期货上市以来，在不考虑新发券 130020.IB 的情况下，对 TF1312，每天 IRR 最大的银行间可交割国债，即 CTD 券均为 130015.IB。

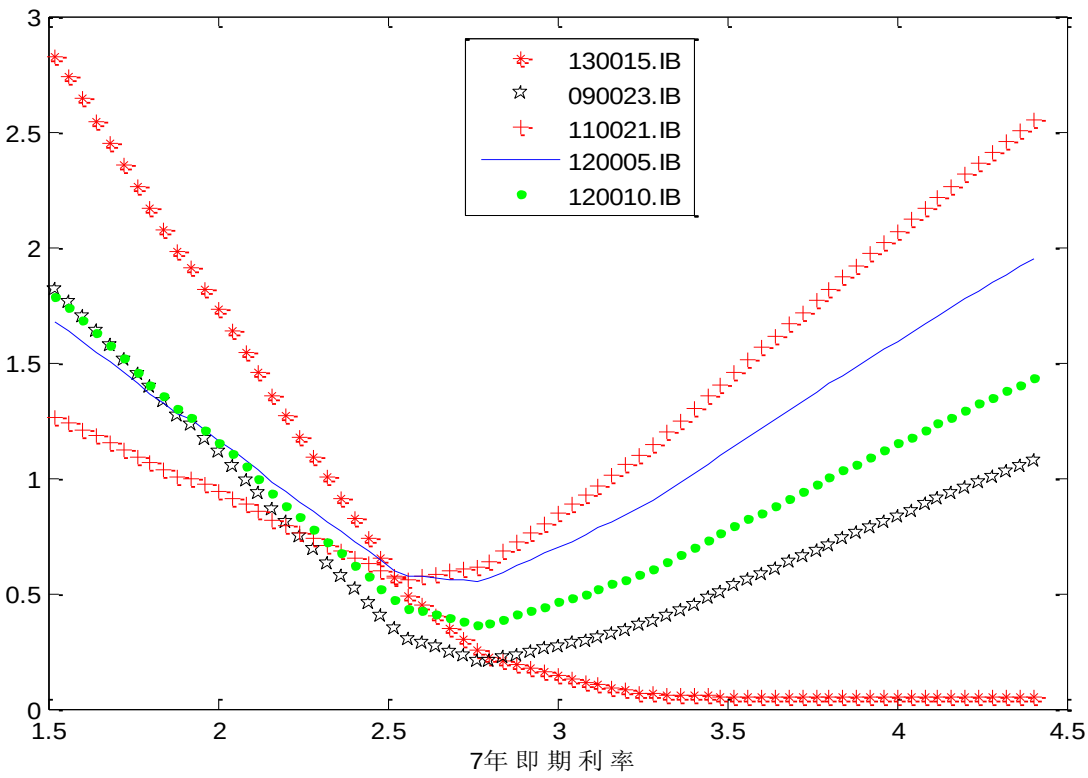

图 14 不同可交割国债交割日基差与利率水平 1

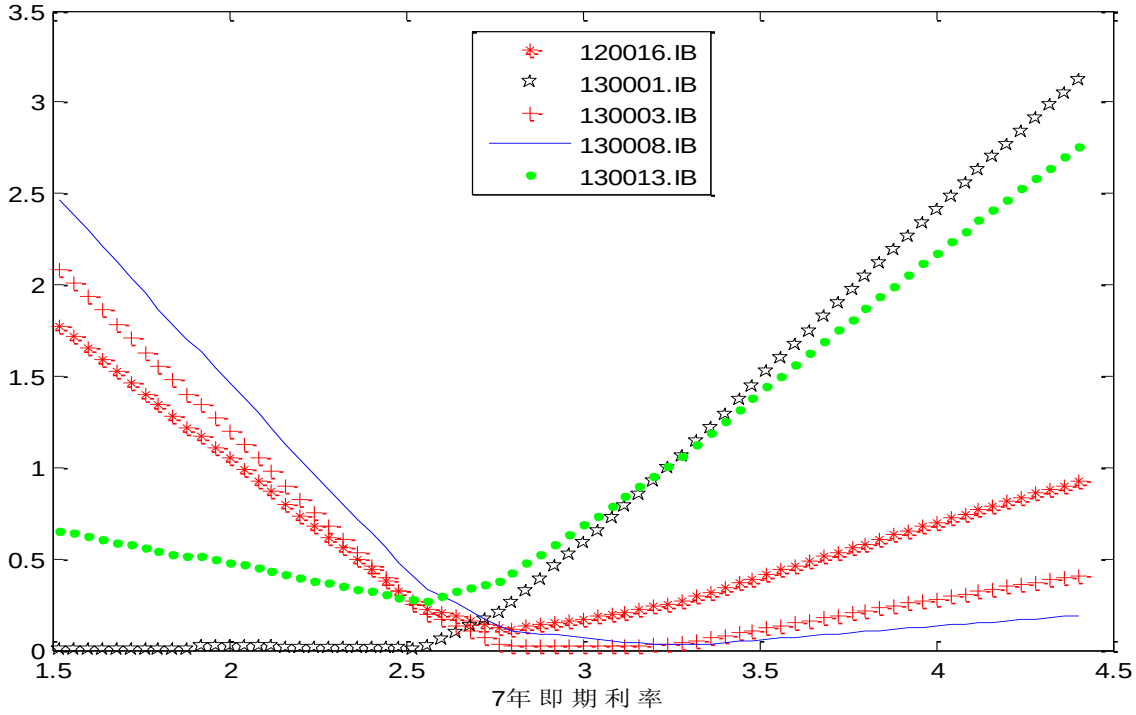

图 15 不同可交割国债交割日基差与利率水平 2

从图 14 和图 15 可以看出，交割日可交割国债的基差属性可以表述为以下几点。

(1) 以 130015.IB 为代表的高久期可交割国债收益属性表现为收益率的看跌期权；

(2) 以 130001.IB 为代表的低久期可交割国债收益属性表现为收益率的看涨期权；

(3) 以 120010.IB 为代表的中久期可交割国债收益属性表现为收益率的跨式期权。

由于对应于不同的可交割国债的择券期权表现出来的性质多种多样，因此，我们可以在不同的收益率水平，设计不同的针对收益率涨跌的投资策略。例如，假设现在的国债收益率在 3.5 的水平上，且投资者判断未来收益率会走高，那么我们可以投资 130001.IB 的择券期权，如果投资者判断收益率会下降，则适时买入 130015.IB 的择券期权。

然而，就像投资者在 3.5 的收益率水平上，判断未来收益率会上升，从而买入 130001.IB 的择券期权一样，对可交割国债基差的投资并不是无风险的，而是

当收益率水平没有按照投资者判断的方向运动时，投资者可能会面临亏损。亏损并不可怕，可怕的是投资者不能提前知道如果亏损了，会亏损多少。为此需要对可交割国债的基差收益特征进行进一步的研究，以获得一个能够提前设定最大亏损或最低收益的策略，从而为投资者进行国债期货的基差交易提供指导。

5.4.6 基于基差收益特征的国债期货交易策略设计

通过上一部分的探讨，我们知道，能够提前设定止损额对国债期货的投资交易策略设计至关重要。实质上，对国债期货基差的交易隐含着对最大亏损额或最小收益额的设定。因为对择券期权的交易需要买入现券同时卖出国债期货合约，那么最糟糕的结果即是在交割时，该可交割国债对应的基差为 0，换句话说，该可交割国债成为了最便宜可交割国债，那么投资者即用该国债进行交割，所能获得的最低年化收益率即为构建头寸时对应于该可交割国债的隐含回购利率(IRR).。

