

利率风险价格形式实证研究： 扩展仿射模型和半仿射模型的比较*

郑振龙¹，柯鸿² 莫天瑜¹

(1. 厦门大学金融系；2. 第一创业证券)

作者简介：

郑振龙（1966—），男，汉，福建平潭人，金融学博士，国务院学科评议组成员，国家重点学科厦门大学金融学学术带头人，“闽江学者”特聘教授，厦门大学金融系教授、博导，《金融学季刊》主编。研究方向为资产定价、金融工程和风险管理。

电话：13906038903

传真：0592-5920923

邮箱：zlzheng@xmu.edu.cn

通讯地址：厦门大学金融系，361005

柯鸿，男，1984年7月出生，汉族，籍贯福建宁德，金融工程硕士，第一创业证券固定收益部。研究方向为资产定价、金融工程与风险管理。

电话：15019267841

邮箱：skywater_finance@yahoo.com.cn

莫天瑜（1983—），女，汉族，籍贯浙江，在读博士，厦门大学经济学院金融系金融工程专业。

电话：13779968337，

邮箱：skyfish83_xmu@yahoo.com.cn

*基金项目：教育部“国际金融危机应对研究”应急项目：金融市场的信息功能与金融危机预警(2009JYJR051)；福建省自然科学基金：卖空交易对证券市场的影响研究(2009J01316)。

利率风险价格形式实证研究:扩展仿射模型和半仿射模型比较

[摘要] 在仿射利率期限结构动态模型 (Affine DTSM) 框架下, 利率风险价格主要有四种设定形式: 完全仿射模型 (CAM)、实质仿射模型(EAM)、扩展仿射模型(EXAM)和半仿射模型 (SAM)。其中, EAM 优于 CAM、EXAM 和 SAM 均优于 EAM 已经经过理论和实证的证明。然而, EXAM 和 SAM 的孰优孰劣无法单从理论上的比较得出结论, 同时亦鲜有相关的实证文献对其进行比较研究。因此, 本文运用卡尔曼滤波方法, 在三因子 CIR 基础上对 SAM、EXAM 和 EAM 进行了实证比较, 实证结果表明 EXAM 要优于 SAM。此外, 本文的稳健性检验表明, EXAM 虽然已为目前的最优利率风险价格形式, 但其仍然不够完善。

关键词: 利率仿射模型; 利率风险价格形式

An empirical Research of Specification of Interest Risk Price

—A Comparison between Extended Affine Model and Semi-Affine Model

Zheng Zhenlong, Ke Hong

[Abstract] There exists four primary specifications of interest risk price (Completely Affine Model、Essentially Affine Model、Extended Affine Model、Semi-Affine Model) under the framework of Affine DTSM. It has been proved that EAM is superior to CAM, and that EXAM and SAM are both superior to EAM. But no theoretical evidence and few empirical study could help to determine a better model between Semi-Affine Model and Extended Affine Model. So this paper does an empirical comparison on SAM、EXAM and EAM, and the results suggest that EXAM is the best

specification of interest risk price. However, the robust test suggests that EXAM is not perfect enough to capture all the information.

Key words: Interest Rate Affine DTSM; market price of interest risk

一. 引言

究竟怎样的利率动态期限结构模型 (Dynamics Term Structure Models, DTSM) 才算是一个成功的利率模型? 它需要符合哪些性质和依照哪些评判标准呢? 只有首先解决了这个问题, 在实际应用中我们才能更好的选择所需要的模型, 对目标函数进行建模。

为便于分析, 我们可以将利率 DTSM 分解为三个组成部分:

- a) 瞬时利率 r 与状态变量 X 的函数关系
- b) 风险中性测度 (Q) 下, 状态变量 X 的动态过程
- c) 现实世界测度 (P) 下, 状态变量 X 的动态过程

风险中性测度 Q , 是债券价格的定价测度。只有准确描述了状态变量 X 在这一测度下的动态过程, 并正确构造了瞬时利率 r 与状态变量 X 的函数关系, 才能够准确拟合利率期限结构, 从而对债券及其衍生产品进行定价。

