

模型风险及其对衍生品定价的影响

郑振龙 刘杨树
(厦门大学金融系)

摘 要

本文通过模拟交易员对冲衍生品空头的盈亏情况来研究模型风险以及它给衍生品定价和复制带来的影响。本文检验了在参数复制和传统的 Delta 复制两种复制策略下，其复制误差与模型选择、真实测度的漂移项和真实状态变量等的关系。本文还详细讨论了参数复制策略和 Delta 复制策略的优劣，以及模型风险对这两种复制策略的影响。

关键词：模型风险；参数复制策略；Delta 复制策略；复制误差

Model Risk and Its Effects on Pricing Derivatives

Abstract

By simulation of traders' gain and loss, this paper studies on model risk and its effects on derivatives pricing and replication. We test the impacts of model selection, drift in real measure and other state variables on hedge error, assuming that traders use either delta hedge with underlying or parameters hedge with underlying and options. Besides, we compare these two hedge strategies and how model risk affects them respectively.

Key words: model risk, parameter hedge, delta hedge, hedge error

一 引言

在金融衍生品定价中,大部分金融理论往往假设标的资产以及其它相关的状态变量服从某个过程,并构建自融资组合,对衍生品进行复制,从而获得衍生品的无套利价格。但是在真实世界中标的资产和相关状态变量的过程往往和模型的假设有一定的差异,资产收益率常常呈现出短暂记忆性、尖峰厚尾、跳跃、长期周期性等一系列的特征。虽然学者们在不断完善模型来尽可能的刻画资产的运动过程,但任何模型和真实世界都会有一定的差距,因此,我们认为使用任何模型都存在模型风险,而模型风险的判断和度量一直是学术界和实务界亟须解决的问题。

目前理论界和实务界对模型风险的定义可以分成两类(Rebonato, 2003)^[15]:一是在当前金融市场的信息基础上,用不同的模型对复杂的衍生品定价所产生的差异;二是用不同的模型定价并进行动态复制对冲风险后,所能得到的收益的差别。

在对模型风险的研究上,不少学者讨论了模型风险本身或者影响模型风险的某个因素。如 Bakshi et al.(1997)^[1]用不同的模型对市场进行每日重复校准,并通过比较不同模型的复制误差来判断模型的好坏。Green and Figlewski (1999)^[7]指出在用 BS 模型给期权定价时,隐含波动率的变动反映了 BS 模型的模型风险。他们研究了用历史波动率来预测 BS 的隐含波动率时,不同期限的历史波动率以及基于历史信息的不同波动率模型的选择对金融衍生品定价带来的模型风险。Hull and Suo(2002)^[11]指出研究模型风险时为了更加贴近市场的情况,在对模型进行校准时必须使用和交易员一样的连续校准(continual recalibration)。他们检验了在股票的真实过程是随机波动率模型时,运用 IVF (Dupire, 1994)^[6]模型和运用 BS 模型对奇异期权进行定价,二者所产生的差别。Longstaff et al.(2001)^[13]认为如果用的模型是错误的,那么即使市场上交易员用的是每日校准模型的方法来设定模型的参数,模型设定的偏误的同样会带来很大的定价误差。他们将多因子的利率市场模型作为基准,模拟市场数据,然后运用单因子模型通过每日校准来进行动态复制并对美式互换期权(American style swaption)进行定价,结果表明,单因子模型的每日校准无法弥补动态利率模型的设定偏误。Schoutens et al.(2005)^[15]比较了标的资产服从随机波动率、随机波动率跳跃、BNS、VG(Variance Gamma)和 NIG(normal inverse gaussian)等几种过程时,回报与标的资产的 k 阶矩相关的 $(\sum_{i=1}^n (\log(S_i / S_{i-1}))^k - K)^+$ 的衍生品定价,他们发现假设标的资产的不同过程,将导致收益为标的资产高阶矩的衍生品定价的极大差异。

以上学者的研究都证明了,模型的错误设定对定价的影响是不可忽略的;即使模型使用的参数随着信息量的增加而不断更新,错误模型的复制效果也无法很好的逼近真实模型。由于模型参数随着市场情况不断变化,即使复制间隔无限小,近似模型所隐含的动态复制策略的复制成本也无法收敛到该模型所计算出的理论价格。初始定价和复制成本间的差异即为复制误差,而模型风险正是影响复制误差的重要因素。

基于以往的研究,我们会很自然的产生一个疑问:如何判断一个模型的定价以及它所隐含的复制策略在真实世界中的可靠程度?为了回答这个问题,本文在真实模型未知的情况下,通过一系列模拟来研究几种模型的定价以及其复制策略的可靠程度。本文贡献主要有:第一,运用模拟数据的可控性优势,扩展了以往学者的研究方法¹,发展出一种能够很好结合交易员实际盈亏的方法,来检验不同模型在不同环境和冲击中的模型风险。这样的方法可以被推广到所有衍生品定价模型的模型风险研究中,并且可以被衍生品交易员很好地应用在实际交易中;第二,指出了在真实模型未知时,近似模型的参数的本质,以及复制策略将如

何受到模型风险的影响；第三，通过复制误差的统计指标揭示出在模拟路径下几种模型所产生的模型风险，以及各个模型所隐含的复制策略的稳定性；第四，从理论上描述了参数复制策略的可行性和缺陷，并且首次用参数复制策略来测试模型风险。

本文的其它部分包括：第二部分是随机过程框架下的近似模型。该部分主要描述了，在真实模型未知的情况下，我们如何进行参数重复校准，所使用的近似模型的本质以及参数所服从的随机过程。第三部分是复制策略。该部分主要描述了模型风险存在时，传统的仅以标的为复制工具的复制方法与参数复制策略所可能受到的影响。第四部分是模拟研究结果。我们通过模拟来获得不同模型的复制误差如何受现实世界各种可能出现的状态变量变化的影响。第五部分是结论。该部分我们总结了全文的思路和贡献，提出了本文的不足之处和未来的研究方向。

二 随机过程框架下的近似模型

由于目前大部分的衍生品定价都是在随机过程框架下进行的，因此本文假设真实模型是一个随机过程，具体的假设如下：

1.对于某个资产存在一个真实的模型并且此真实模型服从一个多状态变量的随机过程，但是没有人能够在给其衍生品定价时得到这个模型。

2.交易员用一个近似的模型对衍生品进行定价和相应的套期保值。

在第一个假设中，假设存在一个真实的模型意味着用这个模型对衍生品进行复制将不存在复制误差。²这样的假设并不会特别严格，因为对于历史数据，只要模型设定足够复杂，我们常常能够得到足够精确的模型。但是这样的模型只能在事后得到，在事前无法得到。因此人们只得从历史数据中寻找近似的模型，并根据信息的更新不断校准模型的参数。下文将介绍如何进行参数重复校准，如何得到近似模型的复制误差，并推导出模型参数所服从的过程。

(一) 参数的重复校准

由于参数必须随着信息而时变，因此我们必须经常对参数进行重复校准(Hull et al., 2002)^[11]，校准函数一般可以表示为(Li, 1999)^[12]：

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \arg \min_{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)} \left(\sum_{i=1}^n w_i g(l_i(M_i) - l_i(\text{Market})) \right) \quad (1)$$

其中 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ 为待估参数， w_i 为每个产品误差的权重， g 为非负凸函数并且 $g(0) = 0$ ， l_i 为某一单调函数， M_i 则表示第 i 个模型算出的价格， Market 表示此产品对应的市场价格。实质上参数的校准就是获得一组参数，这组参数将使以某种方式加权的模型所得价格和市场上产品价格的单调函数的差异最小化。

在参数的校准中权重 w_i 的选择(Cont and Tankov, 2004)^[4]、 l_i 函数的选择(Detlefsen and Härdle, 2007)^[5]、以及 g 函数的选择都将影响参数的数值。对于不同产品，校准的标准可能不同。 w_i 经常跟流动性指标有关，比如买卖价差，交易量等。流动性越好的产品其所包含的信息含量越可靠，因此常常给流动性好的产品较高的权重。除了校准函数的选择外，在校准过程中模型的性质也将影响校准的好坏。曾有学者(He et al., 2006)^[9]证明了加跳跃的随机波动率模型的部分参数对期权价格非常不敏感，从而导致校准的目标函数在一个较大范围内