为此，针对 TF1312 合约，我们分析了投资不同可交割国债的基差在 2013/9/6~2013/11/29 日的实际收益状况，见图 16。

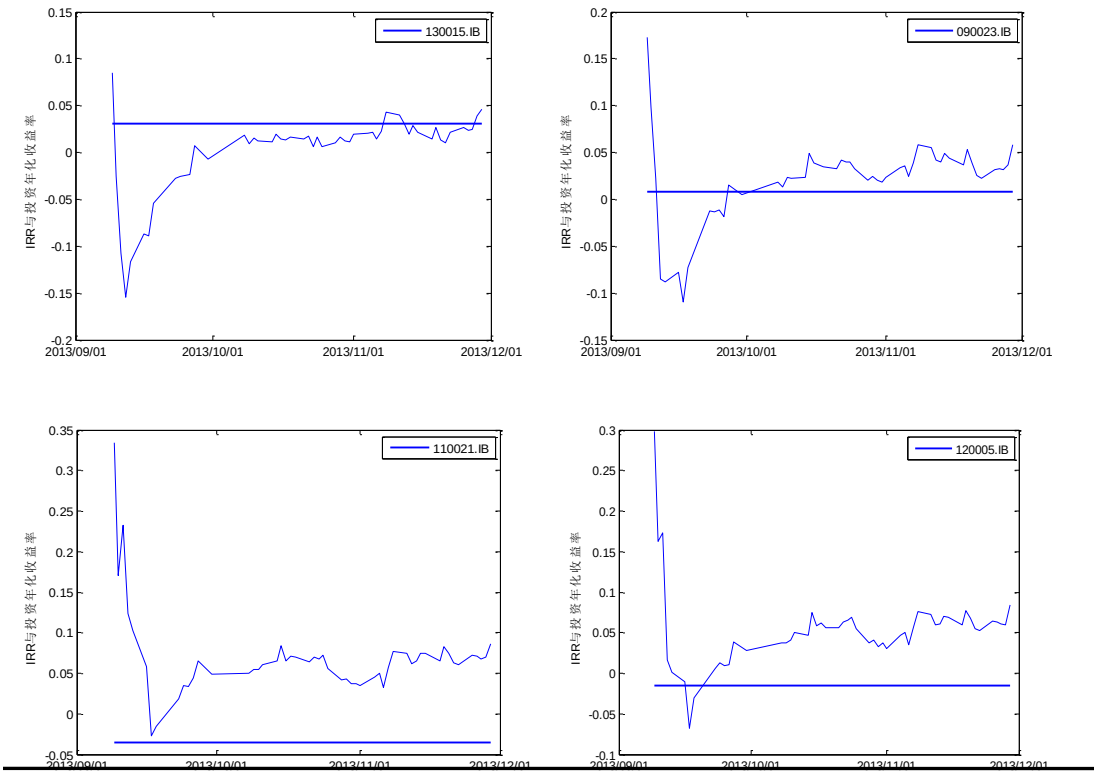

图 16 不同可交割国债持有期实际收益率与 2013/9/6 的 IRR(2013/9/6~2013/11/29)

为了便于说明问题，本文假设投资者在 2013/9/6 收盘时构建基差头寸，即买入现券，并卖出对应于该现券的 CF 份国债期货合约。图 16 表示了 4 个可交割国债，分别为 130015.IB，090023.IB,110021.IB,120005.IB，在不同日期收盘时平掉该基差头寸所能获得的年化收益率与其在 2013/9/6 日的 IRR。对应于每个可交割国债在头寸构建日的 IRR 即为如果持有该头寸到交割日并平仓所能获得最低年化收益率，可以被认为是预设好的止损线。

通过图 16 可以看出，对应于不同可交割国债的 IRR 不同，即预设的止损线不同，其最终的收益水平也不同。因此，投资者可以根据自己的风险偏好和对收益率未来走势的判断选择是否投资以及投资哪个基差组合。为了更加清晰的展示不同组合的风险收益特征，我们将 10 个可交割国债分别与国债期货构成的基差组合的相关收益及风险特征列示在表 8 中。

表 8 不同可交割国债基差持有至交割日平仓的风险收益

	最低年化收益率（IRR）	持有至到期实际年化收益率	久期	票息
130015.IB	3.11%	5.02%	5.93	3.46
090023.IB	0.79%	5.99%	5.27	3.44
110021.IB	-3.49%	8.83%	4.53	3.65
120005.IB	-1.47%	8.52%	4.79	3.41
120010.IB	-0.28%	7.53%	5.06	3.14
120016.IB	0.60%	6.25%	5.30	3.25
130001.IB	-5.96%	8.71%	3.81	3.15
130003.IB	1.72%	4.69%	5.47	3.42
130008.IB	2.49%	4.62%	5.73	3.29
130013.IB	-4.77%	8.67%	4.20	3.09

从表 8 可以看出，对于每个可交割国债我们都可以设定一个最低年化收益率，并计算了从 2013/9/6~2013/11/29 持有对应于该可交割国债基差组合的年化收益率。由于 2013/9/6 的 7 年期国债收益率水平在 4%左右，处于高利率水平，此时的最便宜可交割国债为最高久期的可交割国债。因此，对于当时的可交割国债来说，久期越低，则其对于交割来说越贵，也就是说对应的 IRR 越小。

另外，之所以非 CTD 的基差组合对应的年化收益率高于 CTD 对应的年化收益率，是因为从 2013/9/6~2013/11/29，7 年期国债的收益率上升了大约 40BP，从

而导致低久期可交割国债的基差上行高于高久期的最便宜可交割国债基差的上行幅度。

由于久期越低，对应的 IRR 越低，也就是说我们设定的最低年化收益率越低。其次，总体来说设定的最低年化收益率越低，即对应可交割国债的久期越低，则对应的实际年化收益则会越高。该性质可以通过图 17 予以展示。

