卖空限制下非流通资产的定价[1]

Pricing of Illiquid Assets under Short Sale Constraints

林海　　郑振龙

厦门大学经济学院金融系、王亚南经济研究院

作者简介：

林海，男，1977 年 10 月出生，汉族，福建连江人，金融学博士，厦门大学金融系和王亚南经济研究院讲师，美国康乃尔大学经济系访问学者，新加坡管理大学访问教授和访问学者，研究方向为资产定价、金融工程和风险管理，在 Journal of Financial Markets、《经济学季刊》、《金融研究》、《世界经济》等国内外刊物发表论文近 30 篇，出版一本专著，改编一本教材，为 Journal of Business and Economics Statistics (JBES), Journal of Banking and Finance (JBF), 《经济学季刊》等担任匿名审稿人。通讯地址：厦门大学金融系，厦门， 361005。联系电话：0592-5914484;13306026846。电子信箱：cfc@xmu.edu.cn。

郑振龙，男，1966 年 3 月出生，福建平潭人，金融学博士，厦门大学金融系和王亚南经济研究院教授，美国加州大学洛杉矶分校富布莱特学者，英国伦敦经济学院高级研究学者，厦门大学王亚南经济研究院副院长，在《金融研究》、《管理科学学报》、《世界经济》等重要学术刊物上发表 100 多篇论文，研究方向为资产定价、金融工程和风险管理。联系地址：厦门大学金融系，361005；联系电话：0592－5920921，13906038903；电子信箱 zlzheng@xmu.edu.cn。个人主页：http://efinance.nease.net.

[1] 感谢与美国加州大学洛杉机分校 (UCLA) F. A. Longstaff 教授的讨论。感谢教育部新世纪优秀人才支持计划和厦门大学王亚南经济研究院 2005 年科研资助计划的资助。论文完成于合作者林海在美国康乃尔大学经济系，合作者郑振龙在英国伦敦经济学院（LSE）访问期间。当然，文责自负。

卖空限制下非流通资产的定价

Pricing of Illiquid Assets under Short Sale Constraints

内容提要：本文利用马尔科夫决策过程的随机动态规划原理，在 Kahl, Liu & Longstaff (2003) 的模型框架下引入卖空限制，分析了存在卖空限制条件下非流通资产的定价问题。定价结果表明，市场是否存在卖空机制，其非流通资产的价值会有很大的差异。当卖空受到限制时，其非流通资产的折价比例要高于允许卖空条件下的折价比例。本文对非流通资产的分析框架可以运用于对中国非流通股的定价。

关键词：非流通资产、资产定价、卖空限制

JEL 分类号：G12

Abstract: This paper applies the Stochastic Dynamic Programming theory of Markovian Decision Process (MDP) to price illiquid assets under short sale constraints following the framework of Kahl, Liu & Longstaff (2003). The pricing results show that prices of illiquid assets are different depending on whether there are short sale constraints in the market. If the short sale is constrained, the discount ratios of illiquid assets will be higher than those under no short sale constraint. The framework of this paper on illiquid asset can be applied to price the illiquid equities in China.

Key Words: Illiquid Asset, Asset Pricing, Short Sale Constraint;

JEL Classification: G12

1．引言

不流动条件下的资产配置和定价问题是近年来金融领域研究的一个重要问题，特别是在中国，它是股权分置改革计算“对价”的关键性理论问题。

Longstaff (2001) 在两资产（风险资产和无风险资产）模型框架下分析了非流通资产对投资组合的影响。风险资产的流动性限制会对投资者的投资组合发生显著的影响，风险资产的价值也会相应降低。Chen & Xiong (2001) 从公司财务的角度对影响中国国有非流通股折价的因素进行了分析。他们发现相对于流动股，国有非流通股的交易价格折价幅度高达 80%。Kahl, Liu & Longstaff (2003) 在一个三资产模型 (无风险资产，市场组合和非流通资产) 框架中分析了非流动性对资产配置的影响。研究结果表明，不流动对资产价值产生较大的影响。但是他们并没有考虑卖空限制对投资组合的影响。这与中国的情况不符，因此该模型不能直接运用于中国。