几乎相等,这样的模型在复制中将严重影响复制策略的稳定性。由以上的研究我们可以看出,校准的精确度和校准函数的选择,参数的稳定程度等对衍生品复制结果的影响都是不可忽略的。除此之外,衍生品市场的微观结构所带来的噪音同样也会影响校准和复制的结果。

(二) 模型风险与复制误差

由于在真实模型下衍生品的真实价格总等于模型算出的价格,因此用真实模型进行定价可表示为:

$$P(S_t, \chi_t, K, t, T) = f^{TM}(S, \chi_t, K, t, T | \theta_t) \quad (2)$$

等式(2)中 $P(S_t, \chi_t, K, t, T)$ 代表在任一时刻 t 衍生品的真实价值,它由到期时间 T , 标的资产 S_t , 其他状态变量 χ_t , 以及回报 K^3 所决定。 $f^{TM}(S, \chi_t, K, t, T | \theta_t)$ 代表通过真实模型所得出的衍生品价格,它等于衍生品的真实价值, θ_t 为模型的参数。

实际中交易员用一个近似模型先计算出初始的衍生品价格(即发行衍生品时的价格),之后重复校准该模型参数,并不断进行对冲。这个过程可以表示为:

$$P(S_t, \chi_t, K, t, T) = f^{M_i}(S_t, K, t, T | \phi_t) + \xi_t^{M_i} \quad (3)$$

$f^{M_i}(S_t, K, t, T | \phi_t)$ 表示在 t 用 M_i 这个近似模型计算出的衍生品价格, ϕ_t 表示在 t 时刻模型 M_i 的参数; $\xi_t^{M_i}$ 表示在 t 时刻近似模型所得的价格与真实模型的差异。在初始定价时刻 t_0 , 近似模型和真实模型之间的差异为 $\xi_{t_0}^{M_i}$; 将(3)在 t 时刻的表达式减去(3)在 t_0 时刻的表达式,并整理可得:

$$\xi_t^{M_i} = \left\{ \left[f^{TM}(\bullet | \theta_t) - f^{TM}(\bullet | \theta_{t_0}) \right] - \left[f^{M_i}(\bullet | \phi_t) - f^{M_i}(\bullet | \phi_{t_0}) \right] \right\} + \xi_{t_0}^{M_i} \quad (4)$$

其中 $\xi_{t_0}^{M_i}$ 代表初始定价误差,即:

$$\xi_{t_0}^{M_i} = f^{TM}(\bullet | \theta_{t_0}) - f^{M_i}(\bullet | \phi_{t_0})$$

由(4)式可以看出在任意 t 时刻,用近似模型定价所带来的定价都可以分解成两个部分:一是衍生品的真实价格从 t_0 时刻到 t 时刻的变动与近似模型计算出的价格从 t_0 时刻到 t 时刻的变动的差异;2 衍生品的初始定价误差。这样分解的理由在于我们可以用复制策略来表示第一部分,和交易员衍生品账户的盈亏直接联系;而第二部分则直接影响交易员期初出售衍生品的参考价格,该价格的高低将影响该衍生品对客户的吸引力。

交易员为了对冲手中衍生品头寸对风险源变动的敏感性将用标的资产和其他金融工具来复制自己的衍生品头寸。现今 $HC_t^{M_i}$ ⁴ 为到 t 时刻为止,模型 M_i 所隐含的一个复制策略所花费的所有复制成本。在真实模型下,该复制成本所带来的现金流贴现值加总(即复制成本)在任意时刻都等于期初所制定的衍生品价格。因此,在真实模型的假设下:

$$HC_t^{TM} \cdot e^{-R(t-t_0)} = f^{TM}(\bullet | \theta_{t_0}) \quad (5)$$

(5)式左边代表复制策略从 t_0 时刻到 t 时刻所带来的现金流贴现值的加总,右边代表持有一份

衍生品的价格。当交易员使用一个近似模型进行复制时，由于每次复制都会产生微小的误差，因此要使得(5)式成立必须在式子左边加上一个复制误差项⁵，整理即可得：

$$HE_t^{M_i} = f^{M_i}(\bullet | \phi_{t_0}) - HC_t^{M_i} \cdot e^{-R(t-t_0)} \quad (6)$$

尤其值得注意的是等式(6)实际上就表示了交易员交易账户的净盈亏在 t_0 时刻的价值。在(6)中 $HC_t^{M_i}$ 是交易员用近似模型 M_i 在 t 时刻为了复制衍生品而付出的资金， $f_{t_0}^{M_i}(\bullet)$ 是交易员作为衍生品空头而收取的衍生品价格。在我们无法获得真实模型的情况下， $f_{t_0}^{M_i}(\bullet)$ 并不能作为初始定价的所有依据，因为 $f_{t_0}^{M_i}(\bullet)$ 本身可能是由一个错误的模型所得到的，甚至没人能够判断它的错误程度有多大。因此，运用近似模型时对复制误差的预测是交易员必须要做的工作。

(三) 模型参数所服从的动态过程

由于我们无法得到真实的模型，因此为了保持模型参数的无套利条件⁶，我们就必须用近似模型对市场数据进行重复校准。然而重复校准必然使得参数随着时间的变化而改变，因此在使用近似模型时，模型的参数实际上是一个随机变量。下面我们以前 BS 模型为例，说明参数的变动情况。在真实模型下，如(2)：

$$P(S_t, \chi_t, K, t, T) = f^{TM}(S, \chi_t, K, t, T | \theta_t)$$

我们用几何布朗运动来对衍生品进行定价：

$$P(S_t, \chi_t, K, t, T) = GBM(S_t, K, r, t, T | \sigma_t) \quad (7)$$

此时模型中唯一的参数 σ_t 可以与衍生品价格一一对应⁷，并且 σ_t 的变动对单个产品来说实际上包含了所有的模型错误所导致的误差，因此：

$$\sigma_t = \sigma(S_t, K, r, t, T, \chi_t) \quad (8)$$

等式(7)表明了由于 BS 模型本身没有考虑到其他状态变量的过程，因此其他状态变量对衍生品价格的影响将全部包含在对波动率 σ_t 的影响中。对(8)式使用伊藤引理我们可以得到：

$$d\sigma_t = \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} dt + \frac{\partial \sigma_t}{\partial X_t} \nabla X_t + \nabla X_t' \frac{\partial^2 \sigma_t}{\partial X_t^2} \nabla X_t \quad (9)$$

其中

$$\nabla X_t = (dS_t, d\chi_t^1, \dots, d\chi_t^n)'$$

理论上在有些模型的假设下（如局部波动率(Dupire, 1994)^[6]或 SABR (Hagan et al., 2002)^[8]等），BS 隐含波动率可以求出解析解(SABR 下为近似解析解)。这个解析解就可以理解为真实模型是局部波动率或 SABR 时，BS 的隐含波动率与其他状态变量以及参数之间的关系。

等式(9)即为 BS 波动率与扩散过程下真实模型状态变量的关系，当真实模型的状态变量存在跳跃时，(9)式的积分形式将变为：

$$\begin{aligned} \sigma(t, X(t)) = & \sigma_0 + \int_0^t \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} ds + \int_0^t \frac{\partial \sigma_s}{\partial X_s} \nabla X_s \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \nabla X_s' \frac{\partial^2 \sigma_s}{\partial X_s^2} \nabla X_s + \sum_{0 < s < t} (\sigma_s(X(s)) - \sigma_s(X(s-))) \end{aligned} \quad (10)$$

由(10)可以看出, BS 模型的隐含波动率所服从的随机过程与未被 BS 模型描述的状态变量过程⁸以及状态变量对隐含波动率的影响程度⁹有关。这样的推导同样适用于其他模型, 因此由于真实模型未知, 我们所使用的近似模型的本质实际上都是一个模型参数服从未知随机过程的模型。既然, 近似模型的参数也是一个随机变量, 那么我们就有必要对这些参数进行对冲。

三 复制策略

由上文我们得知, 在现实中我们所使用的模型实际上是一个参数服从随机过程的近似模型, 因此对模型的参数进行对冲就是必要的。下文将详细讨论模型风险对仅以标的为复制工具的复制方法¹⁰的影响以及其对模型参数对冲方法的影响。