而现实测度 P , 描述的则是状态变量 X 在真实世界的过程。只有对这一测度下状态变量 X 的动态过程正确建模, 并正确构造瞬时利率 r 与状态变量 X 的函数关系, 才能够正确的描述债券价格在现实世界的过程, 进而准确提取我们所需要的信息, 例如, 期限溢价、市场对收益率曲线变化的预期、债券超额收益等等。

因此, 一个 DTSM 模型是否成功, 关键在于其能否对三个组成部分进行准确建模。

针对这三个组成部分, 学术界和业界进行了许多的研究, 并发展出一系列的 DTSM 模型, 例如, 仿射模型 (Affine DTSM)、二次高斯模型 (Quadratic-Gaussian)、非仿射随机波动率模型 (nonaffine-stochastic volatility)、以及包括跳跃或机制转换的模型 (Jumps、Regime Switching) 等等。在众多模型中, 本文所关注的是目前应用最为广泛的仿射模型框架。

仿射模型是对 DTSM 三个组成部分中的(a)与(b)进行了限定, 而对(c)并没有做额外的限定:

- a) 风险中性测度 Q 下，状态变量 X 的瞬时漂移率与瞬时方差被设定为 X 的线性函数
- b) 瞬时利率 r 被设定为状态变量 X 的线性函数

在这两个假定下，债券价格可以方便的表示为 $P_t(\tau) = \exp(A(\tau) - B(\tau)' X_t)$ ，而 $A(\tau)$ 、 $B(\tau)$ 则服从一个用数值方法十分易解的黎卡提常微分方程组（Riccati ODEs）。所以，相比较其他 DTSM 而言，在仿射模型框架下对利率期限结构的实证研究就变得十分易于处理，而这也是仿射模型无论在学术界还是业界都十分受欢迎的主要原因。

对仿射模型进行实证最基本的方法，便是利用收益率曲线的面板数据来拟合参数。由于面板数据同时包括了利率横截面和时间序列的信息，因此利用面板数据可以同时得到状态变量在风险中性定价测度 Q 和现实测度 P 的参数，即，同时得到状态变量 X 在风险中性测度 Q 和现实测度 P 的动态过程。

然而，许多实证表明，在传统的利率风险价格形式（例如将利率风险价格设定为瞬时波动率和一个常数的乘积）的设定下，仿射模型无法同时准确地描述状态变量 X 在现实测度 P 和风险中性测度 Q 的动态过程，具体表现为：在较好地拟合其横截面利率期限结构的时候，却无法同时对未来收益率的变动进行较好的预测；或无法较好地拟合期限溢价的时变性等等。

导致仿射模型出现这一问题的原因有很多，例如，利率风险价格设定形式不够灵活，瞬时利率 r 或许是状态变量 X 的非线性函数，没有考虑跳跃和机制转换这些因素，等等。因此，要改进仿射模型可以从多方面入手，而本文所关注的是利率风险价格的设定形式问题。

利率的风险价格，是连接风险中性测度 Q 和现实测度 P 最重要的枢纽。状态变量 X 在真实世界的动态过程，与风险中性世界是不一样的。例如，在风险中性世界中，利率动态过程的漂移率是线性的，但是在真实世界却可能是非线性的。再如，两个世界中的均值回复速度或长期均值水平可能是不一样的。风险价格形式设定不正确，将直接导致两个测度下利率动态过程的错误估计，从而致使真实信息的错误提取。因此，为了更准确的描述利率在风险

中性测度和现实测度中的动态过程,国外学者们已经越来越重视实证中所选择的利率风险价格设定形式,并且发展出了更加灵活、更加合理的新一代利率风险价格设定形式。

目前为止,理论界主要发展了四种利率风险价格设定形式:完全仿射模型(Completely Affine Model,此处以下简称为CAM)、实质仿射模型(Essentially Affine Model,简称为EAM)、扩展仿射模型(Extended Affine Model,简称为EXAM)和半仿射模型(Semi-Affine Model,简称为SAM)。其中,EAM已经被证明是优于CAM的利率风险价格设定形式(Duffee(2002)^[1]),而EXAM((Cheridito, Filipovic and Kimmel(2007)^[3])和SAM(Duarte(2004)^[9])又分别被证明了是优于实质仿射模型的更加一般化的利率风险价格形式。因此,目前为止我们可知EXAM和SAM是最优的两个利率风险价格形式。然而,我们在实证时仍然会遇到一个问题:扩展仿射模型和半仿射模型哪个更好?目前为止尚未发现国内外有文章对这两种利率风险价格形式进行正式的比较研究,而这正是促成本文的重要原因之一。