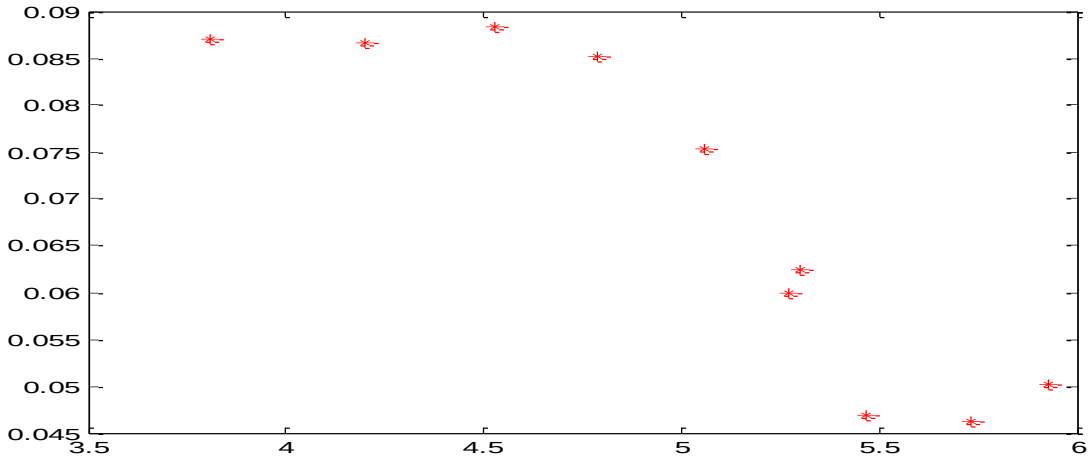

图 17 实际收益率与可交割国债久期

然而，由图 17 我们可以看出，不同可交割国债的实际年化收益率与其久期并不是呈现出绝对的反比关系，而是在某些时候出现一些反常。例如，在图 16 中久期在 5.5~6 之间时，出现了久期下降，而实际年化收益也下降的情况。之所以出现这种情况，是因为对于非 CTD 券的择券期权交易的收益同时取决于基差变化和持有期间的利息收入，具体证明见 5.4.5。

当可交割国债 A 的久期小于可交割国债 B，且可交割国债 A 的票息也小于可交割国债 B 时，一方面，由于 A 的久期小于 B，所以当收益率上升时，A 的基差上行幅度大于 B，会导致 A 的实际年化收益大于 B；另一方面，由于 A 的票息小于 B，所以其在持有期间的利息收入也小于 B，从而会导致 A 的实际年化收益小于 B。上述两方面的综合作用即会导致不同可交割国债的实际年化收益率与其久期并不不是呈现出绝对的反比关系，而是在局部会出现对趋势的小幅调整。

最后，如果从表 8 直观的看上去，这些交易策略似乎并没有很大的吸引力，因为最低的年化收益很低，而实际的持有至到期的年化收益率也并不是很高。然而，这里所设置的最低年化收益率虽然很低，但是要真正达到该值，对不同的可

交割国债，收益率的下降需要达到 50~140BP（对 130008.IB 需要下降 50BP,对 130003.IB 需要下降 80BP，而对最低久期的 130001.IB 则需下降 140BP）不等，否则实际的年化收益率均会高于最低的年化收益率。而在实际的持有期内，收益率的上行仅为 40BP 左右。为了能够更好的分析每个基差组合的真实收益情况，我们模拟收益率发生不同变动时每个基差组合的实际收益情况。

表 9 描述了持有不同可交割国债基差组合，在持有期 2013/9/6~2013/11/29，当国债收益率水平相对头寸构建日(2013/9/6)变化不同水平时，持有期的年化收益率。

从表 9 可以看出，在国债收益率相对头寸构建日水平变化-100BP~100BP 时，持有 130015.IB 基差组合的年化收益率维持在 3.3%~3.4%之间，波动很小；而持有久期最低的 130001.IB 的基差组合，年化收益率则在-4.64%~11.35%之间，波动剧烈。而其余久期介于这两者之间的可交割国债基差组合，其持有期的年化收益率波动率则介于上述两个可交割国债基差组合之间。

因此，对于这些可交割国债的基差组合而言，风险越大，可能的收益就越高，但是风险和收益是相对对称的。这就为投资者提供了多种多样的选择，如果投资者能够对利率走势有较好的把握，那么投资者即可以根据自己的风险偏好和对未来国债收益率走势的判断来选择投资哪个可交割国债基差组合。

通过上面的讨论，我们可以发现以下几种可以用于交易的投资策略：

(1) 如果国债期货的定价误差，使得 CTD 券的 IRR 高于市场的融资成本时，可以进入套利。即可以通过买入当前的 CTD，同时卖空国债期货，并持有该组合至到期进行交割或遇到期货价格低估时适时平仓。

(2) 如果目前的利率水平下，最高久期的可交割国债是 CTD 券，则若投资者判断未来的国债收益率水平会上升，则可以持有中久期或低久期的可交割国债的基差组合并持有至平仓点进行平仓。