(一) 模型风险对仅以标的为复制工具的 Delta 复制策略的影响

真实模型未知时, Delta 复制策略由一个近似模型给出。由于模型风险的存在, 每次进行 Delta 复制都将产生细小的误差, 而这样的误差使得传统的风险中性定价在实际运用时无法得到和理论一致的自融资复制策略。根据式子(2), 衍生品价格对标的资产的敏感度为

$$\frac{\partial f_t^{TM}}{\partial S_t}, \text{ 而在近似模型下衍生品价格对标的资产的敏感度为 } \frac{\partial f_t^{M_i}}{\partial S_t}, \text{ 则二者之差意味着每一}$$

次 Delta 对冲策略都将产生一定的误差, 可以表示为:

$$DeltaError_t = \left(\frac{\partial f_t^{TM}}{\partial S_t} - \frac{\partial f_t^{M_i}}{\partial S_t} \right) dS_t$$

因此在 Delta 复制策略中, 只要 $\frac{\partial f_t^{TM}}{\partial S_t} - \frac{\partial f_t^{M_i}}{\partial S_t}$ 不为零, Delta 复制策略就无法完全对冲标的

资产的风险源。由于 Delta 复制误差的存在, 标的资产的风险无法被完全对冲, 因此标的资产的漂移率将会影响到最终的交易员盈亏。这些复制误差完全由模型风险导致, 无法通过改进复制策略本身¹¹来避免。

对于不同模型而言, $\frac{\partial f_t^{M_i}}{\partial S_t}$ 的值不同, 因此相应的 Delta 复制误差也不同。在一段时间

内 Delta 复制的累积复制误差为 $\int_0^t \left(\frac{\partial f_t^{TM}}{\partial S_t} - \frac{\partial f_t^{M_i}}{\partial S_t} \right) dS_t$, 那么要检验模型好坏的一个办法就是检

验在不同的时间段内累积复制误差的性质, 包括其期望以及离散程度等等。但由于真实的模型无法得知, 因此无法直接算出累积复制误差的期望和方差等统计特征。但从伊藤引理可以看出, Delta 复制误差会造成累积复制误差中含有标的资产的风险源; 所以在模拟或现实世界中, 标的资产的真实漂移项 u 的变动对 Delta 复制误差的影响可以在一定程度上反映模型对模拟数据或者真实数据拟合的优劣。

值得注意的是, 未被近似模型捕捉到的状态变量也可能和标的资产在现实测度中的过程

相关¹²，因此 Delta 复制误差与标的资产的相关性并非完全由模型风险造成的，还可能是与标的资产相关的状态变量所导致。只有在状态变量相同的两个近似模型中，Delta 复制误差与标的资产的相关程度的差异可以被看作是模型模型风险的差异。

除了 Delta 复制误差之外，真实世界中漂移的变化还将确定¹³地影响模型未知时 Delta 复制误差。这种确定性的误差来自 Delta 复制策略的高阶残余项，如 Gamma，但这种确定性的误差是可以通过复制策略的调整来改进的。

在市场存在跳跃的情况下，跳跃风险是 Delta 复制策略无法对冲的风险。即使用来计算 Delta 复制策略的模型是正确的，该复制策略也将由于跳跃的存在而产生一定的复制误差。所以在不完全市场的情况下，Cont and Tankov(2004)^[4]给出了一个误差最小化的复制方法。

从实际中离散的复制策略来看，即使是扩散过程，其模型参数也总是表现出小幅跳跃，在参数变动很小的时候，参数对冲的方法能够对冲掉部分的参数敏感度。但当市场上真正的跳跃发生的时候，近似的扩散过程模型的参数将发生较大的跳跃。此时只考虑一阶敏感性的参数对冲策略不能很好的对冲掉参数大幅变动，从而将产生较大的复制误差。

本文在后面的模拟中并不考虑用近似的不完全市场模型来检验模型风险，这样做的原因在于：不完全市场模型所隐含的最小复制误差策略本身在模型正确时也将产生复制误差，而这种复制误差与模型风险所导致的复制误差无法分辨，因此无法判断模型风险对复制误差的影响。但这并不意味着这方面的研究是无意义的，相反这方面的深入研究将进一步扩展复制策略并更加贴近市场。

(二) 参数复制策略

Buhler(Buhler et al., 2005)^[3]给出了对参数进行对冲的方法，实际上就是用不同的衍生品来对冲被复制产品对于参数的一阶敏感性。如在 BS 模型中，对冲参数敏感性的方法即是用一个衍生品来对冲波动率变动的风险(vega risk)。以下将简要的描述对冲参数的方法。

在 t 时刻需要被复制的衍生品 F_t 价格由 M_i 模型近似计算得出：

$$F_t^{M_i} = f^{M_i}(S, K, t, T | \phi_t) \approx P(S_t, \chi_t, K, t, T)$$

其中 ϕ_t 为 M_i 的参数列向量，令列向量 $Delta_t$ 为被复制衍生品对 M_i 中各个参数 $\phi_t^1, \phi_t^2, \dots, \phi_t^k$ 的敏感度。 $Delta_t$ 可以通过模型价格对参数求偏导获得，即：

$$Delta_t^{M_i} = \frac{\partial F_t^{M_i}}{\partial \phi_t} = \frac{\partial f_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t} = \left[\frac{\partial f_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^1}, \dots, \frac{\partial f_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^k} \right]^T$$

由于模型 M_i 中包含了 k 个参数，因此需要 k 种衍生品来进行对冲。市场上用来作为复制工具的 k 个衍生品分别用 c_t^i 组成的行向量 C_t 来表示，即

$$C_t = [c_t^1, c_t^2, \dots, c_t^k]$$

这些衍生品关于某个模型 M_i 参数的敏感度同样可以通过对参数求偏导得到，即

$$\frac{\partial C_t^{M_i}}{\partial \phi_t} = \frac{\partial C_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t} = \left[\frac{\partial C_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^1}, \dots, \frac{\partial C_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^k} \right]$$

令矩阵 Y (k 行, k 列) 代表复制工具对参数的敏感度

$$\begin{aligned} [Y_t]' &= \frac{\partial C_t^{M_i}}{\partial \phi_t} = \left[\frac{\partial C_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t}, \dots, \frac{\partial C_t^{M_i}(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t} \right] \\ &= \left[\frac{\partial c_t^1(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^1}, \dots, \frac{\partial c_t^1(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^k} \right. \\ &\quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ &\quad \left. \frac{\partial c_t^k(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^1}, \dots, \frac{\partial c_t^k(S, X, T | \phi_t)}{\partial \phi_t^k} \right] \end{aligned}$$

要使得被复制的衍生品对于参数的瞬时敏感度为零则必须构建一个衍生品的组合来对冲被复制产品对于参数的敏感性, 组合中各种衍生品的买入数量的向量 W_t 必须满足:

$$Y_t W_t - \text{Delta}_t^{M_i} = 0$$

其中

$$W_t = [w_t^1, \dots, w_t^k]'$$

w^i 是第 i 个衍生品的购买量, 上式经整理可得

$$W_t = Y_t^{-1} \text{Delta}_t^{M_i} \quad (11)$$

$W_t' C_t$ 即为使得被复制的衍生品在 t 时刻的瞬时参数敏感度为 0 的组合。交易员通过持有 $W_t' C_t$ 的衍生品组合即可对冲对参数的敏感度。除了参数敏感度外, 交易员还需要用标的资产对冲整个组合关于标的资产的敏感度。因此为了使得组合关于标的资产的瞬时敏感度也为零, 我们要求在 t 时刻所拥有的标的资产数量 Δ_t 满足:

$$\Delta_t S_t + W_t' \frac{\partial C_t^{M_i}}{\partial S_t} = \frac{\partial F_t^{M_i}}{\partial S_t} \quad (12)$$

上式的右边代表一份被复制产品的空头头寸, 左边代表复制工具的组合, 包括标的资产和其他衍生品。综合(11)和(12)两个式子我们可以发现要解出标的资产和复制工具的权重, 我们必须解方程组:

$$\Delta_t \text{ 和 } W_t \text{ 分别为 } t \text{ 时刻所持有的 } \begin{cases} \Delta_t S_t + W_t' \frac{\partial C_t^{M_i}}{\partial S_t} = \frac{\partial F_t^{M_i}}{\partial S_t} \\ W_t = Y_t^{-1} \text{Delta}_t^{M_i} \end{cases}$$