本文拟在三因子CIR模型的基础上,利用卡尔曼滤波法对EAM、EXAM和SAM进行实证比较研究,希望能为国内外学术界的相关研究发展贡献一份微薄的力量。

本文分为六个部分。第一部分为引言;第二部分简单介绍了仿射模型的债券定价基本理论;第三部分系统介绍了利率风险价格的发展脉络,并对各利率风险价格进行了详细的比较分析;第四部分介绍了本文实证研究方法;第五部分为实证研究结果;第六部分为全文的总结。

二. 仿射模型框架下的债券定价

仿射模型框架下，瞬时利率 r_t 被设定为：

$$r_t = \delta_0 + \delta_x' X_t \quad (1)$$

其中， δ_0 是 1×1 的标量； δ_x, X_t 是 $n \times 1$ 的向量。

而状态变量 X 在风险中性测度 Q 的动态过程假定为：

$$dX_t = (\psi^Q - K^Q X_t) dt + \Sigma \sqrt{S_t} dW_t^Q \quad (2)$$

$$S_t(i, i) = \alpha_i + \beta_i' X_t, S_t(i, j) = 0, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n. \quad (3)$$

其中， W_t^Q 是风险中性测度 Q 下标准的布朗运动， $\psi^Q, \alpha_i, \beta_i$ 是 $n \times 1$ 向量， K^Q, Σ 是 $n \times n$ 的矩阵， S_t 是 $n \times n$ 的对角矩阵。

Duffe and Kan (1996)^[12]证明了在 (1)、(2)、(3) 式的假定下，剩余期限为 τ 、到期支付 1 的零息票债券，在 t 时刻的价格 $P_t(\tau)$ 将服从如下形式：

$$\begin{aligned} P_t(\tau) &= E_t^Q \left(\exp\left(-\int_t^{t+\tau} r_s ds\right) \right) \\ &= \exp\left(A(\tau) - B(\tau)' X_t\right) \end{aligned} \quad (4)$$

其中， $A(\tau)$ 是 1×1 的标量， $B(\tau)$ 是 $n \times 1$ 的向量，它们都是剩余期限 τ 的函数，并服从如下的常微分方程组：

$$\begin{aligned} \frac{dA(\tau)}{d\tau} &= -\Psi^Q' B(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\Sigma' B(\tau)]_i^2 \alpha_i - \delta_0 \\ \frac{dB(\tau)}{d\tau} &= -K^Q' B(\tau) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\Sigma' B(\tau)]_i^2 \beta_i - \delta_x \end{aligned} \quad (5)$$

由于到期支付 1 的零息票债券，在其到期时的价格 $P_t(0)$ 必须等于 1，否则会出现无风险套利机会，所以式 (5) 的常微分方程组还必须满足一个边界条件： $A(0) = B(0) = 0$ 。

需要注意的是，Duffe and Kan (1996)^[12]在推导式 (4)、(5) 时，并没有对状态变量 X 在现实测度 P 下的动态过程做出任何的限定。因此，理论上不论状态变量 X 在现实测度下的动

态过程假定为何种形式，只要满足了（1）、（2）、（3）式的假定，式（4）、（5）都能够成立。

而利率风险价格是连结现实测度和风险中性测度唯一的枢纽，只要合理设定了利率风险价格的形式，就能够推导出状态变量 x 在现实测度下的动态过程，进而得到各经济变量如持有期收益率、连续复利收益率等在现实测度下的动态过程，以对这些经济变量进行观察和预测。

例如，设 $n \times 1$ 向量 Λ_t 为风险价格，则状态变量在现实测度下的动态过程可以表示为：

$$\begin{aligned} dX_t &= (\psi^Q - K^Q X_t) dt + \Sigma \sqrt{S_t} dW_t^Q \\ &= (\psi^Q - K^Q X_t + e_{t,x}) dt + \Sigma \sqrt{S_t} dW_t^P \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $e_{t,x} = \Sigma \sqrt{S_t} \Lambda_t$ 表示状态变量的风险溢价。