Longstaff (2005) 研究了不流动条件下存在两个异质投资者的两资产（流动性资产和非流通资产）一般均衡定价。定价结果表明，即使两种资产的红利特征完全相同，流动性资产价格超过非流通资产价格的幅度高达 25%。此外，还有 Mayers (1973, 1976), Longstaff (1995), Schwartz & Tebaldi (2004) 等都对非流通资产的定价和资产配置问题进行了理论研究。Cuoco (1997) 研究了存在买卖限制下的消费和资产定价问题。这些分析基本上都立足于连续时间金融的分析框架。在离散时间分析框架方面，则有 Miller (1974) 和 Chamberlain & Wilson

(2000) 对不确定环境下最优消费行为的研究。

本文则在 Kahl, Liu & Longstaff (2003) 的模型框架下引入卖空限制，研究存在卖空限制条件下非流通资产的定价问题。相对于 Kahl, Liu & Longstaff (2003)，本文的不同点和贡献之处在于：首先，Kahl, Liu & Longstaff (2003) 的模型假定可以卖空，这种假定不符合中国的情况，因此该模型在中国不能直接使用。而我们则引入了卖空限制，从而使模型更适合中国的情况；其次，Kahl, Liu & Longstaff (2003) 在连续时间金融的分析框架下进行分析，而我们则在离散时间的分析框架下利用马尔科夫决策过程 (Markov Decision Process, MDP) 的随机动态规划原理进行分析，这样就可以很容易考虑各种卖空限制对组合选择以及定价的影响，模型上更具有灵活性；第三，我们发现在允许卖空的条件下不流通对资产定价的影响要小于不允许卖空，因此也可以用这个模型来分析市场卖空机制对资产价格和投资决策所产生的影响。

本文总共为 5 个部分。第一部分为引言，主要论述研究问题的意义以及对相关的文献进行回顾；第二部分提出我们所使用的模型；第三部分是根据模型进行模拟运算；第四部分进行定价分析；第五部分则是简短的结论。

2．模型

在这部分中，我们要分析投资者部分财富为非流通资产条件下的消费投资组合选择问题，并将之同不存在非流通资产条件下的消费投资组合进行比较。模型遵从 Kahl, Liu & Longstaff (2003) 的假设，市场上存在三种资产：无风险资产 B_t，市场组合 M_t 以及非流通资产所对应的股票 S_t。为了能够更方便地引入卖空限制，我们用离散时间表示各种资产的动态过程。无风险资产 B_t 价格所服从的过程为：

$$B_{t+\Delta t} = B_t \exp(r\Delta t)$$

其中 r 代表常数无风险利率（连续复利）。

市场组合价格 M_t 服从一个对数正态分布：

$$M_{t+\Delta t} = M_t \exp\left((r+\mu-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_1 \right)$$

其中 μ，σ 分别代表市场组合的风险溢酬和波动率，ε_1 为一个标准正态分布随机变量。其连续复利收益率 y_{1t} 遵从的过程为：

$$y_{1t}\left(\Delta t\right) = (r+\mu-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_1$$

非流通资产所对应的股票的市场价格 S_t 服从一个对数正态分布：

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left((r+\lambda-\frac{v^2}{2})\Delta t + v\sqrt{\Delta t}\varepsilon_2 \right)$$

其中，λ，v 分别代表该股票的风险溢酬和波动率，ε_2 为一个标准正态分布随机变量。随机变量 ε_1，ε_2 的相关系数为 ρ。在 CAPM 条件下，$\lambda = \mu\rho v / \sigma$。同理，其连续复利收益率 y_{2t} 遵从的过程为

$$y_{2t}\left(\Delta t\right) = (r + \lambda - \frac{v^2}{2})\Delta t + v\sqrt{\Delta t}\varepsilon_2$$

2.1 存在非流通资产条件下的消费-投资组合选择

假设投资者初始财富为 W，其中流动性资产为 W_1，可以用于消费以及投资于无风险资产和市场组合。假设消费为 C，投资于市场组合的财富为 X，则投资于无风险资产的财富为 $W_1 - C - X$。非流通资产为 W_2，投资期限为 T。投资者的效用函数为对数效用，$U\left(C_t\right) = \ln\left(C_t\right)$。投资者的目标函数是：

$$V\left(W_1, W_2\right) = \max_{C,X} E\left(\sum_{t=0}^{T-1}\exp\left(-\beta t\right)U\left(C_t\right) + \exp\left(-\beta T\right)U\left(W_T\right)\right)$$

