基于效用无差异定价理论的非流通资产折价研究[1]

Discount of Illiquid Asset Value under Utility Indifference Pricing Framework

林海　郑振龙

（厦门大学经济学院金融系，厦门大学王亚南经济研究院）

作者简介：林海，男，1977 年 10 月出生，汉族，福建连江人，金融学博士，厦门大学金融系和王亚南经济研究院讲师，美国康乃尔大学经济系访问学者，新加坡管理大学访问教授和访问研究员，研究方向为资产定价、金融工程和风险管理，在 Journal of Financial Markets,《经济学季刊》、《金融研究》、《世界经济》等国内外刊物发表论文近 30 篇，出版一本专著，改编一本教材，为 Journal of Business and Economics Statistics (JBES), Journal of Banking and Finance (JBF),《经济学季刊》等担任匿名审稿人。通讯地址：厦门大学金融系,厦门, 361005。联系电话：0592-2186976;13306026846。电子信箱：cfc@xmu.edu.cn。

郑振龙，男，1966 年 3 月出生，福建平潭人，金融学博士，厦门大学金融系和王亚南经济研究院教授，美国加州大学洛杉矶分校富布莱特学者，英国伦敦经济学院高级研究学者，厦门大学王亚南经济研究院副院长，在《金融研究》、《管理科学学报》、《世界经济》等重要学术刊物上发表 100 多篇论文，研究方向为资产定价、金融工程和风险管理。联系地址：厦门大学金融系，361005；联系电话：0592-2186633，13906038903；电子信箱：zlzheng@xmu.edu.cn。个人主页：http://efinance.nease.net.

内容提要：本文利用马尔科夫决策过程的随机动态规划原理，在三资产的模型框架下，分析了存在卖空限制条件下非流通资产相对于可流通资产的折价问题。研究结果表明，只有在市场存在卖空限制时，非流通资产才会折价。其折价的比例和非流通资产占总财富的比例、非流通限制的期限、投资者的风险厌恶程度有关。本文的分析框架可以运用于对中国非流通股的定价。

关键词：非流通资产、定价、卖空限制

JEL 分类号：G12

Abstract: This paper applies the Stochastic Dynamic Programming theory of Markov Decision Process (MDP) to study the discount of illiquid stocks under short sale constraints within a three asset framework. The pricing results show that the illiquid stocks are only discounted when there are short sale constraints. The discount ratios are related with the fraction of illiquid wealth, restricted terms and the risk aversion degree. The framework of this paper on illiquid stock can be applied to price the illiquid equities in China.

Key Words: Illiquid Asset, Discount, Short Sale Constraint;

JEL Classification: G12

[1]感谢教育部新世纪优秀人才支持计划和厦门大学王亚南经济研究院 2005 年科研资助计划的资助。当然，文责自负。本文获首届中国管理学年会金融学领域唯一的最佳论文奖。

基于效用无差异定价理论的非流通资产折价研究

1．引言

非流通条件下的资产配置和定价问题也是近年来金融领域研究的一个重要问题，其主要原因是要在更大的范围内考虑资产配置问题，如考虑房地产、人力资本以及一些受到法律限制在一定时期内不能流通的资产[1]等。这些资产有两个重要特征：一是不能流动，在市场上交易受到很大的限制；二是初始禀赋很难进行调整，其组合选择只能在这给定的条件下进行。

Longstaff (2001) 在一个两资产模型框架下分析了非流通资产对投资组合的影响，其中一个资产是风险资产，另一个资产为无风险资产。风险资产的流动性限制会对投资者的投资组合发生显著的影响，风险资产的价值也会相应降低。Chen & Xiong (2001) 从公司财务的角度对影响中国非流通股折价的因素进行了分析。他们发现相对于流通股，非流通股的交易价格折价幅度高达 80%。但是因为中国的非流通股买卖存在内幕交易成分，所使用的非流通股的交易价格数据并不能真正代表非流通股的市场价格。