标的资产和复制工具的总量。将 Δ_t 和 W_t 对 t 求偏导, 我们就可以得出资产与复制工具的瞬时变化, 它和复制策略所导致的头寸净变动的交易行为相对应。在算出 Δ_t 和 W_t 后, 可以通过相应的复制策略计算出在任意 t 时刻该复制策略购买资产所需要借来的累积资金 (或债券

空头) 为:

$$\begin{aligned} HC_t^{cash} &= \int_{t_0}^t e^{r(t-s)} S_s d\Delta_s + \int_{t_0}^t e^{r(t-s)} C_s dW_s \\ &= \int_{t_0}^t e^{r(t-s)} (S_s d\Delta_s + C_s dW_s) \end{aligned} \quad (13)$$

而在 t 时刻, 我们所拥有的资产头寸的价值为:

$$HC_t^{asset} = \Delta_t S_t + W_t C_t - F_t \quad (14)$$

t 时刻的总复制成本为

$$HC_t = HC_t^{cash} - HC_t^{asset} \quad (15)$$

根据式子(6), 此时用 M_i 模型所隐含的复制策略进行对冲的复制误差就为

$$HE_t^{M_i} = f^{M_i}(\bullet | \phi_{t_0}) - HC_t^{M_i} \cdot e^{-R(t-t_0)} \quad (16)$$

由于现实中复制无法做到时间的无限可分, 因此我们在实际中可以把等式(3.2.4)离散化分成 n 个复制区间得到

$$\begin{aligned} HC_t^{cash} &= \int_{t_0}^t e^{r(t-s)} (S_s d\Delta_s + C_s dW_s) \\ &= \sum_{s=t_0}^t e^{r(t-s)} [(\Delta_{s+1} - \Delta_s) S_s + (W_{s+1} - W_s) C_s] \end{aligned} \quad (17)$$

在每个小区间内, 标的资产与复制工具的头寸分别增加 $\Delta_{t+1} - \Delta_t$ 和 $W_{t+1} - W_t$; 借来的资金

(或债券空头) 为 $(\Delta_{t+1} - \Delta_t) S_t + (W_{t+1} - W_t) C_t$ 。按照这样的离散复制策略我们就可以得到

实际中复制误差的大小。 T 时刻的复制误差代表了交易员在 T 时刻的交易账户的损益, 因此研究复制误差究竟受到什么因素的影响对真实模型未知时的衍生品定价有非常重要的意义。

(三) 模型风险对参数复制策略的影响

参数复制策略对冲了衍生品对于模型参数变化的一阶敏感性, 但这种复制策略假设了不同衍生品的在同一个模型假设下参数是水平变动的。然而在真实模型未知时, 用一个近似模型进行定价, 不同衍生品的参数变动理论上可能是不一致的。由等式(9)和(10)中我们可以看出模型参数所服从的随机过程和衍生品的回报 K 有关, 只要 K 不同, 那么模型参数所服从的过程就不同。因此对不同衍生品而言, 状态变量对其近似模型的参数的敏感度可能不同, 这将导致被复制产品与复制工具的近似模型的参数在真实模型下的变化幅度不同。

如在使用 BS 模型时, 对冲参数的方法实际上是试图把被复制衍生品的 vega 用其他衍生品的 vega 对冲。但这种对冲方法只有在被复制衍生品的隐含波动率的变化和作为复制工具的衍生品的隐含波动率变动相同时才能完全对冲掉状态变量的风险。在含跳跃的真实模型下隐含波动率服从(10)的随即过程, 此时不同产品的隐含波动率对状态变量的敏感度不同, 状态变量同样幅度的变动将可能导致被复制产品与复制工具的隐含波动率的变动幅度不同。因此即使 vega 对冲对冲了衍生品对隐含波动率的敏感性, 但由于无法知道隐含波动率对状态变量的敏感度, 我们仍然没有办法完全对冲掉真实状态变量的风险。所以复制误差的大小还和实际选取的复制工具有关: 用来对冲某个衍生产品的好的复制工具必须是能够使得参数

对真实状态变量的敏感度与被复制产品相似的衍生工具。这点将在后面由模拟详细说明。

另外，当市场上状态变量的变化加剧时，参数的变化也将加剧。而参数复制策略只复制参数的一阶敏感性，这种复制思想只在参数变化很小时较为有效。这点我们可以通过对近似模型做泰勒展开得到：

$$\begin{aligned}\Delta F(S, \theta, t, T) = & \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial F}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \Delta S^2 + \frac{\partial F}{\partial \theta} \Delta \theta \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \Delta \theta^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial \theta} \Delta S \Delta \theta\end{aligned}$$

由于前面已经推导过参数也是一个随机过程，因此当参数的变化幅度较大时，根据泰勒展开式，参数变化的高阶项将不可忽略。这点在不完全市场中尤为重要，跳跃的发生将导致参数经常有较大幅度的变动。为了避免参数的大幅变化，我们往往牺牲部分的校准精确度来获得参数的稳定性，具体做法是在校准函数后加上表示距离的惩罚项(Cont and Tankov, 2004)^[4]，这种方法又被称为 Tikhonov 正交(Tikhonov Regularization)。

除了同一模型的参数对不同衍生品理论上变动幅度不同外，参数复制的策略还存在对微小的计算误差十分敏感的特点。它并不区分参数敏感度对衍生品价格影响程度的大小，之前(11)式给出了复制工具购买份额的计算方式，即：

$$W_t = Y_t^{-1} \text{Delta}_t^{M_i}$$

现在我们假设一组真实数据和一组带有计算误差的数据来说明参数复制策略的缺陷。如真实数据为：

$$Y_t = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.02 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad \text{Delta}_t^{M_i} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.03 \end{bmatrix}, \quad W_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

在计算过程中 $\text{Delta}_t^{M_i}$ 的计算产生偏误，则对复制工具的对冲份额 W_t 的计算将产生影响。

以下给出两组计算偏误，以及其对 W_t 的结果所产生的影响。

第一组

$$\text{Delta}_t^{M_i} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.04 \end{bmatrix}, \quad W_t = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

第二组

$$\text{Delta}_t^{M_i} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.03 \end{bmatrix}, \quad W_t = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

由以上两个例子可以发现，当基数很小时被复制产品参数敏感度的微小变化将导致计算出的复制工具的购买份额出现很大的差异。但实际上此时参数敏感度的计算误差对复制并没有很大的影响。反之当基数较大时，被复制产品参数敏感度的变化对复制工具购买份额的影响将降低，但是实际上此时的参数敏感度的计算误差对复制的影响要大得多。正是基于这个

原因，本文并未将关于资产 Gamma 复制和参数的二阶项复制作为比较的复制策略之一¹⁴；因为 Gamma 以及其他参数的二阶项常常具有很小的值但却有非常剧烈的变化率。

四 模拟研究结果

对于模型风险的研究来说，使用真实数据的好处在于得到的结论可以直接揭示市场上各种模型的好坏，亦可以比较不同的复制方法对真实数据的实用性。然而使用真实数据也会带来一些无法弥补的缺点，比如数据的不可控性，这导致我们很难一一对应地研究何种因素将导致复制误差的变动。并且在真实世界中状态变量只有一条路径，这使得模型风险的研究结果的稳定性受到样本偏差的质疑。因此在本文中，我们将用模拟的数据来研究模型风险和复制误差。本文假设随机波动率跳跃模型(Bates,1996)^[2]为真实模型¹⁵，对该模型的离散化方法我们采用 IJK-IMM 方法(Lord et al., 2008)^[14]。另外用 BS 模型、Heston-Nandi(Heston & Nandi,2000)^[10]模型、局部波动率模型(Dupire,1994)^[6]以及 SABR 模型作为定价和复制所使用的模型。并且本文一律用等权重的模型隐含波动率与真实隐含波动率的方差作为参数校准时的最小化的目标函数。

(一) 参数复制策略与 Delta 复制策略的复制误差比较¹⁶

为了能够更好的比较参数复制策略和 Delta 复制策略，下文将参数复制策略的复制误差的相关统计指标（表 1）与 Delta 复制策略的相关统计指标（表 2）进行了比较。下图展示了不同模型下，两种复制策略的统计图。

[图 1、图 2、图 3、图 4 插入于此](#)

由上图可以看出，在不同的模型下参数复制策略和 Delta 复制策略各有优劣。参数复制策略在 BS 模型下表现最为稳定；在局部波动率模型下，二者的稳定性差别不大；在 Heston-Nandi 模型下，参数复制策略表现得略优于 Delta 复制策略；但在 SABR 模型下参数复制策略却表现出很大的波动。