则由式（1）、（4）、（6）推导可得，剩余期限为 τ 的零息票债券的瞬时持有期收益率在现实测度下的动态过程为：

$$\frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} = (r_t + e_{t,P}(\tau)) dt + v_t(\tau) dW_t^P \quad (7)$$

其中 $v_t(\tau) = -B(\tau)' \Sigma \sqrt{S_t}$ ，表示持有期收益率的瞬时波动率；

$e_{t,P}(\tau) = v_t(\tau) \Lambda_t = -B(\tau)' \Sigma \sqrt{S_t} \Lambda_t$ ，表示持有期收益率的瞬时风险溢价。

可见，我们只要合理设定 Λ_t 的形式，就能够通过面板数据拟合出持有期收益率现实测度动态过程的各个参数，进而对持有期收益率进行观察和预测。

三. 利率风险价格形式的发展

虽然利率风险价格的设定形式不影响式（4）、（5）的推导，但利率风险价格的设定仍需要满足一系列的假设条件，例如需满足无套利假设、需尽量准确地刻画投资者对利率的风险态度、要能同时刻画利率一阶矩和二阶矩的动态变化过程等等。因此，为了能更好的刻画投资者的风险态度、以及更好地刻画利率一阶矩和二阶矩的动态变化，目前理论界主要发展了以下四种利率风险价格设定形式。

(一) 完全仿射模型 (Completely Affine Model, CAM)

最早的利率风险价格形式由 Fisher and Gilles (1996)^[14]提出:

$$\Lambda_t = \sqrt{S_t} \lambda_1 \quad (8)$$

其中, λ_1 表示 $n \times 1$ 的向量。

在这种设定下, 状态变量在现实测度下的动态过程可以表示为:

$$dX_t = (\psi^Q - K^Q X_t) dt + \Sigma S_t \lambda_1 dt + \Sigma \sqrt{S_t} dW_t^P \quad (9)$$

其中 $\Sigma S_t \lambda_1$ 表示状态变量 X_t 的风险溢价 $e_{t,x}$ 。

由于方差 S_t 也是状态变量的线性函数, 因此在这种风险价格设定形式下, 状态变量 X 在风险中性测度和现实测度的动态过程、甚至随机贴现因子的方差 $\Lambda_t' \Lambda_t$ 全部都是状态变量 X 的线性函数, 所以 Duffee(2002)^[10]称这种风险价格形式是完全仿射的。

CAM 提出后, 被学者们广泛使用。例如, Chen and Scott(1993)^[2]、Dai and Singleton (2000)^[5]、DE JONG (2000)^[8]、Lamoureux and Witte(2002)^[13]等以及目前为止国内的大部分学者都使用 completely Affine 的风险价格设定进行了各类实证研究。

然而, 这种 completely Affine 的设定, 却无法从理论上刻画风险溢酬的各种实际特性。

为更好的说明, 我们考虑一个两因子模型:

$$dX_t = \left(\begin{pmatrix} \varphi_1^Q \\ \varphi_2^Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1^Q & 0 \\ 0 & k_2^Q \end{pmatrix} X_t \right) dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{X_{t,2}} \end{pmatrix} dW_t^Q \quad (10)$$

在该两因子模型下, 状态变量和持有期收益率的瞬时风险溢价可以分别表示为:

$$e_{t,x} = \begin{pmatrix} \lambda_1(1)\sigma_1^2 \\ \lambda_1(2)\sigma_2^2 X_{t,2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$e_{t,p}(\tau) = -B(\tau)' \Sigma \sqrt{S_t} \Lambda_t = -B(\tau)' \begin{pmatrix} \lambda_1(1)\sigma_1^2 \\ \lambda_1(2)\sigma_2^2 X_{t,2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