Kahl, Liu & Longstaff (2003) 在一个三资产模型 (无风险资产、市场组合和非流通资产) 框架中分析了流动性限制对资产配置的影响。研究结果表明，流动性限制对资产价值有很大的影响。当非流动性限制期限为 2 年，非流通资产财富占总财富 70%的时候，非流通条件下资产的价值只有流通条件下资产价值的 80%左右。但是他们并没有考虑卖空限制对投资组合的影响。林海和郑振龙 (2006) 在 Kahl, Liu & Longstaff (2003)的框架下引入了卖空限制，定价结果表明，市场是否存在卖空机制，其非流通资产的价值会有很大的差异。当卖空受到限制时，其非流通资产的折价比例要高于允许卖空条件下的折价比例。

Longstaff (2005) 研究了存在流动性限制情况下的两资产一般均衡定价。在这一般均衡模型中，存在两个异质的投资者，他们的时间贴现因子不同。为了实现各自的效用最大化，他们会进行交易。市场上存在两种资产，一种是可流通资产，另一种是非流通资产；两种资产的红利遵循同样的过程，而且当前的红利水平也一样 (这意味着如果两种资产都是可流通资产，它们的价格必然相等)。定价结果表明，即使两种资产的红利特征完全相同，可流通资产价格超过非流通资产价格的幅度高达 25%。此外，还有 Mayers (1973, 1976), Longstaff (1995), Schwartz & Tebaldi (2004) 等都对非流通资产的定价和资产配置问题进行了理论研究。Cuoco (1997) 研究了存在买卖限制下的消费和资产定价问题。这些分析基本上都立足于连续时间金融的分析框架。在离散时间分析框架方面，则有 Miller (1974) 和 Chamberlain & Wilson (2000) 对不确定环境下最优消费行为的研究。

本文则是对 Kahl, Liu & Longstaff (2003) 和林海、郑振龙 (2006) 的进一步拓展。Kahl, Liu & Longstaff (2003)，林海和郑振龙 (2006) 均假设一个风险资产为市场组合，因此在不存在流动性限制的条件下，投资者另一个风险资产的最优投资比例一定等于 0，该模型就回归到一个两资产模型。这个假设最重要的缺陷在于没有考虑投资者自身构建市场组合的可能性，从而会对结果产生影响。为了考虑这种可能性，本文放弃其中一个资产为市场组合的假设，而代之以两个资产都是一般的风险资产，投资者通过投资于两个一般的风险资产来构造市场组合。可以发现，在这个假设条件下，当市场允许卖空时，非流通资产的折价比例为 0。只有在市场存在卖空限制时，非流通资产的折价比例才为正，而且其折价比例受到很多因素

[1] 如西方给经理人激励的股票期权。中国的非流通股也属于这个类型。

的影响，包括流动性限制期限，非流通资产的比例以及投资者的风险厌恶程度。

本文总共为 5 个部分。第一部分为引言，主要论述研究问题的意义以及对相关的文献进行回顾；第二部分提出我们所使用的模型；第三部分是根据模型进行模拟运算；第四部分进行定价分析；第五部分则是简短的结论。

2．模型

在这部分中，我们要分析投资者的部分财富为存在流动性限制资产条件下的消费投资组合选择问题，并将之同没有流动性限制条件下的消费投资组合进行比较。

（1）市场上存在一个代表性投资者，初始财富为W，其中可流通部分为W_1，非流通部分为W_2；

（2）投资者的效用函数为常相对风险厌恶系数效用函数（CRRA）：

$$U(C)=\begin{cases}\dfrac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma},C\geq 0\\ -\infty,C<0\end{cases}$$

其中γ为相对风险厌恶系数；

（3）市场上存在三种资产：无风险资产B_t，其收益率为常数r：

$$B_{t+\Delta t}=B_t\exp\left(r\Delta t\right)$$

两外两个资产为风险资产。风险资产 1 为全部流动的资产，其价格S_t服从一个几何布朗运动：

$$S_{t+\Delta t}=S_t\exp\left(y_{1t}(\Delta t)\right)$$

$$y_{1t}\left(\Delta t\right)=\left(r+\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_1$$