其中 β 为时间贴现因子，$U\left(C_t\right) = \ln\left(C_t\right)$，$U\left(W_T\right) = \ln\left(W_T\right)$。

可以看出，这是一个典型的贴现回报最大化问题 (Discounted Reward Maximization)，可以用马尔科夫决策过程 (Markov Decision Process, MDP) 的随机动态规划原理进行求解。这个马尔科夫决策过程的基本模型构造是：

(1) 决策时点 (Decision Epoch):

$$t = \left\{0, \Delta t, 2\Delta t, ..., n\Delta t\right\};$$

其中 $n\Delta t = T - 1$。

(2) 状态变量(State):

$$s_t = \left(W_{1,t}, W_{2,t}\right),$$

其动态方程为：

$$W_{1,t+\Delta t} = X_t \exp\left(y_{1t}\left(\Delta t\right)\right) + \left(W_{1,t} - C_t - X_t\right)\exp\left(r\Delta t\right)$$

$$W_{2,t+\Delta t} = W_{2,t}\exp\left(y_{2t}\left(\Delta t\right)\right)$$

其中 $W_{1,t}, W_{2,t}$ 分别代表时刻 t 的流动性资产财富和非流通资产财富水平。

(3) 决策集 (Action):

$$a_t = \left(C_t, X_t\right);$$

如果市场允许卖空，则 $X_t \in [-\infty, \infty]$，$C_t \in \left(0, \infty\right)$；

如果市场上股票资产 (市场组合) 不允许卖空，而无风险资产允许卖空 (借款)，则 $X_t \in [0,\infty], C_t \in (0,\infty)$;

如果市场上所有资产都不允许卖空[2]，则

$$X_t \in \left[0, W_{1,t}\right],\ C_t \in \left(0, W_{1,t}\right),\ C_t + X_t \le W_{1,t}$$

(4) 回报函数 (Reward Function)：

$$R_t\left(s_t, a_t\right) = R_t\left(\left(W_{1,t}, W_{2,t}\right), \left(C_t, X_t\right)\right) = \ln\left(C_t\right),\ t = 0, \Delta t, 2\Delta t, ..., n\Delta t;$$

$$R_T\left(W_{1,T}, W_{2T}\right) = \ln\left(W_{1,T} + W_{2,T}\right)$$

(5) 转移概率函数 (Transition Probability):

$$f\left(j = (x, y) \mid s_t, a_t\right) = f\left(\left(W_{1,t+\Delta t}, W_{2,t+\Delta t}\right) = (x, y) \mid \left(W_{1,t}, W_{2,t}\right), \left(C_t, X_t\right)\right)$$

$$= f\left(\varepsilon_1 = \frac{\ln\left(x - A_t\right) - \ln\left(X_t\right) - B_t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \varepsilon_2 = \frac{\ln(y) - \ln\left(W_{2,t}\right) - C_t}{v\sqrt{\Delta t}}\right)$$

其中 $f\left(\varepsilon_1 = z_1, \varepsilon_2 = z_2\right)$ 表示相关系数为 ρ 的联合标准正态分布密度函数。

$$A_t = \left(W_{1,t} - C_t - X_t\right)\exp\left(r\Delta t\right),\ B_t = \left(r + \mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t,\ C_t = \left(r + \lambda - \frac{v^2}{2}\right)\Delta t。$$

2.2 不存在非流通资产条件下的消费-投资组合选择

根据两基金分离定理，在均衡条件下，投资者只需要选择无风险资产和市场组合就可以实现最优配置。也就是说，在均衡条件下，投资者持有各种风险资产的数量等于该资产在市场组合中所占的权重。因此，虽然市场上有三种资产（无风险资产、市场组合和任一流动性资产），但在均衡条件下，投资者额外持有该流动性资产的比重一定等于 0。这样，我们让上述公式中的 $W_2=0$, 就可以得到在完全流动情况下的消费投资选择。为节省篇幅，我们就不再一一列出。

3．模拟运算

我们使用逆向归纳算法 (Backward Induction Algorithm) 对上述问题进行求解[3]。在计算中，为了对资产价格的分布进行模拟，我们采用 Longstaff (2005) 的二叉树近似方法。即

$$M_{t+\Delta t} = M_t \exp\left(\left(r + \mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t \pm \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left((r + \lambda - \frac{v^2}{2})\Delta t \pm v\sqrt{\Delta t}\right)$$