首先, 从式 (11)、(12) 中可以看出, 风险溢价无法受到自身波动率之外的因素影响,

这与实际发现并不相符。例如，Duffee(2002)^[10]指出，在剔除掉波动率的影响后，持有期收益率的风险溢价还与收益率曲线的斜率存在十分显著的正相关关系。

其次，CAM 无法刻画持有期收益率风险溢价小均值、大方差的特征。式(12)中，如果持有期收益率的风险溢价要满足小均值、大方差的特征，那么需要 $\lambda_1(1)$ 、 $\lambda_1(2)$ 需要相反的符号才行。然而， $\lambda_1(1)$ 、 $\lambda_1(2)$ 通常无法拥有一个相反的符号，因为 $\lambda_1(1)$ 、 $\lambda_1(2)$ 的符号决定了状态变量风险溢价的符号（大量实证表明，在CAM下二者通常都为负）。

此外，在CAM的设定下，现实测度和风险中性测度动态过程的漂移项中，有许多参数都是两个测度或漂移项和波动率项所共用的，例如该两因子模型在现实测度下的动态过程为：

$$dX_t = \left(\begin{pmatrix} \varphi_1^Q + \lambda_1(1)\sigma_1^2 \\ \varphi_2^Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1^Q & 0 \\ 0 & k_2^Q - \lambda_1(2)\sigma_2^2 \end{pmatrix} X_t \right) dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{X_{t,2}} \end{pmatrix} dW_t^P$$

$X_{t,1}$ 的均值回复速度 k_1^Q 在两个测度下是一样的， $X_{t,2}$ 的长期均值水平 φ_2^Q 在两个测度下是一样的。然而，如果实际情况是两个测度下的参数并不一样，那么这些参数的拟合就会出现不可预见的结果：有可能更接近风险中性测度，有可能更接近现实测度，也有可能走了一个折衷的路线。

可见，CAM有着很大的局限性。在用CAM进行实证的过程中，经常会出现无法同时准确拟合利率的横截面性质和时间序列性质的问题：要么风险溢价拟合不好而无法进行较好地预测，要么牺牲了其他参数（例如，拟合期限结构形状和定价的参数）的拟合效果来改善风险溢价的拟合效果。

Dai and Singleton (2000)^[5]利用CAM对其提出的经典仿射模型（Canonical Affine Model）进行了实证研究，其结果表明CAM很好地刻画了持有期收益率风险溢价低均值、高方差的特性，然而横截面利率期限结构形状的拟合误差却很大。

Ahn, Dittmar, and Gallant (2002)^[11]发现CAM无法准确刻画利率的条件波动率的变化。

(二) 实质仿射模型 (Essentially Affine Model, EAM)

Duffee (2002) ^[10]在 CAM 的基础之上进行改进, 提出了 EAM 的风险价格形式:

$$\Lambda_t = \sqrt{S_t} \lambda_1 + \sqrt{S_t^-} \lambda_2 X_t \quad (13)$$

其中, λ_1 表示 $n \times 1$ 向量, λ_2 表示 $n \times n$ 矩阵, S_t^- 表示 $n \times n$ 的对角矩阵, 其对角元素为

$$S_t^-(i, i) = \begin{cases} (\alpha_i + \beta_i' X_t)^{-1}, & \text{if } \inf(\alpha_i + \beta_i' X_t) > 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (14)$$

根据 Girsanov 定理, 在该设定下, 状态变量在现实测度下的过程可以表示为:

$$dX_t = (\Psi^Q - K^Q X_t) dt + \Sigma (S_t \lambda_1 + I^- \lambda_2 X_t) dt + \Sigma \sqrt{S_t} dW_t^P \quad (15)$$

其中, I^- 是 $n \times n$ 对角矩阵, $I^-(i, i) = \begin{cases} 1, & \text{if } \inf(\alpha_i + \beta_i' X_t) > 0. \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

EAM 提出的目的, 主要是为了在波动率之外, 引入其他因素 (如斜率) 来影响风险溢酬的变化, 从而刻画风险溢酬均值小、方差大的特性。我们同样以 (10) 式的两因子模型和持有期收益率的风险溢酬来说明 EAM 对 CAM 的改进。