其中μ,σ分别代表该资产的风险溢酬和波动率，ε_1为一个标准正态分布随机变量。

风险资产 2 为非流通资产所对应的可流通资产。其价格P_t也服从一个几何布朗运动：

$$P_{t+\Delta t}=P_t\exp\left(y_{2t}(\Delta t)\right)$$

$$y_{2t}\left(\Delta t\right)=\left(r+\lambda-\frac{v^2}{2}\right)\Delta t+v\sqrt{\Delta t}\varepsilon_2$$

其中λ,v分别代表该资产的风险溢酬和波动率，ε_2为一个标准正态分布随机变量。ε_1，ε_2之间的相关系数为ρ。

（4）投资者通过一定的消费—投资组合策略实现一定时期 T 内的期望效用最大化。假设消费金额为C，两个风险资产的投资金额为X_1,X_2[1]，则投资者的目标函数为：

$$V\left(W_1,W_2\right)=\max_{\{C,X_1,X_2\}}E\left(\sum_{t=0}^{T-1}\exp\left(-\beta t\right)U\left(C_t\right)+\exp\left(-\beta T\right)U\left(W_{1T},W_{2T}\right)\right)$$

[1] 这意味着无风险资产的投资为$W_1-C-X_1-X_2$。

其中 β 为时间贴现因子。

（5）流动性限制期限 τ 不超过投资期限 T，$\tau \le T$ 。这意味着：

$$U\left(W_{1T}, W_{2T}\right) = U\left(W_{1T} + W_{2T}\right) = U\left(W_T\right)$$

（6）

$$U\left(W_T\right) = \begin{cases} \dfrac{W_T^{\ 1-\gamma}}{1-\gamma}, W_T \ge 0 \\ -\infty, W_T < 0 \end{cases}$$

可以看出，这是一个典型的贴现回报最大化问题 (Discounted Reward Maximization)，可以用马尔科夫决策过程 (Markov Decision Process, MDP) 的随机动态规划原理进行求解。这个马尔科夫决策过程的基本模型构造是：

(1) 决策时点 (Decision Epoch):

$$t = \left\{0, \Delta t, 2\Delta t, ..., n\Delta t\right\};$$

其中 $n\Delta t = T - 1$。

(2) 状态变量(State):

$$s_t = \left(W_{1,t}, W_{2,t}\right),$$

其动态方程为：

$$W_{1,t+\Delta t} = X_t \exp\left(y_{1t}\left(\Delta t\right)\right) + \left(W_{1,t} - C_t - X_{1t} - X_{2t}\right)\exp\left(r\Delta t\right) + X_{2t}\exp\left(y_{2t}\left(\Delta t\right)\right)$$

$$W_{2,t+\Delta t} = W_{2,t}\exp\left(y_{2t}\left(\Delta t\right)\right)$$

其中 $W_{1,t}, W_{2,t}$ 分别代表时刻 t 的流通资产财富和非流通资产财富水平。

(3) 决策集 (Action):

$$a_t = \left(C_t, X_{1t}, X_{2t}\right);$$

如果市场允许卖空，则 $X_{1t} \in [-\infty, \infty], X_{2t} \in \left[-\infty, \infty\right]$，$C_t \in \left(0, \infty\right)$；

如果市场上所有资产都不允许卖空[1]，则

$$X_{1t} \in \left[0, W_{1,t}\right], X_{2t} \in \left[0, W_{1,t}\right],\quad C_t \in \left(0, W_{1,t}\right),\quad C_t + X_{1t} + X_{2t} \le W_{1,t}$$