(3) 如果当前利率水平下，中久期可交割国债是 CTD 券，则若投资者判断未来收益率会上升，则持有低久期的可交割国债基差组合，并持有至平仓点平仓；若投资者判断未来的收益率会下降，则投资者可以通过持有高久期的可交割国债基差组合，并持有至平仓点平仓。

(4) 如果在当前的利率水平下，低久期的可交割国债是 CTD 券，则若投资者

判断国债收益率会下降，则投资者可以持有高久期的可交割国债基差组合，并持有至平仓点平仓。

表 9 不同可交割国债持有期年化收益率与收益率变化的关系(2013/9/6~2013/11/29)

单位：BP	130015.IB	090023.IB	110021.IB	120005.IB	120010.IB	120016.IB	130001.IB	130003.IB	130008.IB	130013.IB
-100	3.42%	1.68%	-2.02%	-0.46%	0.34%	0.97%	-4.61%	2.00%	2.76%	-3.43%
-90	3.31%	1.88%	-1.51%	-0.09%	0.62%	1.16%	-3.82%	2.06%	2.73%	-2.78%
-80	3.31%	2.19%	-0.90%	0.38%	0.99%	1.46%	-2.94%	2.22%	2.80%	-2.04%
-70	3.31%	2.49%	-0.30%	0.84%	1.36%	1.75%	-2.07%	2.38%	2.87%	-1.31%
-60	3.31%	2.79%	0.30%	1.30%	1.72%	2.03%	-1.21%	2.54%	2.94%	-0.58%
-50	3.30%	3.08%	0.89%	1.75%	2.08%	2.31%	-0.36%	2.69%	3.00%	0.14%
-40	3.35%	3.42%	1.51%	2.24%	2.48%	2.64%	0.53%	2.89%	3.12%	0.89%
-30	3.35%	3.71%	2.08%	2.68%	2.84%	2.92%	1.36%	3.04%	3.18%	1.59%
-20	3.35%	3.99%	2.65%	3.12%	3.18%	3.19%	2.18%	3.19%	3.25%	2.28%
-10	3.34%	4.27%	3.21%	3.55%	3.53%	3.46%	2.99%	3.33%	3.32%	2.97%
0	3.34%	4.55%	3.77%	3.97%	3.86%	3.72%	3.80%	3.48%	3.38%	3.65%
10	3.34%	4.82%	4.31%	4.39%	4.20%	3.98%	4.59%	3.62%	3.44%	4.31%
20	3.34%	5.09%	4.85%	4.80%	4.53%	4.24%	5.38%	3.76%	3.51%	4.97%
30	3.34%	5.35%	5.39%	5.21%	4.85%	4.50%	6.16%	3.90%	3.57%	5.63%
40	3.34%	5.62%	5.91%	5.61%	5.17%	4.75%	6.92%	4.04%	3.63%	6.27%
50	3.34%	5.88%	6.43%	6.01%	5.49%	5.00%	7.68%	4.17%	3.69%	6.91%
60	3.34%	6.13%	6.95%	6.40%	5.80%	5.24%	8.43%	4.31%	3.75%	7.54%
70	3.34%	6.39%	7.46%	6.79%	6.11%	5.48%	9.17%	4.44%	3.80%	8.16%
80	3.34%	6.64%	7.96%	7.17%	6.41%	5.72%	9.91%	4.57%	3.86%	8.77%
90	3.34%	6.88%	8.45%	7.55%	6.71%	5.96%	10.63%	4.70%	3.92%	9.38%
100	3.34%	7.13%	8.94%	7.92%	7.01%	6.19%	11.35%	4.82%	3.97%	9.98%

5.4.7 国债期货久期

理论上，由于国债期货定价是依据最便宜可交割国债来定价的，所以经验法则认为国债期货的理论久期等于最便宜可交割国债的久期。然而，由于当剩余期限为 4~7 国债的收益率在 2.5%~3.5%之间时，国债的 CTD 券会发生变化，当国债收益率由 3.5%向下变动时，国债期货的 CTD 券会逐渐由最高久期的可交割国债转化为最低久期的可交割国债，这时候，如果使用经验法则，就会发现国债期货的久期在该利率区间内的某一点会发生跳跃。在这种国债期货久期不连续的经验法则下，在 2.5%~3.5%的收益率区间内，对现券进行套保会失去效率。

之所以经验法则下会出现国债期货久期不连续的情况，正是因为经验法则没有考虑到择券期权的价值，完全依据当前的 CTD 券来为国债期货定价。为了能够弥补这种缺陷，我们在本文中通过使用考虑到择券期权价值的 BDT 模型来为国债期货定价，并进一步计算出国债期货久期随着收益率水平变化而变化的趋势。与经验法则相比，通过该模型计算出的国债期货久期是连续的，能够为套期保值实践提供较好的指导意义。通过 BDT 模型计算出的国债期货理论久期随收益率变化的趋势见图 18。