在 EAM 和 (10) 式的两因子模型下, 状态变量和持有期收益率的风险溢酬可以表示为:

$$e_{t,x} = \begin{pmatrix} \lambda_1(1)\sigma_1^2 + \boxed{\lambda_2(1,1)X_{t,1}} + \boxed{\lambda_2(1,2)X_{t,2}} \\ \lambda_1(2)\sigma_2^2 X_{t,2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$e_{t,p}(\tau) = -B(\tau) \Sigma \sqrt{S_t} \Lambda_t = -B(\tau) \begin{pmatrix} \lambda_1(1)\sigma_1^2 + \boxed{\lambda_2(1,1)X_{t,1}} + \boxed{\lambda_2(1,2)X_{t,2}} \\ \lambda_1(2)\sigma_2^2 X_{t,2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

方框 $\boxed{}$ 里所表示的是 EAM 比 CAM 多出的变量。Essentially Affine 与 CAM 的不同主要表现在两个方面:

首先, 服从 Vasicek Process 的状态变量 $X_{t,1}$ 的风险溢酬, 除了受到其自身波动率影响外, 还受到 $X_{t,1}$ 和 $X_{t,2}$ 的影响, 进而, 作为状态变量风险溢酬的线性组合的持有期收益率风险溢酬也引入了波动率之外的影响。这是符合风险溢酬实际特性和经济直觉的: 人们对于持有期

收益率的风险所要求的风险补偿,受到波动率之外的其他因素(例如期限结构的形状)影响。

其次, $X_{t,1}$ 的风险溢酬的符号不再仅仅取决于 $\lambda_1(1)$, 这样 $\lambda_1(1)$ $\lambda_2(1,1)$ $\lambda_2(1,2)$ 之间便可以有着相异的符号。因此, 相比较 CAM 而言, EAM 就更能刻画持有期收益率小均值、大方差的特征。

再次, 在 EAM 下, 该两因子模型在现实测度下的动态过程为:

$$dX_t = \begin{pmatrix} \varphi_1^Q + \lambda_1(1)\sigma_1^2 \\ \varphi_2^Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1^Q - \lambda_2(1,1) & -\lambda_2(1,2) \\ 0 & k_2^Q - \lambda_1(2)\sigma_2^2 \end{pmatrix} X_t dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2\sqrt{X_{t,2}} \end{pmatrix} dW_t^Q$$

可以发现, 相比较 CAM 而言, 两个测度下的动态过程允许有更多不同的参数, 从而在一定程度上避免了不同测度共用参数的问题。

从以上分析可以发现, EAM 是比 CAM 更具一般化性质的风险价格设定形式, $\lambda_2=0$ 时, EAM 就是 CAM。因此在实际应用时, 无论从模型设定一般化角度, 还是从经济意义上的角度来看, EAM 都是比 CAM 更好的选择。

然而, 需要注意的是, EAM 虽然在风险价格形式设定上比 CAM 迈进了一大步, 却仍然存在着它很明显的不足之处:

首先, 为了更好地刻画风险溢酬的特征, 必须在一定程度上放弃利率方差的时变性特征。

在 EAM 中, $S_t^-(i, i)$ 被设定为这样一种形式:

$$S_t^-(i, i) = \begin{cases} (\alpha_i + \beta_i' X_t)^{-1}, & \text{if } \inf(\alpha_i + \beta_i' X_t) > 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$S_t^-(i, i)$ 只有在该因子的方差下界大于 0 时才不为 0。这样设定的目的是为了避开无套利机会的存在: 当一个因子的波动率为 0 时, 与该因子相关的风险溢酬必须等于 0, 否则理论上就可以进行无风险套利。

例如, 在两因子模型中, 服从平方根过程的状态变量方差为 $\sigma^2 X_{t,2}$, 方差下界等于 0, 如果将与该状态变量相关的 $S_t^-(2,2)$ 设为 $\frac{1}{\sigma^2 X_{t,2}}$, 则该状态变量的风险溢酬为

$\lambda_1(2)\sigma_2^2 X_{t,2} + \lambda_2(2,1)X_{t,1} + \lambda_2(2,2)X_{t,2}$ ，当某一时刻该状态变量的方差等于 0 时，其风险溢酬等于 $\lambda_2(2,1)X_{t,1}$ 而不为 0，所以理论上就会存在无风险套利的机会。