并且

[2] 中国就不允许卖空股票，同时在很长时间不允许银行资金进入股市。这种情况就是不允许卖空所有资产。
[3] 具体的算法参见附录。

$$
\begin{aligned}
&P\left(M_{t+\Delta t}=M_t\exp\left(\left(r+\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\right), S_{t+\Delta t}=S_t\exp\left((r+\lambda-\frac{v^2}{2})\Delta t+v\sqrt{\Delta t}\right)\right)\\
&=P\left(M_{t+\Delta t}=M_t\exp\left(\left(r+\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}\right), S_{t+\Delta t}=S_t\exp\left((r+\lambda-\frac{v^2}{2})\Delta t-v\sqrt{\Delta t}\right)\right)\\
&=(1+\rho)/4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P\left(M_{t+\Delta t}=M_t\exp\left(\left(r+\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\right), S_{t+\Delta t}=S_t\exp\left((r+\lambda-\frac{v^2}{2})\Delta t-v\sqrt{\Delta t}\right)\right)\\
&=P\left(M_{t+\Delta t}=M_t\exp\left(\left(r+\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}\right), S_{t+\Delta t}=S_t\exp\left((r+\lambda-\frac{v^2}{2})\Delta t+v\sqrt{\Delta t}\right)\right)\\
&=(1-\rho)/4
\end{aligned}
$$

其中 P 表示概率。这样就可以保证两个过程的相关系数为 ρ 。另外， $\Delta t=1$

模拟运算所采用的参数为：$W=1$，$r=5\%$，$\beta=0.05$，$\mu=8\%$，$\sigma=25\%$，$v=30\%$，ρ =0.9[4]；$T=3$。为了比较非流通资产财富持有水平以及非流动期限限制对消费和投资决策的影响，我们分别计算 W_2 =0,0.3,0.5,0.7，非流动性期限 τ =1,2,3 条件下的消费、组合选择以及价值函数值。

表 1 列出了各种条件下的计算结果。从表中可以看出，在允许卖空条件下，随着非流通资产水平的上升，投资者的期望效用水平也逐渐下降。在同样的非流通财富水平下，随着非流通期限的增加，投资者的期望水平也逐渐下降。消费和持有的市场组合与期望效用水平类似，也随着非流通财富水平以及非流通期限的上升而逐渐下降。而且，在各种情况下 $C+X>W_1$ (在没有非流通资产情况下是 W)，这说明投资者都是卖空无风险资产。这表明此时投资者效用函数的无差异曲线相切于资本市场线的上方。

表 1 ：非流动性对消费、投资以及期望效用水平的影响：

	非流动性财富 (W_2)			
	(a) 允许卖空			
τ	0	0.3	0.5	0.7
1		(0.268,0.629,-4.609)	(0.267,0.412,-4.616)	(0.267,0.199,-4.626)
2	(0.270,0.956,-4.605)	(0.268,0.629,-4.615)	(0.265,0.411,-4.632)	(0.261,0.196,-4.659)
3		(0.266,0.629,-4.627)	(0.252,0.358,-4.678)	(0.154,0.191,-5.082)
	(b) 不允许市场组合卖空			
1		(0.268,0.629,-4.609)	(0.267,0.412,-4.616)	(0.267,0.199,-4.626)
2	(0.270,0.956,-4.605)	(0.268,0.629,-4.615)	(0.265,0.411,-4.632)	(0.259,0.138,-4.662)

[4] 这等价于该股票的贝塔系数为 $\rho v/\sigma$ =1.08，比较符合中国股票市场的实际情况。

3		(0.266,0.629,-4.627)	(0.254,0.364,-4.690)	(0.151,0.119,-5.134)
	(c) 不允许所有资产卖空			
1		(0.268,0.432,-4.622)	(0.268,0.232,-4.628)	(0.267,0.033,-4.637)
2	(0.268,0.732,-4.619)	(0.267,0.433,-4.626)	(0.255,0.245,-4.649)	(0.154,0.146,-5.052)
3		(0.245,0.455,-4.681)	(0.175,0.325,-5.203)	(0.105,0.195,-6.372)

注：括号中的数值分别代表 C , X 和 V ,即代表初始时刻的消费，投资与市场组合的财富以及所得到的期望效用值.模拟运算相关的参数设置为：$W=1$，$r=5\%$，$\beta=0.05$，$\mu=8\%$，$\sigma=25\%$，$v=30\%$，ρ =0.9；$T=3$。W_2＝0 就是完全流动的情形。