(4) 回报函数 (Reward Function):

$$R_t\left(s_t, a_t\right) = R_t\left(\left(W_{1,t}, W_{2,t}\right), \left(C_t, X_t\right)\right) = U\left(C_t\right),\quad t = 0, \Delta t, 2\Delta t, ..., n\Delta t;$$

$$R_T\left(W_{1,T}, W_{2T}\right) = U\left(W_{1,T} + W_{2,T}\right)$$

(5) 转移概率函数 (Transition Probability) $f\left(s_{t+\Delta t} \mid s_t, a_t\right)$:

[1] 中国就不允许卖空股票，同时在很长时间不允许银行资金进入股市。这种情况就是不允许卖空所有资产。

$$f\left(\left(W_{1t+\Delta t},W_{2t+\Delta t}\right)=\left(w_1,w_2\right)|\,s_t,a_t\right)=f\left(\left(W_{1,t+\Delta t},W_{2,t+\Delta t}\right)=\left(x,y\right)|\left(W_{1,t},W_{2,t}\right),\left(C_t,X_{1t},X_{2t}\right)\right)$$

$$=f\left(\varepsilon_1=\frac{\ln\left(w_1-D_t-\dfrac{X_{2t}w_2}{W_{2t}}\right)-E_t}{\sigma\sqrt{\Delta t}},\varepsilon_2=\frac{\ln\left(w_2\right)-\ln\left(W_{2,t}\right)-F_t}{v\sqrt{\Delta t}}\right)$$

其中 $f\left(\varepsilon_1=z_1,\varepsilon_2=z_2\right)$ 表示相关系数为 ρ 的联合标准正态分布密度函数。$D_t=\left(W_{1,t}-C_t-X_t-X_{2t}\right)\exp\left(r\Delta t\right)$，$E_t=\left(r+\mu-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$，$F_t=\left(r+\lambda-\dfrac{v^2}{2}\right)\Delta t$。

当W_2=0, 就可以得到在完全流动情况下的消费投资选择。为节省篇幅，我们就不再一一列出。

根据这个模型，我们可以得到如下推论：

推论 1：假设$\tilde{V}_t(W_{1t},W_{2t})$为可流通资产为$W_{1t}$、非流通资产为$W_{2t}$时的预期效用水平，$V_t\left(W_t\right)$为流通资产为$W_t$、没有非流通资产时的预期效用水平，则如果不存在卖空限制，则

$$\tilde{V}_t\left(W_{1t},W_{2t}\right)=V\left(W_{1t}+W_{2t}\right),\forall t\le\tau$$

引理 1：假设$a_t^*=\left(C_t^*,X_{1t}^*,X_{2t}^*\right)$是可流通资产为$W_t$、没有非流通资产时的最优消费－投资策略，$\tilde{a}_t^*=\left(\tilde{C}_t^*,\tilde{X}_{1t}^*,\tilde{X}_{2t}^*\right)$是流通资产为$W_{1t}$，非流通资产为$W_{2t}$时的最优消费－投资策略，$W_t=W_{1t}+W_{2t}$，则

$$\tilde{C}_t^*=C_t^*,\tilde{X}_{1t}^*=X_{1t}^*,\tilde{X}_{2t}^*=X_{2t}-W_{2t}$$

即投资者会根据其非流通资产的持有水平自动调整其对应股票的权重,其最优的消费－投资策略和全部流动情况下完全一致。

3．模拟运算

我们使用逆向归纳算法 (Backward Induction Algorithm) 对上述问题进行求解。在计算中，为了对资产价格的分布进行模拟，我们采用 Longstaff (2005) 的二叉树近似方法。即

$$S_{t+\Delta t}=S_t\exp\left(\left(r+\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t\pm\sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

$$P_{t+\Delta t}=P_t\exp\left((r+\lambda-\frac{v^2}{2})\Delta t\pm v\sqrt{\Delta t}\right)$$