因此，EAM 要刻画风险溢酬的特征，必须在一定程度上放弃利率方差的时变性特征，在其模型中必须至少有一个因子服从类似 Vasicek Process 的过程，使研究者在选择模型时会面临一个到底要刻画风险溢酬还是利率方差时变性的尴尬境地。而且对于常用的多因子 CIR 模型而言，EAM 就对 CAM 没有任何的改进，仍然无法准确刻画风险溢酬的特征。

其次，如果服从 Vasicek Process 的状态变量的风险溢酬能够受到服从 Square Root Process 的状态变量的影响，但是为什么反过来不行呢？这个问题无论从理论上还是实际上都解释不通。

此外，虽然 EAM 大大减轻了状态变量动态过程在现实和风险中性两个测度下共用参数的情况，但只要多因子模型中有状态变量服从 Square Root Process，就仍然会存在共用的参数。

Duffee(2002)^[10]在提出 EAM 后，使用 QML 估计，在 Dai and Singleton (2000)^[5]的 Canonical 仿射模型基础上对 EAM 和 CAM 进行了实证比较，结果表明，使用 EAM 的风险价格形式，能更好地在现实测度中预测未来收益率曲线的动态变化。同时，Duffee(2002)^[10]也指出，三因子 Essentially - Gaussian Model 对未来收益率一阶矩的预测效果最好，但对未来利率波动率的预测效果却不如三因子 CIR 模型。

Dai and Singleton (2002)^[6]借鉴 Duffee(2002)^[10]的风险价格设定方式进行研究，也发现了同样的问题：EAM 在 CIR 框架下无法同时准确预测未来利率的一阶矩和二阶矩。

(三) 扩展仿射模型 (Extended Affine Model, EXAM)

为了改进 EAM 的缺陷，Cheridito, Filipovic and Kimmel(2007)^[3]提出了 EXAM 的风险价格

形式：

$$\Lambda_t = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 X_t}{\sqrt{S_t}} \quad (18)$$

其中， λ_1 是 $n \times 1$ 向量， λ_2 是 $n \times n$ 矩阵。

根据 Girsanov 定理，在该设定下，状态变量在现实测度的动态过程可以表示为：

$$dX_t = (\Psi^Q - K^Q X_t) dt + \Sigma(\lambda_1 + \lambda_2 X_t) dt + \Sigma \sqrt{S_t} dW_t^P \quad (19)$$

其中， $\Sigma(\lambda_1 + \lambda_2 X_t)$ 表示状态变量的风险溢价。

需要注意的是，在 (18) 式中，波动率 $\sqrt{S_t}$ 是风险价格的分子。在这种设定下，当状态变量波动率等于 0 时，状态变量的风险溢价 $\Sigma(\lambda_1 + \lambda_2 X_t)$ 却不为 0，这样就会导致理论上存在无风险套利的机会。为了避免这种情况的发生，Cheridito, Filipovic and Kimmel(2007)^[3] 分别对状态变量在风险中性测度和现实测度下的动态过程进行了相应的参数限制 (Feller 条件)，使得波动率 $\sqrt{S_t}$ 恒大于 0，从而无法出现无风险套利机会。在对参数进行限制的前提下，Cheridito, Filipovic and Kimmel(2007)^[3] 通过等价鞅测度的存在性进一步证明了 EXAM 的无套利性质。

从理论上说，EXAM 比 EAM 更具一般性，因为只要对参数进行 Feller 条件限制，保证方差恒大于 0，则无论状态变量的动态过程设为哪种形式 (包括均方根动态过程)，状态变量之间都能相互影响到对方的风险溢价变化。

这里我们以两因子 CIR 模型为例：

$$dX_t = \left(\begin{pmatrix} \varphi_1^Q \\ \varphi_2^Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1^Q & 0 \\ 0 & k_2^Q \end{pmatrix} X_t \right) dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 \sqrt{X_{t,1}} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{X_{t,2}} \end{pmatrix} dW_t^Q \quad (20)$$