表 1 与表 2 中存在一个比较特别的现象，即各个模型的复制误差的均值都为正数，并且随着到期时间的增加而减小。这个数据现象主要是由随机波动率跳跃模型本身相对于其他模型的短期高估引起的，并且这个高估程度随着期权到期时间的增加而减小。由于随机波动率跳跃模型相对于其他模型会在短期内高估期权的价格，因此用其他几个模型对其生成的期权价格序列进行校准，并计算出的对冲头寸同样高估了随机波动率跳跃模型所隐含的复制头寸。再者，模拟中股票本身存在向上的漂移，因此多购买的那部分头寸就会使得复制误差均值为正。在表 1 与表 2 中的均值随着期限的增加而降低的现象也与高估程度的变化相吻合。

需要指出的是，假设真实模型时，真实模型本身的性质所引起的相对高估或低估对本文的研究并没有影响。因为本文的研究目的并不在于衡量绝对的模型风险¹⁷，而在于比较各个模型之间的相对模型风险；即不同的状态变量特征如何通过各个模型的模型风险影响衍生品交易员交易账户的盈亏，以及盈亏变动的情况¹⁸。在真实模型未知时，我们关注的只是各个模型复制误差的相对变化和相对稳定性。

(二) 参数复制策略对不同复制工具的敏感度

前文曾提到参数复制策略具有对复制工具较为敏感的特点。因此我们用不同期限的看涨和看跌期权来进行参数敏感度复制，并通过最后的累积复制误差来分析参数复制策略的对于不同复制工具的敏感性。我们将复制工具分为三组，在每组中分别选择了四个不同期限的平价看涨和看跌期权，其期限如下表：

[表 3, 表 4, 表 5 插入于此](#)

由表 3 到表 5，我们可以发现，随着复制工具的期限与被复制工具的期限差距的增大，

Heston-Nandi 模型和 SABR 模型的参数复制策略都反映出他们不收敛的特点，而 BS 模型和局部波动率模型的参数复制策略则与复制工具的差异无太大关系。其原因可能在于本文使用 BS 模型和局部波动率模型做参数复制时都只引入一个衍生工具来对冲参数风险，但在使用 Heston-Nandi 和 SABR 模型时都引入了四个衍生工具来对冲参数风险。此时由于模型参数的真实过程难以判断，并且复杂模型的校准容易造成参数的跳动，因此参数复制策略将极不稳定。如表 4 与表 5 所示，Heston-Nandi 和 SABR 在使用期限与被复制差异很大的组合作为复制工具时，它们的均值和方差出现了不收敛的特性。在实际中，每一次使用参数复制策略进行复制的时候，交易员必须对用来对冲的衍生品头寸变动大于 1 的复制组合给予极大关注；因为模拟显示当对冲所需的衍生品头寸变动大于 1 的时候，复制策略很可能陷入一个正反馈的循环，从而导致用来对冲的衍生品头寸不断增加。

解决参数复制策略不稳定的办法除了尽量减少参数个数外，直觉上还可以通过用仅含有单一参数风险的衍生品来进行对冲¹⁹，比如用方差互换（variance swap）来专门规避波动率风险等。单一风险的衍生品作为对冲的工具稳定性比多参数风险的衍生品效果要好的多。但是并非所有的参数在市场上都能够找到专门针对参数的衍生品，因此如何用各种不同产品来对冲参数风险将是另一个值得研究的问题。

（三）现实测度对复制误差的影响

在错误的模型设定下，进行重复校准并且复制，并无法消除真实世界测度的影响。为了表明这一点，在模拟中我们固定其他参数，并生成同样的随机数，但改变标的的漂移 u 来生成真实的标的过程。以此来判断不同的漂移项 u 即真实测度的变化对错误模型假定下复制误差的影响。

[表 6 插入于此](#)

显然由表 6 可以看出，不同的漂移对复制结果有一定的影响，Delta 复制策略的误差随着 u 的上升有略微的下降。这主要是由两方面原因引起，首先我们复制所用模型的 Delta 值实际上都过多的复制了标的资产，从而标的资产的一个正漂移将导致最后的复制误差为正，而这种误差将随着期限的增加而减小；此处我们用 50 天的短期期权作为被复制工具，将很明显的发生过多复制现象。但此处随着 u 的增大，Delta 复制策略的均值反而有所下降和第一个原因相矛盾。这主要是因为第二个原因：Gamma 以及其它高阶项并没有被复制。对于一个看涨期权来说，它的 Gamma 是一个正数。当 u 较小的时候，由于每次复制的频率很短，所以股票的价格变动很小，Gamma 本身的作用也很小。但是当 u 增大的时候，如表中 u 达到 0.2 与 0.5 时，股票本身就有一个很大的确定性变动，这个变动经常比随机项带来的影响更大²⁰。所以，漂移项 u 的变动实际上导致了 Gamma 的影响不可忽略，此处的看涨期权空头将导致复制者持有负 Gamma，从而使得收益降低。以上的两个影响相互抵消，使得最后 u 的增大对复制误差的影响变得很小，但可以看出 Gamma 的影响仍然更大一些。

在本文中，我们必须将由于真实模型设定所导致的数值变化的原因分离。即在真实中，由于模型错误所导致的 Delta 误差的大小我们不能确定。但是真实测度中漂移的变化导致单位时间内股价变动幅度的变化会使得风险中性世界的 Delta 复制策略有一个确定性的偏误²¹。

（四）波动率的变化对复制误差的影响

由于状态变量的波动将导致参数的波动加大，从而影响复制的效果。因此我们通过模拟中提高随机波动率的波动来测试状态变量的波动增大对复制误差的影响

[表 7 插入于此](#)

由表中可以看出除了 SABR 模型外，5 分钟 Delta 复制误差的标准差随着状态变量波动

率的增大而增大,这表明状态变量的波动程度对错误模型下的 Delta 复制策略有明显的影响。但参数复制策略波动率的敏感性并不明显,这在某种程度上反映了参数复制策略对未捕捉到的状态变量的敏感要小一些。SABR 模型的表现两种复制策略下所呈现出的异于其他模型的行为可能是来源于 SABR 模型与随机波动率跳跃模型的差异较大,导致其拟合效果出现明显偏误。而 BS 模型与局部波动率模型虽然拟合效果也不好,但其只有一个被复制参数,因此具有较好的稳定性。Heston-Nandi 模型的参数个数与 SABR 模型相同,但其过程更加接近随机波动率跳跃模型,因此它的效果也较为稳定。

(五) 跳跃频率的变化对不同复制策略复制误差的影响

除了波动率代表了状态变量的变化程度外,跳跃频率的不同也将影响复制误差的变化相关的统计数据见下表:

[表 8 插入于此](#)

在跳跃频率不同的情况下,Delta 复制策略和参数复制策略的复制误差都呈现出比较混乱的统计规律,即使是在其他情况下表现相对稳定的 BS 模型也不例外;这表明跳跃频率的变化对连续扩散过程的近似模型的复制误差是非常重要的。这类扩散过程无法捕捉住跳跃因子,这导致复制的结果很不稳定。补偿泊松过程跳跃频率的变化将导致模拟的漂移产生变化,并且将使得出现跳跃的概率加大,造成连续扩散模型复制的参数和标的变化都更加不稳定。

(六) 不同模型与复制策略复制误差的路径

以上结果都为期权到期时候的复制误差,它直接关系到交易员在期权到期时候的损益,所以尤其重要。但是基于流动性的考虑,交易员有可能在存续期内就将持有的头寸平仓,因此复制误差在存续期内是否稳定也必须作为衡量模型好坏的因素之一。下面将给出模拟的一条路径²²下,两种复制策略的累积复制误差在存续期内的均值和方差:

[表 9 插入于此](#)

[图 5、图 6、图 7、图 8 插入于此](#)