不允许市场组合卖空但允许借款条件下的消费、投资和期望效用水平和允许卖空条件差别不大，主要原因是投资者通常不敢轻易卖空市场组合，因为它有可能导致破产。所以不允许市场组合卖空的条件所起的作用并不大。但是当非流通资产所占比重很大时，投资者就可能希望卖空市场组合，此时不允许卖空市场组合就会发生作用。

所有资产都不允许卖空则对投资者的消费、投资和期望效用产生了比较大的影响，而且这种影响随着非流通资产比例以及非流通期限的上升而不断扩大。当 $W_2=0.7$，$\tau=3$ 的时候，投资者的期望效用水平只有-6.372，比没有非流通资产时候的期望效用水平低了近 40%。

4．定价

从表 1 可以看出，流动性限制降低了投资者的期望效用水平。换句话说，流动性限制降低了资产价值。为了衡量流动性限制对资产价格的影响程度，我们可以通过不断降低完全流动情况下的初始流动性财富水平，直到投资者的期望效用水平与存在流动性限制时的期望效用水平相等，即降低到使 $V\left(W^{'}\right)=V\left(W_1,W_2\right)$。通过比较 $W^{'}$ 和 W 之间的差异我们就可以分析流动性限制对资产价格的影响。假设某个资产的非流通不会对其他资产价格产生影响，则我们有：

$$W^{'}=W_1+W_2\times\left(1-Q\right)$$

其中 Q 代表非流通资产相对于流动性资产的折价比例。经过整理，我们可以得到：

$$Q=1-\frac{W^{'}-W_1}{W_2}$$

表 2 列出了各种条件下的计算结果。可以看出，非流通资产价格的折扣比例随着非流通财富比例的增加以及非流通期限的延长而不断上升，而且还明显地受到是否允许卖空的影响。在允许卖空条件下，大部分非流通资产价格的折扣比例都比较小，当 $W_2=0.7$，$\tau=3$ 的时候，其折扣幅度也才 17.60%。不允许市场组合卖空的结果和允许卖空条件的结果差别不

大。

表 2：非流动性对资产价格的影响

非流通资产(W_2)									
τ	允许卖空 (%)			不允许市场组合卖空			不允许所有资产卖空		
	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7
1	0.47	0.66	0.84	0.47	0.66	0.80	0.27	0.48	0.69
2	1.00	1.50	2.07	1.00	1.50	2.17	0.63	1.60	15.70
3	2.07	3.90	17.60	2.07	4.54	18.76	5.50	25.06	50.84

注：数值表示各种条件下非流通资产相对于流动性资产的折价幅度。模拟运算相关的参数设置为：$W=1$，$r=5\%$，$\beta=0.05$，$\mu=8\%$，$\sigma=25\%$，$v=30\%$，ρ=0.9；$T=3$。

但是，如果不允许卖空所有资产，则当非流通资产财富超过一定比例而且非流动期限超过一定幅度时，折扣幅度会迅速上升。当$W_2=0.7$，$\tau=3$的时候，其折扣幅度甚至达到了50.84%，远远大于允许卖空条件下的17.60%以及不允许市场组合卖空条件下的18.76%。

5．结论及今后研究方向

本文利用马尔科夫决策过程的随机动态规划原理，在 Kahl, Liu & Longstaff (2003) 的模型框架下引入卖空限制，分析了存在卖空限制条件下非流通资产的定价问题。定价结果表明，市场是否存在卖空机制，流动性限制对资产价值的影响会发生很大的差异。当卖空受到限制时，其非流通资产的折价比例要大大高于允许卖空条件下的折价比例。

本文对非流通资产的分析框架可以运用于对中国非流通股的定价，从而为股权分置改革中的对价确定提供坚实的理论基础。本文模拟运算所采用的数据符合中国股票市场的基本情况，可以作为国有非流通股股票定价的理论依据。根据中国具体的市场环境，利用中国股票市场的实际数据对具体的非流通股进行准确定价，并根据股权分置改革前后非流通股流通限制的变化[5]所引起的非流通股价格变化来计算对价，则是我们另一项研究的主要内容。

参考文献：

Chamberlain, G. and C. A. Wilson, 2000, “Optimal Intertemporal Consumption under Uncertainty”, Review of Economic Dynamics 3, 365-395.