通过图 18 我们可以看出，国债期货的理论久期表现出较好的连续性，但是并不是很平滑。之所以这样，正是因为国债期货的最便宜可交割国债不断的发生转化。在国债利率水平在 3.5%以上时，该国债期货合约最便宜可交割国债始终为 130015.IB，因此，其久期随着国债利率的下降有微幅上行（随着利率的下降，债券价格上升，从而久期有所下降）。当利率在 3.4%附近时，CTD 发生了转化，中久期的可交割国债开始成为 CTD，从而国债期货的久期开始大幅下降，并在某个水平开始持平。国债期货的久期在某个中间的利率水平阶段性持平，是因为此时中久期可交割国债成为了 CTD，且在利率较小幅度的变化时维持不变，此时的国债期货久期近似等于该中久期可交割国债的久期。

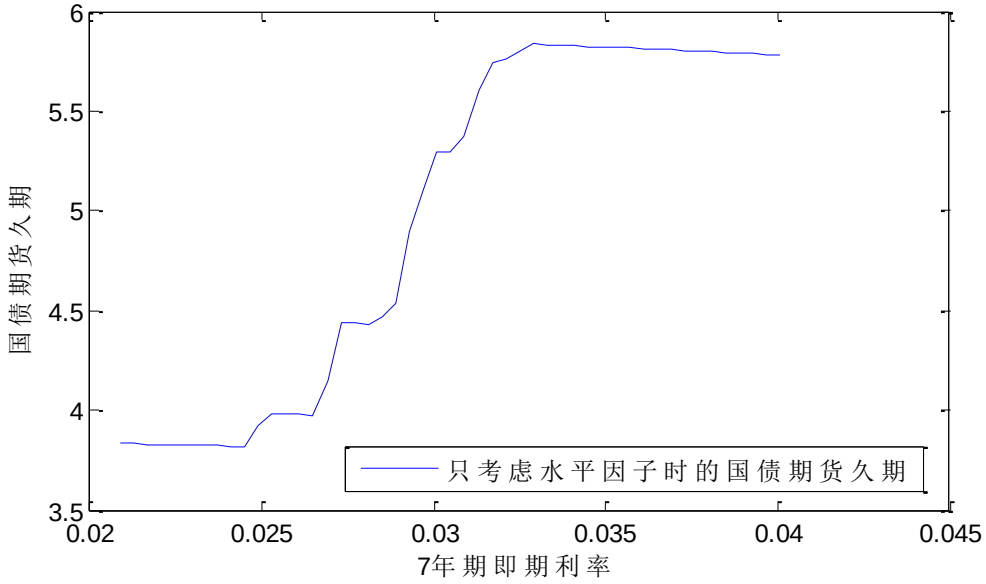

图 18 国债期货理论久期随 7 年即期利率水平变化

然而，尽管图 18 的理论久期表现出较好的连续性，理论上可以为套期保值提供较好的参考，但是，由于目前我国并没有利率在 2.5%~3.5%之间的国债期货样本数据，所以，国债期货的实际久期是否真如理论上的久期，也表现出这样的连续性，我们无从检验，只能期待在进一步获取到利率在这个跨度时国债期货的数据，来检验我们的国债期货理论久期能否与现实的国债期货久期匹配。

第六章 结论与研究展望

6.1 本文结论

本文专注于择券期权定价、国债期货定价及基于定价基础上的交易策略设计与对利率变化套保的讨论并提供了通过单因子动态利率模型 BDT 模型为国债期货及择券期权定价的方法。通过本文的研究主要得到以下结论。

(1) 目前，由于我国的国债收益率水平远高于国债期货标准券的票息率，对应于最便宜可交割国债的择券期权基本没有价值，进而该择券期权的存在对国债期货的定价几乎没有影响。

(2) 通过 BDT 模型得到的国债期货价格，在经过模型所使用的利率期限结构误差修正和实际融资利率与国债即期利率差额修正后，与市场国债期货价格差额在-0.3843~0.2904 之间，平均值为 0.0806，该差额是由市场定价误差所致。

(3) 可交割国债的基差表现出非常好的特性。高久期的可交割国债的基差回报结构类似于一个利率看跌期权；低久期的可交割国债的基差回报结构则类似于一个利率看涨期权；中久期的可交割国债的基差回报结构类似于一个利率跨式期权。由于其收益特征类似于期权，所以其最大亏损（最小收益）已经被提前锁定，投资者可以根据自己的风险偏好和对未来利率走势的判断来选择是否进行投资以及对哪个可交割国债的基差进行投资。