由表 8 中的数据,以及图 5 到图 8 可以发现,BS 模型的参数复制策略,在存续期内的表现要远远好于其他模型;局部波动率的参数复制策略的波动率其次。Delta 复制策略虽然不如 BS 模型和局部波动率的参数复制策略,但是却比参数复制策略整体要稳健。Heston-Nandi 参数复制策略在均值上表现出和其他模型的差异,这由图 7 也可以得出,它在开始的时候就存在一个较大的正复制误差,造成这个误差原因很有可能是因为 Heston-Nandi 模型下的近似解析解系统性的偏误。而 SABR 模型的参数复制策略的表现是最差的,它极为不稳定,存续期内的复制误差达到 10 以上。这种现象主要是因为之前描述的参数敏感度的细小变动造成了复制参数策略系数的严重不稳定。需要说明的是,此处的结论仅针对普通期权成立。由于普通的欧式看涨期权的回报函数中不包含其它状态变量,因此 BS 模型的简洁导致复制误差的稳定性。但对于一个回报函数中含有其他状态变量的衍生品,该结论就未必成立,如高阶矩衍生品等。在遇到此类复杂衍生品时,交易员可以用本文的方法对特定的衍生品检验模型风险以及复制误差的特征。

五 结论

首先,本文指出在真实交易中交易员所使用的模型本质上是一个参数服从未知随机过程的模型。其次,描述了参数复制策略的合理性和缺陷,并且对比了参数复制策略和传统的 Delta 复制策略在不同环境和冲击中的稳定性。最后,通过控制模拟的真实模型的参数来检验不同近似模型在不同环境和冲击中的模型风险,这样的方法可以被推广到其他的模型风险

的研究中，能够很好的和衍生品交易员在实际中的交易相结合。

本文的结论证明参数复制策略能够在一定程度上削减模型错误的风险，但它的缺点在于本身较为不稳定，尤其是当需要复制的参数个数很多而需要引进其他包含多种风险的衍生工具时。Delta 复制策略由于只关注标的资产，并不考虑参数的变化，因此会明显的随着状态变量的变化而变化，比较容易受到模型未捕捉到的状态变量变化的影响。值得一提的是本文中 SABR 模型的拟合效果不好，只能说明 SABR 对随机波动率跳跃模型拟合的效果不好，但在现实中其拟合效果必须用现实数据来判断。

另外本文的研究表明，在衍生品市场上，交易员不仅仅要能够时刻更新自己模型的参数并进行复制，还必须在事前就对市场的状态变量有一定预测。从而使初始卖价能够尽量包含对复制误差预测的信息。在复制衍生品的过程中，交易员必须尽量选择简单并且只含有单一风险因素的产品来复制衍生品。使用风险中性定价并且不断的改进模型的复杂程度和拟合效果的做法并不一定能够获得更好的复制效果。

由于衍生产品解析解的限制，本文仅将简单的欧式看涨期权作为被复制产品，这是本文的最大缺陷。因为奇异期权的价值对于参数的变动更加敏感，所以本文的研究方法用在奇异期权上的研究将更有价值。另外，本文也仅考虑了扩散模型在不完全市场下的表现。跳跃频率差异的模拟结果证明扩散过程的确对未能捕捉到的跳跃十分敏感，因此假设近似模型本身为不完全市场模型，研究真实模型未知时，包含跳跃因子的近似模型的复制策略和复制误差的研究是十分必要的。未来这方面的研究可以更加贴近市场，在市场数据和模拟数据两者相结合的基础上分析不完全市场的近似模型在奇异期权的定价和复制上的模型风险。

参考文献

- [1] Bakshi, G., C. Cao, & Z. Chen, (1997) Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models. *The Journal of Finance-NEW YORK-*, 52, 2003-2050.
- [2] Bates, D. S. (1996) Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options. *Review of Financial Studies*, 69-107.
- [3] Buhler, H., Der Naturwissenschaften, D. & Der Wissenschaftlichen Aussprache, T. (2005) Volatility Markets Consistent modeling, hedging and practical implementation. *TU Berlin, PhD thesis, to be submitted.*
- [4] Cont, R. & Tankov (2004) *Financial modeling with Jump process*, A CRC Press Company.
- [5] Detlefsen, K. & Hardle, W. K. (2007) Calibration Risk for Exotic Options. *Journal of Derivatives*, 14, 47.
- [6] Dupire, B. (1994) Pricing with a smile. *Risk*, 7, 18-20.
- [7] Green, T. C. & Figlewski, S. (1999) Market Risk and Model Risk for a Financial Institution Writing Options. *The Journal of Finance*, 54, 1465-1499.
- [8] Hagan, P. S., Kumar, D., Lesniewski, A. S. & Woodward, D. E. (2002) Managing smile risk. *Wilmott Magazine*, 1, 84-108.
- [9] He, C., Kenndy, J., Coleman, T., Forsyth, P., Li, Y. & Vetal, K. (2006) Calibration and hedging under jump diffusion. *Review of Derivatives Research*, 9, 1-35.
- [10] Heston, S. L. & Nandi, S. (2000) A closed-form GARCH option valuation model. *Review of Financial Studies*, 13, 585-625.
- [11] Hull, J. & Suo, W. (2002) A methodology for assessing model risk and its application to the implied volatility function model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 297-318.
- [12] Li, A. (1999) Model Calibration, Risk Measurement, and the Hedging of Derivatives. *working paper.*
- [13] Longstaff, F. A., Santa-Clara, P. & Schwartz, E. S. (2001) Throwing away a billion dollars: the cost of suboptimal exercise strategies in the swaptions market. *Journal of Financial Economics*, 62, 39-66.
- [14] Lord, R., Koekkoek, R., Dijk, D. V. & (2008) A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models
- [15] Schoutens, W., Simons, E. & Tistaert, J. (2005) Model risk for exotic and moment derivatives. *Exotic Option Pricing and Advanced Levy Models*, 67-98.

脚注

¹重复校准和比较复制误差的方法在 Bakshi et al.(1997), Hull and Suo(2002)以及 Longstaff et al.(2001)等学者的文章都已经被用到。

²为了方便推导和模拟本文假设市场不存在交易成本。

³K 可以是一个函数形式的回报。

⁴ $HC_t^{M_i}$ 表示 t_0 到 t 时刻的现金流在 t 时刻的终值，本文第三部分给出了具体的公式。

⁵此处的复制误差项代表复制误差贴现到 t_0 时刻的价值，若无特别说明下面提到的复制误差都为贴现值。

⁶以 BS 模型为例，作为定价参数的隐含波动率要时刻保持与市场上同标的并且流动性好的衍生品的隐含波动率一致。

⁷实际上对于某些复杂的产品来说 σ_t 未必和产品价格一一对应，但是在做参数校准时，我们实际上假设了模型的参数对于衍生品价格有唯一的最优参数，否则校准是没有意义的。

⁸在(10)中即状态向量 ∇X_s 的过程。

⁹在(10)中即 $\frac{\partial \sigma_s}{\partial s}$ 和 $\sigma_t(X(t))$ 的具体形式。

¹⁰下文称仅以标的为复制工具的复制方法为 Delta 复制策略，而把对冲参数一阶敏感性的方法称为参数复制策略。

¹¹如进行 Gamma 对冲，参数对冲的策略或者不断缩小对冲交易的时间间隔。

¹²比如随机波动率的风险价格和标的有相关性。

¹³ Delta 误差本身是不确定的，因为我们无法知道某个模型的 Delta 策略是不是高于或低于真实模型的 Delta 策略。

¹⁴经模拟检验，若加入 Gamma 和参数的二阶项加入待解方程时，累积复制误差经常呈现扩散的现象。

¹⁵假设随机波动率跳跃模型为真实模型的原因在于，其可以较好的拟合市场数据 (Bakshi et al.(1997))。

¹⁶其后所有的复制误差都为相对复制误差，即由复制误差的绝对数值除以初始价格所得到的。

¹⁷绝对模型风险在实际中真实过程不知道的情况下是无法得到的。

¹⁸由于本文定义的复制误差和交易员交易账户的盈亏一致，所以我们实际上考虑的状态变量如何通过模型风险来影响复制误差和复制误差的稳定性。

¹⁹本文的结果与 Bakshi, Cao, & Chen (1997) 的结果相对比可得出这样的结论。

²⁰尤其是当 $u=0.5$ 时，波动率仅为 0.25，而标准正态所产生的随机数超过 2 的概率很小；标的的变化有 $N(2)-N(-2)\approx 94.93\%$ 的可能随机变动没有确定性变动的影晌大。当 $u=0.2$ 时，这个概率大约为 57.62%。而漂移为 0.07 时，这个概率仅为 22.06%。因此可以看出这里 u 的变化将导致 Gamma 的影响增大。