Chen, Z. and P. Xiong, 2001, “Discounts on Illiquid Stocks: Evidence from China”, Working Paper, Yale University.

Cuoco, D., 1997, “Optimal Consumption and Equilibrium Prices with Portfolio Constraints and Stochastic Income”, Journal of Economic Theory 72, 33-73.

Kahl, M., J. Liu and F. A. Longstaff, 2003, “Paper Millionaires: How Valuable is Stock to a Stockholder Who is Restricted from Selling It”, Journal of Financial Economics 67, 385-410.

Longstaff, F. A., 1995, “How Much Can Marketability Affect Security Values”, Journal of Finance 50, 1767-1774.

Longstaff, F. A., 2001, “Optimal Portfolio Choice and the Valuation of Illiquid Assets”, Review of Financial Studies 14, 407-431.

Longstaff, F. A., 2005, “Asset Pricing in Markets with Illiquid Assets”, Working Paper, University of California, Los Angeles.

[5] 由改革前完全不能流通变为改革后的“一禁两限”或者大股东自身承诺的更高限制。

Mayers, D., 1973, “Nonmarketable Assets and the Determination of Capital Asset Prices in the Absence of Riskless Asset”, Journal of Business 46, 258-267.

Mayers, D., 1976, “Nonmarketable Assets, Market Segmentation and the Level of Asset Prices”, Journal of Financial and Quantitative Analysis 11, 1-12.

Miller, B. L., 1974, “Optimal Consumption with a Stochastic Income Stream”, Econometrica 42, 253-266.

Schwartz, E. S. and C. Tebaldi, 2004, “Illiquid Asset and Optimal Portfolio Choices”, Working Paper, University of California, Los Angeles.

附录

存在非流通资产条件下的马尔科夫决策过程的逆向归纳算法：

(1) $t=T$，$v_T\left(W_{1,T},W_{2,T}\right)=\ln\left(W_{1,T}+W_{2,T}\right)$；

(2) 令 $t=t-1$，计算

$$v_t\left(W_{1,t},W_{2t}\right)=\max_{a\in A_s}\left\{R_t\left(s_t,a_t\right)+\exp\left(-\beta\right)\sum_{j\in S}P_t\left(j\mid s_t,a_t\right)u_{t+1}\left(j\right)\right\}$$

其中 $R_t\left(s_t,a_t\right)=R_t\left(\left(W_{1,t},W_{2,t}\right),\left(C_t,X_t\right)\right)=\ln\left(C_t\right)$，

$$P_t\left(j\mid s_t,a_t\right)=\begin{cases}\left(1+\rho\right)/4,\ j=\left(X_t\exp\left(D_{1t}\right)+\left(W_{1,t}-X_t-C_t\right)\exp\left(r\right),W_{2t}\exp\left(E_{1t}\right)\right)\\ \left(1+\rho\right)/4,\ j=\left(X_t\exp\left(D_{2t}\right)+\left(W_{1,t}-X_t-C_t\right)\exp\left(r\right),W_{2t}\exp\left(E_{2t}\right)\right)\\ \left(1-\rho\right)/4，\ j=\left(X_t\exp\left(D_{1t}\right)+\left(W_{1,t}-X_t-C_t\right)\exp\left(r\right),W_{2t}\exp\left(E_{2t}\right)\right)\\ \left(1-\rho\right)/4，\ j=\left(X_t\exp\left(D_{2t}\right)+\left(W_{1,t}-X_t-C_t\right)\exp\left(r\right),W_{2t}\exp\left(E_{1t}\right)\right)\end{cases}$$

其中

$$D_{1t}=\left(r+\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\sigma，\ D_{2t}=\left(r+\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\sigma；$$

$$E_{1t}=\left(r+\lambda-\frac{v^2}{2}\right)+v，\ D_{2t}=\left(r+\lambda-\frac{v^2}{2}\right)-v；$$

$$A^*_{s_t,t}=\arg\max_{a\in A_s}\left\{R_t\left(s,a\right)+\exp\left(-\beta\right)\sum_{j\in S}P_t\left(j\mid s_t,a_t\right)u_{t+1}\left(j\right)\right\}$$

(3) 如果 t=0,停止迭代。否则返回(2)。

在上述算法中对 C_t， X_t 进行各种限制，就可以考察不同卖空限制条件下的决策行为。