并且

$$P\left(S_{t+\Delta t}=S_t\exp\left(\left(r+\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\right),P_{t+\Delta t}=P_t\exp\left((r+\lambda-\frac{v^2}{2})\Delta t+v\sqrt{\Delta t}\right)\right)$$
$$=P\left(S_{t+\Delta t}=S_t\exp\left(\left(r+\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}\right),P_{t+\Delta t}=P_t\exp\left((r+\lambda-\frac{v^2}{2})\Delta t-v\sqrt{\Delta t}\right)\right)$$
$$=(1+\rho)/4$$

$$P\left(S_{t+\Delta t}=S_t\exp\left(\left(r+\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\right),P_{t+\Delta t}=P_t\exp\left((r+\lambda-\frac{v^2}{2})\Delta t-v\sqrt{\Delta t}\right)\right)$$
$$=P\left(S_{t+\Delta t}=S_t\exp\left(\left(r+\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}\right),P_{t+\Delta t}=P_t\exp\left((r+\lambda-\frac{v^2}{2})\Delta t+v\sqrt{\Delta t}\right)\right)$$
$$=(1-\rho)/4$$

其中 P 表示概率。这样就可以保证两个过程的相关系数为 ρ 。另外， $\Delta t=1$ 。

模拟运算所采用的参数为：$W=1$，$r=5\%$，$\beta=5\%$，$\mu=8\%$，$\sigma=25\%$，$\lambda=10\%$，$v=30\%$， $\rho=0.5$， $T=8$。为了比较不同非流通资产财富持有水平、流动性限制期限以及风险厌恶水平对消费和投资决策的影响，我们分别计算 W_2 =0、0.3、0.5、0.7， τ =1、2、4， γ =2、4 条件下的消费以及投资组合选择。

表 1 列出了各种条件下的计算结果。从表中可以看出，引理 1 成立，在允许卖空条件下，资产的流动性限制对投资者的消费－投资决策没有产生任何的影响，投资者总是根据其非流通资产的持有头寸来调整其所对应股票的头寸，消费、另一个风险资产以及无风险资产的投资水平都保持不变。但是在不允许卖空的条件下，投资者无法通过卖空非流通资产所对应的股票来调整头寸，当非流通资产的比例超过其最优权重时，投资者在大部分情况下都选择零头寸的次优策略。但是当非流通限制期限比较长 ($\tau=3$)而且非流通资产比例很大时（W_2=70%），投资者投资于风险资产 2 的比例却大于 0。这主要是因为在这种极端情况下，投资者在考虑其流通资产配置的时候基本上不考虑非流通资产。可以看出，在各种情况下 $C+X_1+X_2<W_1$ (在没有非流通资产情况下是 W)，这说明投资者的一部分资产是以无风险资产的形式持有，此时投资者效用函数的无差异曲线相切于证券市场线的下方。这与林海、郑振龙 (2006) 在对数效用假设下所得出的结论刚好相反。从表 1 还可以看出，当投资者的风险厌恶水平上升时，其投资于风险资产的比例就会下降，而消费却没有发生变化。这表明，风险厌恶水平对投资者决策的影响主要体现在其投资组合上，而对消费的影响却很小。

表 1：流动性限制对消费－投资策略的影响

非流通财富 (W_2)					
(a) 允许卖空					
γ	τ	0	0.3	0.5	0.7
2	1		(0.14,0.35,0.03)	(0.14,0.35,-0.17)	(0.14,0.35,-0.37)
	2	(0.14,0.35,0.33)	(0.14,0.35,0.03)	(0.14,0.35,-0.17)	(0.14,0.35,-0.37)
	3		(0.14,0.35,0.03)	(0.14,0.35,-0.17)	(0.14,0.35,-0.37)