²¹这种偏误会由于被复制产品的属性不同而不同，如复制看涨期权的空头，那么由真实测度的变化导致的偏误将使得复制者亏钱；而复制看跌期权的空头正好相反，将使得复制者赚钱。

²²为了图示能够清晰明了，本文只用了一条路径的模拟来说明存续期内的复制误差的问题。由于存续期内已经包含了很多的随机值，而每次复制误差实际上只受到复制间隔中随机数的影响，所以结论是可信的。

表格

表 1 参数复制策略的复制误差 (50 次模拟)

50 个交易日复制频率 (日)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.168058	0.283325	0.261367	0.424474
中值	0.163668	0.243657	0.170441	0.308091
最大值	0.481532	0.652462	0.698651	1.567564
最小值	-0.079713	-0.06283	-0.1683	-0.08481
标准差	0.123081	0.216563	0.260689	0.445558
100 个交易日复制频率 (日)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.063178	0.192296	0.173524	0.532937
中值	0.065828	0.169121	0.16081	0.348411
最大值	0.274106	0.657218	0.587133	2.70926
最小值	-0.210006	-0.29586	-0.24215	-0.14108
标准差	0.096291	0.22066	0.215619	0.60478
150 个交易日复制频率 (日)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.028276	0.121282	0.079783	0.113466
中值	0.003308	0.076354	0.024999	0.027885
最大值	0.290367	0.638407	0.466079	2.020886
最小值	-0.319477	-0.15331	-0.32985	-0.81937
标准差	0.138718	0.206134	0.172461	0.39709
50 个交易日复制频率 (5 分钟)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.140132	0.25082	0.160555	0.319948
中值	0.162351	0.219787	0.084762	0.155337
最大值	0.332789	0.614799	0.638517	1.454434
最小值	-0.059257	-0.09612	-0.27394	-0.102
标准差	0.101975	0.218014	0.249908	0.406533
100 个交易日复制频率 (5 分钟)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.053952	0.185866	0.135561	0.354688
中值	0.068671	0.141096	0.152805	0.222927
最大值	0.219781	0.660919	0.58621	1.612036
最小值	-0.108549	-0.16198	-0.28568	-0.09154
标准差	0.083058	0.216121	0.207072	0.437698
150 个交易日复制频率 5 分钟)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.027503	0.12098	0.102417	0.057846
中值	0.005121	0.069933	0.032989	0.01473
最大值	0.255372	0.636726	0.488055	0.633536
最小值	-0.213219	-0.17079	-0.2446	-1.02543
标准差	0.134285	0.212804	0.179287	0.301297

表 2 Delta 复制策略的复制误差 (50 次模拟)

50 个交易日复制频率 (日)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.214632	0.17481	0.178362	0.271931
中值	0.229752	0.202252	0.243538	0.260293
最大值	0.546208	0.536226	0.582948	0.613902
最小值	-0.05603	-0.19815	-0.4224	-0.06351
标准差	0.143816	0.187585	0.268928	0.163936
100 个交易日复制频率 (日)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.084995	0.085986	0.056573	0.22859
中值	0.120216	0.145498	0.137842	0.208431
最大值	0.339708	0.408999	0.428598	0.671552
最小值	-0.2284	-0.57721	-0.68943	-0.65715
标准差	0.14655	0.243591	0.283597	0.281418
150 个交易日复制频率 (日)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.015032	0.011359	0.033988	0.098378
中值	0.012731	-0.00949	0.114066	0.047179
最大值	0.309901	0.42913	0.466014	0.623786
最小值	-0.44441	-0.56328	-0.68175	-0.39968
标准差	0.170863	0.224742	0.273201	0.260655
50 个交易日复制频率 (5 分钟)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.185311	0.137898	0.127019	0.236962
中值	0.185272	0.158209	0.16869	0.220847
最大值	0.399171	0.433736	0.490267	0.557869
最小值	-0.01898	-0.28484	-0.54024	-0.15493
标准差	0.0946	0.156094	0.246774	0.166328
100 个交易日复制频率 (5 分钟)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.079172	0.079626	0.04982	0.195521
中值	0.101685	0.095462	0.119473	0.182651
最大值	0.316252	0.40325	0.434558	0.71055
最小值	-0.19598	-0.39474	-0.51987	-0.38591
标准差	0.12732	0.22999	0.268999	0.293952
150 个交易日复制频率 5 分钟)	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
均值	0.018404	0.015789	0.028135	0.078745
中值	0.015563	0.005046	0.104996	0.041516
最大值	0.322344	0.448103	0.483756	0.650196
最小值	-0.34098	-0.39337	-0.61061	-0.43768
标准差	0.155026	0.217093	0.272578	0.273786

表 3 复制工具及其期限

Call1	Call2	Put1	Put2
-------	-------	------	------

复制组合 1	0.3	0.45	0.35	0.55
复制组合 2	0.5	0.8	0.7	1
复制组合 3	1	1.2	1.1	1.5

表 4 复制误差均值

使用模型	组合 1	组合 2	组合 3	Delta 复制策略
BS 模型	0.161735126	0.225972	0.259531	0.2098168
局部波动率模型	0.256278166	0.266254	0.163705	0.1508348
Heston-Nandi 模型	0.258054109	0.930457	57.26013	0.1603299
SABR 模型	0.421962647	0.661458	1.975343	0.2528109

表 5 复制误差标准差

使用模型	组合 1	组合 2	组合 3	Delta 复制策略
BS 模型	0.117177	0.161795	0.176207	0.170933
局部波动率模型	0.214634	0.204965	0.161702	0.196987
Heston-Nandi 模型	0.241985	0.895319	71.85336	0.275382
SABR 模型	0.495091	0.600607	2.54377	0.183322

表 6 现实测度改变对复制的影响（期限 50 天，模拟 20 条路径）

5 分钟参数复制策略				
u=0.02=r	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.117195	0.107644	0.051943	0.206689
误差标准差	0.060689	0.055813	0.048165	0.316914
u=0.2	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.10794	0.099356	0.043375	0.155183
误差标准差	0.065551	0.05879	0.052794	0.259393
u=0.5	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.174238	0.265094	0.047737	0.086918
误差标准差	0.116607	0.141831	0.121439	0.147966
5 分钟 Delta 复制策略策略				
u=0.02=r	GBM	local	Henton nandi	SABR
误差均值	0.184087	0.133136	0.140969	0.229727
误差标准差	0.086182	0.076308	0.083501	0.222092
u=0.2	GBM	local	Heston -Nandi	SABR
误差均值	0.173249	0.123832	0.128403	0.190042
误差标准差	0.087416	0.074752	0.080928	0.212525
u=0.5	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.168564	0.122233	0.085452	0.139519
误差标准差	0.126944	0.136932	0.181509	0.143135

表 7 状态变量波动率改变对复制的影响（期限 50 天，模拟 20 条路径）

5 分钟参数敏感度复制策略				
---------------	--	--	--	--

omega=0.15	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.116883	0.097815	0.057109	0.308444
误差标准差	0.052784	0.06165	0.067748	0.616884
omega=0.25	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.116552	0.115958	0.05058	0.097359
误差标准差	0.063052	0.056895	0.047624	0.567767
omega=0.5	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.114312	0.116746	0.051655	0.420685
误差标准差	0.081652	0.069754	0.065743	1.404744
5 分钟 Delta 复制策略				
omega=0.15	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.190608	0.13301	0.146358	0.230074
误差标准差	0.073998	0.059404	0.081871	0.238469
omega=0.25	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.177909	0.136381	0.145605	0.212668
误差标准差	0.090151	0.077412	0.090967	0.178326
omega=0.5	GBM	Local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.176016	0.140835	0.136155	0.145327
误差标准差	0.123148	0.114868	0.144601	0.143101

表 8 跳跃频率的改变对复制的影响（期限 50 天，模拟 20 条路径）

5 分钟参数复制策略				
lamda=0.5	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.012638	0.084632	0.089465	0.960344
误差标准差	0.0541212	0.0720403	0.0941997	0.2970355
lamda=1	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.024191	0.095053	0.088959	1.317418
误差标准差	0.0481126	0.0796764	0.1000948	0.6470987
lamda=2	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	-0.01645	0.123871	0.156948	0.557539
误差标准差	0.3957291	0.4611751	0.1785661	0.4809102
5 分钟 Delta 复制策略				
lamda=0.5	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.05294	0.150416	0.209856	0.794473
误差标准差	0.082377	0.103628	0.137896	0.339779
lamda=1	GBM	local	Heston-Nandi	SABR
误差均值	0.067074	0.165481	0.20343	0.701275
误差标准差	0.076618	0.117742	0.152605	0.415254
lamda=2	GBM	local	Heston-Nandi	SABR