(4) 本文的研究还发现，在经过流动性筛选后的 10 个可交割国债中，有 4 只可交割国债在不同的利率水平下会成为最便宜可交割国债。因此，随着国债利率水平由 4%逐渐下降到 2%的过程中，国债期货的久期没有表现出传统定价方法中所出现的在某个利率水平上跳跃的现象，而是呈现出较好的连续性。其特征表现为阶段性下降与阶段性持平间隔出现，具体见图 18。由于该定价方法所得的国债期货久期表现出较好的连续性，通过该定价方法所提供的套期保值效果理论上具有更好的效果。

6.2 研究展望

首先，尽管本文所提出的方法能够更好的指导国债期货定价，且通过比较该模型所得到的理论国债期货价格与市场国债期货价格，发现该模型能够较好实现为国债期货定价。但是，由于目前我国的国债期货推出时间还较短，没有利率跨度在 2.5%~3.5%的国债期货市场价格，也就是说国债期货的择券期权真正存在价值的利率跨度内没有对应的国债期货市场价格，因此，在该利率区间内，通过该模型所得到的理论国债期货价格是否能够对国债期货实际价格提供有意义的参考，还亟待市场的进一步检验。

其次，本文所使用的 BDT 模型要求瞬时即期利率服从对数正态分布。由于本文所使用的 BDT 利率树的时间间隔分别为月和日，通过对月利率和日利率进行正态性检验，发现月利率能够较好的服从对数正态分布，而日利率则不具有较好的正态分布性。这在一定程度上会影响模型定价的准确性。因此，究竟日利率应该服从什么样的分布，还需要进行进一步的研究。

参考文献

[1] Black, F., E. Derman, and W. Toy, A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options, Financial Analysts Journal, 1990, Vol. 46, No.1.

[2] Margrabe, W., The Value of Option to Exchange One Asset for Another, Journal of Finance, 1978, Vol. XXXIII, No.1.

[3] Gay, Gerald D. and S. Manaster, The Quality Option Implicit in Futures Contracts, Journal of Financial Economics, 1984, p353-370.

[4] Hemler, M. ,The Quality Delivery Option in Treasury Bond Futures Contracts, Unpublished Ph.D. Dissertation, 1988, University of Chicago.

[5] Michael L. Hemler, The Quality Delivery Option in Treasury Bond Futures Contracts, Journal of Finance, 1990, Vol. 45, No. 5.

[6] Boyle, P., The Quality Option and Timing Option in Futures Contracts, Journal of Finance, 1989, Vol. 44, No. 1.

[7] H. Ruben, On the Moments of Order Statistics in Samples from Normal Populations, Biometrika 1954, 41, 200-27.

[8] Grieves, R. and AJ. Marcus, Delivery Options and Treasury Bond Futures Hedge Ratios, Journal of Derivatives, 2005, Vol. 13 No. 2.

[9] Kane, A. and Alan J. Marcus, The Quality Option in Treasury Bond Futures Market: An Empirical Assessment, Journal of Futures Markets, 1986, p231.

[10] Richard J. Rendleman, Jr, Delivery Options in the Pricing and Hedging of Treasury Bond and Note Futures, Journal of Fixed Income, 2004, 14.2: 20-31.

[11] Ben-Abdallah, R. Hatem Ben-Ameur and Michele Breton, Pricing the Chicago Board of Trade T-Bond Futures, Quantitative Finance, 2012, Vol.12, No.11, 1663-1678.

[12] Balbas, A., and S. Reichardt, On the Future Contract Quality Option: a New Look, Applied Financial Economics, 2010, 20, 1217-1229.

[13] Grieves, R., Alan J. Marcus and A.Woodhams, Delivery Options and Convexity in Treasury Bond and Futures, Review of Financial Economics 2010, 19,1-7.

[14] Hull, J. and A. White, Pricing Interest-Rate Derivative Securities, The Riview of Financial Studies,1990, v 3 n 4.

[15] Gay, Gerald D. and S. Manaster, The Quality Option Implicit in Futures Contracts, Journal of Financial Economics, 1984, p353-370.

[16] Bjerksund P. and G. Stensland, Implementation of The Black-Derman –Toy Interest Rate Model, Journal of Fixed Income 1996, 6.2: 67-75.

[17] Zahangir Alam, Md., and Md. Azizur Rahman, Modelling Volatility of The BDT/USD Exchange Rate with GARCH Model, International Journal of Economics and Finance, 2012, Vol.

4, No. 11.

[18] Jamshidian F., Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models, Journal of Fixed Income, 1991, 1.1: 62-74.

[19] Derman, E., and I. Kani, Stochanstic Implied Trees: Arbitrage Pricing With Stochastic Term and Strike Structure of Volatility, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1998, Vol. 1, No. 1,61-110.