(b) 不允许所有资产卖空					
2	1	(0.14,0.35,0.33)	(0.14,0.35,0.03)	(0.14,0.25,0.00)	(0.14,0.14,0.00)
	2		(0.14,0.34,0.03)	(0.14,0.25,0.00)	(0.13,0.16,0.00)
	3		(0.14,0.34,0.04)	(0.14,0.24,0.00)	(0.10,0.09,0.05)
(a) 允许卖空					
4	1	(0.14,0.17,0.16)	(0.14,0.17,-0.14)	(0.14,0.17,-0.34)	(0.14,0.17,-0.54)
	2		(0.14,0.17,-0.14)	(0.14,0.17,-0.34)	(0.14,0.17,-0.54)
	3		(0.14,0.17,-0.14)	(0.14,0.17,-0.34)	(0.14,0.17,-0.54)
(b) 不允许所有资产卖空					
4	1	(0.14,0.17,0.16)	(0.14,0.09,0.00)	(0.14,0.01,0.00)	(0.13,0.00,0.00)
	2		(0.14,0.10,0.00)	(0.13,0.00,0.00)	(0.13,0.00,0.00)
	3		(0.14,0.11,0.00)	(0.13,0.03,0.00)	(0.10,0.05,0.02)

注：括号中的数值分别代表C , X_1和X_2 ,即代表初始时刻的消费,风险资产 1 和风险资产 2 的投资。模拟运算相关的参数设置为：$W=1$，$r=5\%$，$\beta=5\%$，$\mu=8\%$，$\lambda=10\%$ $\sigma=25\%$，$v=30\%$，ρ=0.5，T=8。W_2＝0 就是完全流动的情形。

4．非流通资产的折价

为了衡量流动性限制对资产价格的影响程度,我们可以通过不断降低完全流动情况下的初始可流通财富水平，直到投资者的期望效用水平与存在流动性限制时的期望效用水平相等，即降低到使$V\left(W^{'}\right)=V\left(W_1,W_2\right)$[1]。通过比较$W^{'}$和$W$之间的差异我们就可以分析流动性限制对资产价格的影响。

假设某个资产的流动性限制不会对其他资产价格产生影响，则我们有：

$$W^{'}=W_1+W_2\times\left(1-d\right)$$

其中d代表非流通资产相对于可流通资产的折价比例。经过整理，我们可以得到：

$$d=\frac{W^{'}-W_1}{W_2}$$

表 2 列出了各种条件下的计算结果。可以看出，当允许卖空时，非流通资产的折扣比例都为 0，这证实了本文的推论。所以流动性限制只有在市场存在卖空限制时才会有意义。当市场不允许卖空时，非流通资产价格的折扣比例随着非流通财富比例的增加、非流动期限的延长以及风险厌恶水平的上升而不断上升，最高的折价比例达到了 25.34%。

表 2：流动性限制对资产价格的影响

	非流通资产(W_2)

[1] 这种方法称为效用等价定价方法（Utility Indifference Pricing），具体的分析参见 Henderson and Hobson (2004).

γ	τ	(a) 允许卖空 (%)			(b) 不允许卖空 (%)		
		30%	50%	70%	30%	50%	70%
2	1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.45	1.45
	2	0.00	0.00	0.00	0.07	1.31	3.64
	3	0.00	0.00	0.00	0.41	2.80	11.76
4	1	0.00	0.00	0.00	0.99	3.37	5.89
	2	0.00	0.00	0.00	2.59	7.36	12.29
	3	0.00	0.00	0.00	3.39	10.97	25.34

注：数值表示各种条件下非流通资产相对于流通资产的折价幅度。模拟运算相关的参数设置为: $W=1$，$r=5\%$，$\beta=5\%$，$\mu=8\%$，$\lambda=10\%$，$\sigma=25\%$，$v=30\%$，ρ=0.5，T=8。

5．结论及今后研究方向

本文利用马尔科夫决策过程的随机动态规划原理，对 Kahl, Liu & Longstaff (2003) 以及林海、郑振龙(2006) 的模型进行了拓展，在考虑投资者自行构造市场组合的条件下引入卖空限制，分析了存在卖空限制条件下非流通资产的折价问题。定价结果表明，当市场允许卖空时，非流动性限制对投资者的消费－投资决策以及资产的价值没有影响。当市场不允许卖空时，流动性限制就会对资产价值产生比较大的影响。当市场不允许卖空时，非流通资产的折价比例为正，而且其折价比例受到很多因素的影响，包括流动性期限，非流通资产的比例以及投资者的风险厌恶程度。