误差均值	0.090906	0.488653	0.112914	0.382744
误差标准差	0.176322	0.679532	0.156196	0.357501

表 9 存续期内不同模型复制误差的均值方差

模型	参数复制策略		Delta 复制策略	
	误差均值	误差方差	误差均值	误差方差
GBM	0.002	4.49E-05	-0.0112	0.0013
local	0.0161	6.33E-04	-0.0486	0.0085
Heston-Nandi	0.4354	0.0165	-0.0746	0.0226
SABR	0.3789	0.9539	-0.0487	0.0085

图

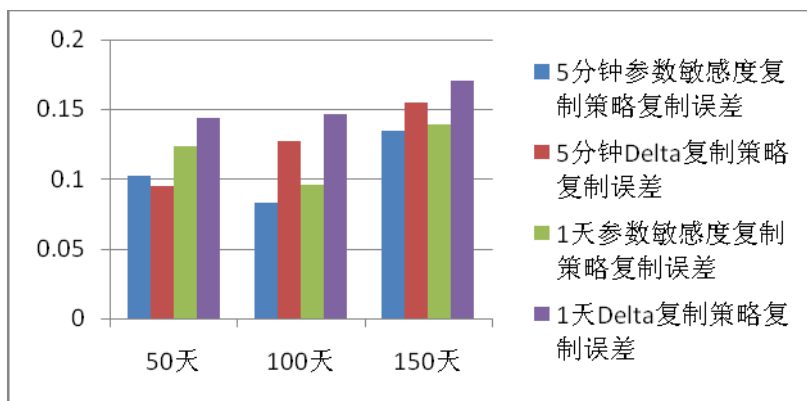


图 1:BS 模型参数敏感度复制与 Delta 复制策略标准差

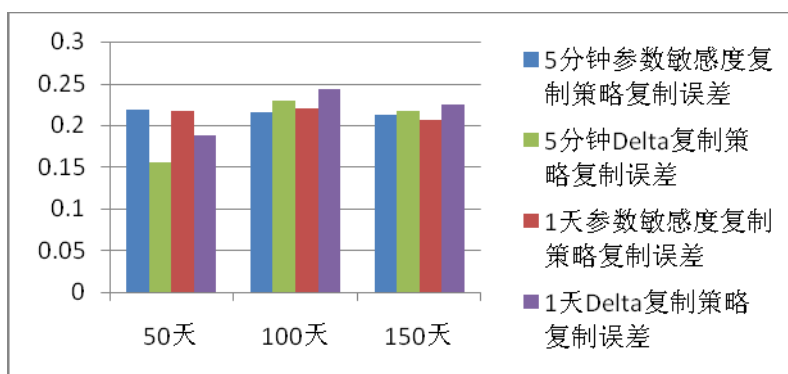


图 2:局部波动率模型参数复制策略与 Delta 复制策略标准差

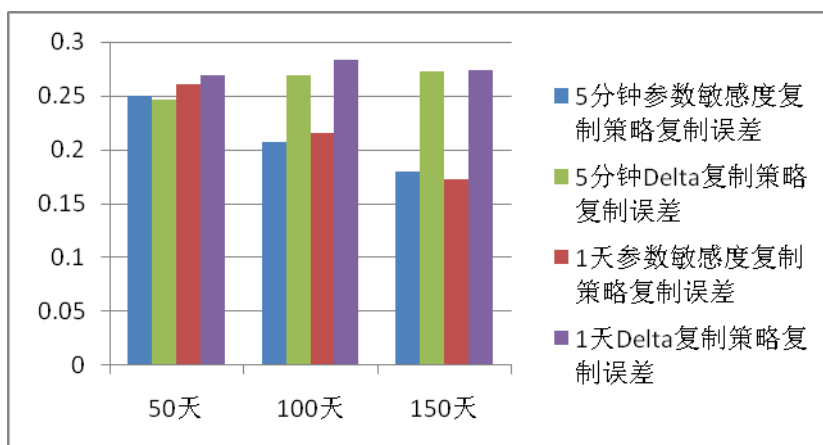


图 3:Heston-Nandi 模型参数复制策略与 Delta 复制策略标准差

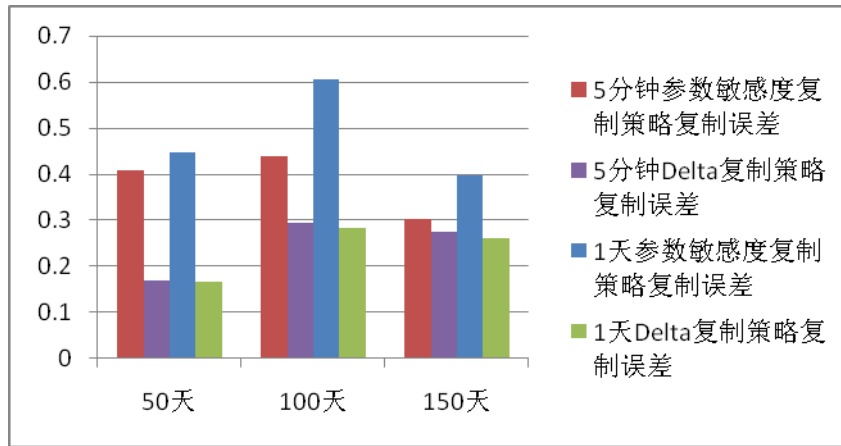


图 4: SABR 模型参数复制策略与 Delta 复制策略标准差

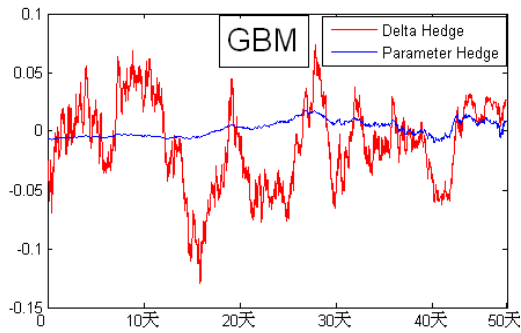


图 5 BS 模型复制误差的路径

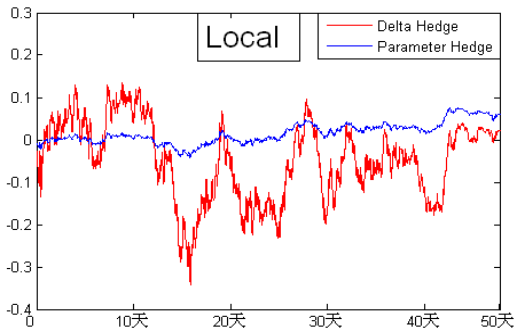


图 6 局部波动率模型复制误差的路径

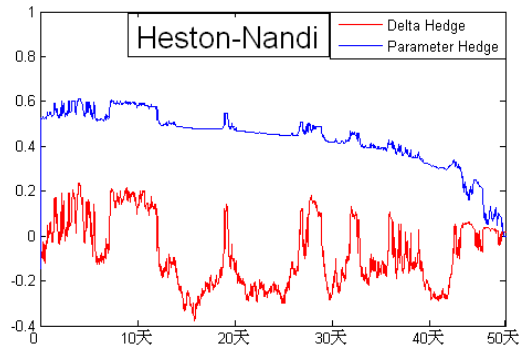


图 7 Heston-Nandi 模型复制误差的路径

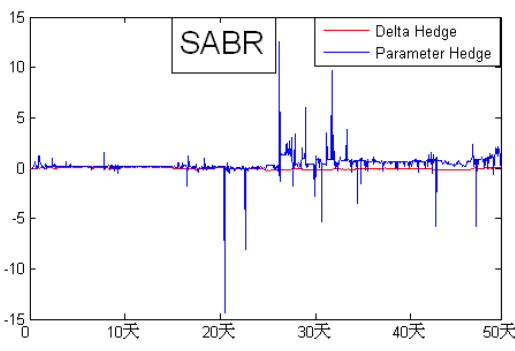


图 8 SABR 模型复制误差的路径