[20] John j., Jr. Merrick, Y. Narayan, Strategic Trading Behavior and Price Distortion in A Manipulated Market: Anatomy of A Squeeze, Journal of Financial Economics, 2005, 77,171-218.

[21] Barnhill, T., Quality Option Profits, Switching Option Profits and Variation Margin Costs: An Evaluation of Their Size and Impact on Treasury Bond Futures Prices, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1989, 23: 343-349.

[22] Cornell, B., and M. Reinganum, Forward and Futures Prices: Evidence From the Foreign Exchange Market, Journal of Finance, 1981, 36: 1035, 1045.

[23] Cox, j., J. Ingersoll and Ross, The Relation Between Forward and Futures Price, Journal of Financial Economics, 1981, 9: 321-346.

[24] French, K., A Comparison of Futures and Forward Price, Journal of Financial Economics, 1983, 12:311-342.

[25] Hedge, S., Characteristic of the Cheapest-to-Delivery Bonds on the Treasury Bond Futures Contract, Financial Analysts Journal, 1987, 43:70-76.

[26] Hedge, S., An Empirical Analysis of Implicit Delivery Options in the Treasury Bond Futures Contract, Journal of Banking and Finance, 1988, 12: 469-492.

[27] Hedge, S., On the Value of Implicit Delivery Options, The Journal of Futures Markets, 1989, 9:421-437.

[28] Hedge, S., An Ex Post Valuation of the Quality Option Implicit in the Treasury Bond Futures Contract, Journal of Banking and Finance, 1990, 14:741-760.

[29] Hull, J., Options, Futures and Other Derivatives, Pearson Education Limited, 2012.

[30] 郑振龙，康朝锋，中国利率衍生品的定价和保值[M]，北京大学出版社， 2006.

[31] 陈蓉，郑振龙，固定收益证券[M]，北京大学出版社，2011.

[32] 郑振龙，林海，中国动态利率模型研究[J]，财经问题研究，2005.

[33] 肖峰，论 BDT 模型在我国利率衍生品定价中的应用[D]，复旦大学经济学院，2008.

致谢

时光荏苒，三年的研究生生活在不知不觉已经步入尾声。回首三年内的点点滴滴，美丽的厦大校园、课堂上的老师的背影、Seminar 上的头脑风暴、烧烤摊上和同学大话梦想、环岛路上骑车畅游、马拉松的长龙……。此刻，一幅幅画面开始从回忆里不断涌现，心情始终难以平静。

在这三年里，有太多幸福的时刻值得铭记，有太多需要感谢的人……

首先，我要感谢我的导师陈蓉老师，陈老师一直以来的高要求锻造了我做事追求极致的态度，陈老师的固定收益课程更是赋予了我坚实的翅膀，让我可以在找工作的过程中更加游刃有余。还记得研一刚上学时，陈老师在百忙之中抽空指导我未来三年应该怎样布置自己的时间，告诉我这三年应该做什么，学编程、补金融基础、多了解市场等等，回想起来，一切都还历历在目，是那样的亲切而又温暖。

其次，我还要感谢其他给予我重大影响的老师。感谢郑振龙老师对金融工程这个大家庭的精心呵护，郑老师用简单而朴实的语言让我们真正感觉到了金融工程的魅力，也是郑老师的风趣、幽默和一句句鼓励给予我在学习的过程中不断前行的动力；感谢陈淼鑫老师，在我做课程助教期间给予我不断充实自己的机会；感谢赵华老师、郭烨老师、袁惠萍老师等在授课期间给予的各种指导和帮助。

再次，我要感谢我的各位同学朋友们。感谢大宿舍的各位朋友每时每刻给予我的感动，一起做饭、唱歌、过生日、打牌、烧烤，每个画面都是那么的温馨，即使再多的话语也无法表达对你们感激，你们是那些可以随叫随到的朋友，有了你们，即使生活再平淡，也会充满幸福；感谢易希达、曾璐，我们这个三人组从做文献综述时的苦中作乐到现在失落时及时的互相安慰、问候，从不熟悉到现在成为挚友，每个过程都清晰可见；感谢金工这个大家庭，一起学习，seminar 的时光虽然辛苦，却也难忘；感谢何彪、张锐、高宏建，同窗三年，一起玩一起疯的时光；还要感谢葛俊师兄在论文上给予的悉心指导。

最后，我还要感谢我的父母，感谢您们给予我学生生活中的无条件支持，是您们在我背后默默的付出，让我有了今天的成就，二十多年来，您们再苦再累也要让我生活的更好。感谢哥哥和姐姐从小到大对我无微不至的关怀，你们的关心

和支持让我无忧无虑的走到了现在。

杜培俊

2014 年 3 月 12 日于厦门大学