本文对非流通资产的分析框架可以运用于对中国非流通股的定价。根据中国具体的市场环境，利用中国股票市场的实际数据对具体的非流通股进行准确定价，是今后研究的一个方向。另外，本文只考虑不允许卖空约束条件下的非流通资产折价问题，没有分析另外一种卖空的市场约束——交易成本。在一些成熟的资本市场上，卖空是允许的，但是有一定的交易成本[1]，如固定的交易成本 (Lo, Mamaysky & Wang (2004)) 和比例交易成本 (Vayanos (1998))。这些条件下非流通资产的折价问题，则是今后的另一个研究方向。

参考文献：

Chamberlain, G. and C. A. Wilson, 2000, “Optimal Intertemporal Consumption under Uncertainty”, Review of Economic Dynamics 3, 365-395.

Chen, Z. and P. Xiong, 2001, “Discounts on Illiquid Stocks: Evidence from China”, Working Paper, Yale University.

Cuoco, D., 1997, “Optimal Consumption and Equilibrium Prices with Portfolio Constraints and Stochastic Income”, Journal of Economic Theory 72, 33-73.

D.Avolio, G., 2002, "The Market for Borrowing Stock", Journal of Financial Economics 66, 271-306.

Henderson, V. and D. Hobson, 2004, "Utility Indifference Pricing--an Overview", to appear in Volume on Indifference Pricing (ed. R. Carmona), Princeton University Press.

[1] 如美国，与卖空相关的交易成本体现在“折扣率”（rebate rate）中。具体的介绍参见 D’Avolio (2002)。

Kahl, M., J. Liu and F. A. Longstaff, 2003, “Paper Millionaires: How Valuable is Stock to a Stockholder Who is Restricted from Selling It”, Journal of Financial Economics 67, 385-410.

Lo, A.W., H. Mamaysky and J. Wang, 2004, "Asset Prices and Trading Volume under Fixed Transaction Costs", Journal of Political Economy 112, 1054-1090.

Longstaff, F. A., 1995, “How Much Can Marketability Affect Security Values”, Journal of Finance 50, 1767-1774.

Longstaff, F. A., 2001, “Optimal Portfolio Choice and the Valuation of Illiquid Assets”, Review of Financial Studies 14, 407-431.

Longstaff, F. A., 2005, “Asset Pricing in Markets with Illiquid Assets”, Working Paper, University of California, Los Angeles.

Mayers, D., 1973, “Nonmarketable Assets and the Determination of Capital Asset Prices in the Absence of Riskless Asset”, Journal of Business 46, 258-267.

Mayers, D., 1976, “Nonmarketable Assets, Market Segmentation and the Level of Asset Prices”, Journal of Financial and Quantitative Analysis 11, 1-12.

Miller, B. L., 1974, “Optimal Consumption with a Stochastic Income Stream”, Econometrica 42, 253-266.

Schwartz, E. S. and C. Tebaldi, 2004, “Illiquid Asset and Optimal Portfolio Choices”, Working Paper, University of California, Los Angeles.

Vayanos, D., 1998, "Transaction Costs and Asset Prices: A Dynamic Equilibrium Model", Review of Financial Studies 11, 1-58.

林海、郑振龙，2006，“卖空限制下非流通资产的定价—基于消费投资选择理论的分析框架”，厦门大学工作论文。

附录：

推论 1 的证明：

（1）$t=\tau$，非流通限制到期，则

$$\tilde{V}_\tau\left(W_{1\tau},W_{2\tau}\right)=V\left(W_{1\tau}+W_{2\tau}\right)$$

推论在$t=\tau$时候成立。

（2）$t=\tau-1$，假设流通财富$W_t=W_{1t}+W_{2t}$，非流通财富为 0 的投资者的最优策略为

$$a_t^*=\left(C_t^*,X_{1t}^*,X_{2t}^*\right)$$

根据预算约束，其无风险资产的头寸X_{0t}^*为$X_{0t}^*=W_t-C_t^*-X_{1t}^*-X_{2t}^*$，

所以

$$V_t\left(W_t\right)=U\left(C_t^*\right)+\exp(-\beta)\int f\left(j\mid s_t,a_t^*\right)V_{t+1}\left(j\right)dj$$

其中

$$j=\left(W_t-C_t^*\right)\exp\left(r\right)+\sum_{j=1}^{2}X_{jt}^*\left(\exp\left(y_{jt}\right)-\exp\left(r\right)\right),\quad s_t=W_t$$

然后我们考虑流通财富为W_{1t}，非流通财富为W_{2t}的情形。很显然，

$$\tilde{V}_t\left(W_{1t},W_{2t}\right)\le V_t\left(W_t\right) \tag{1}$$

考虑策略$\tilde{a}_t^*=\left(\tilde{C}_t^*,\tilde{X}_{1t}^*,\tilde{X}_{2t}^*\right)$满足：$\tilde{C}_t^*=C_t^*$，$\tilde{X}_{1t}^*=X_{1t}^*$，$\tilde{X}_{2t}^*=X_{2t}-W_{2t}$。

根据预算约束，$\tilde{X}_{0t}^*=W_{1t}-\tilde{C}_t^*-\tilde{X}_{1t}^*-\tilde{X}_{2t}^*=X_{0t}^*$

该策略的预期效用为：

$$\tilde{v}_t\left(\tilde{a}_t^*\right)=U\left(C_t^*\right)+\exp(-\beta)\iint f'\left(j_1,j_2\mid\tilde{s}_t,\tilde{a}_t^*\right)\tilde{V}_{t+1}\left(j_1,j_2\right)dj_1dj_2$$

其中

$$j_1=j-W_{2t}\exp\left(y_{2t}\right),\quad j_2=W_{2t}\exp\left(y_{2t}\right),\quad \tilde{s}_t=\left(W_{1t},W_{2t}\right)$$

所以，$f'\left(j_1,j_2\mid\tilde{s}_t,\tilde{a}_t\right)=f\left(j=j_1+j_2\mid s_t,a_t^*\right)g\left(j_1,j-j_1\mid j\right)$，所以

$$\begin{aligned}
&\tilde{v}_t\left(\tilde{a}_t^*\right)\\
=\;&U\left(C_t^*\right)+\exp\left(-\beta\right)\int\int f'\left(\left(j_1,j_2\right)|\tilde{s}_t,\tilde{a}_t^*\right)\tilde{V}_{t+1}\left(j_1,j_2\right)dj_1dj_2\\
=\;&U\left(C_t^*\right)+\exp\left(-\beta\right)\int\int f\left(j=j_1+j_2|s_t,a_t^*\right)g\left(j_1,j-j_1|j\right)\tilde{V}_{t+1}\left(j_1,j-j_1\right)dj_1dj\\
=\;&U\left(C_t^*\right)+\exp\left(-\beta\right)\int f\left(j=j_1+j_2|s_t,a_t^*\right)\int g\left(j_1,j-j_1|j\right)V_{t+1}\left(j\right)dj_1dj\\
=\;&U\left(C_t^*\right)+\exp\left(-\beta\right)\int f\left(j|s_t,a_t^*\right)V_{t+1}\left(j\right)dj\\
=\;&V_t\left(W_t\right) \qquad (2)
\end{aligned}$$

联立 (1), (2) 可以的得到：$\tilde{v}_t^*\left(\tilde{a}_t^*\right)=\tilde{V}_t\left(W_{1t},W_{2t}\right)=V_t\left(W_t\right)$

（3） 如果$t=0$，停止叠代。否则令$t=t-1$，返回（2）。