在 EXAM 的框架下，状态变量和持有期收益率的风险溢价可以分别表示为：

$$e_{t,x} = \Sigma \sqrt{S_t} \Lambda_t = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1(1)} + \lambda_2(1,1)X_{t,1} + \boxed{\lambda_2(1,2)X_{t,2}} \\ \boxed{\lambda_1(2)} + \lambda_2(2,1)X_{t,1} + \lambda_2(2,2)X_{t,2} \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$e_{t,p} = -B(\tau)' \Sigma \sqrt{S_t} \Lambda_t = -B(\tau)' \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1(1)} + \lambda_2(1,1)X_{t,1} + \boxed{\lambda_2(1,2)X_{t,2}} \\ \boxed{\lambda_1(2)} + \boxed{\lambda_2(2,1)X_{t,1}} + \lambda_2(2,2)X_{t,2} \end{pmatrix} \quad (23)$$

方框 \square 中所表示的是 EXAM 比 EAM 多出的变量。

比较两种风险价格形式的不同，可以发现 EXAM 几个方面的改进：

首先，EXAM 中因子之间能够相互影响对方的风险溢价，而 EAM 下风险溢价则只受状态变量其自身波动率的影响。因此，在 EXAM 下，风险溢价中的各参数的符号都可正可负，即使在多因子 CIR 模型下，EXAM 也能很好的描述风险溢价的特性，进而更好的刻画了投资者面对风险源的态度。

其次，在 EXAM 下，状态变量在现实测度下的动态过程为：

$$dX_t = \begin{pmatrix} \left(\begin{matrix} \varphi_1^Q + \lambda_1(1) \\ \varphi_2^Q + \lambda_1(2) \end{matrix} \right) - \begin{pmatrix} k_1^Q - \lambda_2(1,1) & -\lambda_2(1,2) \\ -\lambda_2(2,1) & k_2^Q - \lambda_2(2,2) \end{pmatrix} X_t \\ \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 \sqrt{X_{t,1}} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{X_{t,2}} \end{pmatrix} dW_t^P$$

可以发现，根据 EXAM 对风险价格形式的设定，只要对参数进行 Feller 条件限制，并设定参数限制条件使动态过程在两个测度下都能得到唯一解，那么，两个测度下的漂移项中的所有参数（包括长期均值、回复速度、状态变量之间的相关关系）都可以拥有不同的值。这就使得在实证研究时，同一个参数不用同时描述两个测度的动态过程，从而在理论上可以准确地同时刻画两个测度下的动态过程。

Cheridito, Filipovic and Kimmel(2007)^[3]在提出 EXAM 的定义后，在 Dai and Singleton (2000)^[5]的 Canonical 仿射模型基础上，用 MLE 估计比较了 EXAM、EAM 和 CAM 三种风险价格的优劣，结果发现 EXAM 确实能够在不影响利率横截面性质拟合的情况下改进利率时间序列性质的拟合。

(四) 半仿射模型 (Semi-Affine Model, SAM)

为了改进 EAM 在 CIR 模型中的应用，Duarte(2004)^[9]提出了 SAM：

$$\Lambda_t = \Sigma^{-1}\lambda_0 + \sqrt{S_t}\lambda_1 + \sqrt{S_t^-}\lambda_2 X_t \quad (23)$$

其中， λ_0 为 $n \times 1$ 向量，其他符号与 EAM 相同。

在该设定下，状态变量在现实测度下的动态过程可以表示为：

$$dX_t = (\Psi^\varrho - K^\varrho X_t) dt + \left(\sqrt{S_t}\Sigma^{-1}\lambda_0 + S_t\lambda_1 + I^-\lambda_2 X_t \right) dt + \Sigma\sqrt{S_t}dW_t^P \quad (24)$$

其中， $\left(\sqrt{S_t}\Sigma^{-1}\lambda_0 + S_t\lambda_1 + I^-\lambda_2 X_t \right)$ 表示状态变量的瞬时风险溢价。

可以发现，在这种设定下，状态变量在现实测度下的动态过程和状态变量的瞬时风险溢价是非 Affine 形式的，但是状态变量在风险中性测度下的动态过程仍然是 Affine 形式的，所以 Duarte(2004)^[9]称这种风险价格形式为 SAM。

SAM 对 EAM 的改进，主要是体现在多因子 CIR 模型上。假设一个两因子 CIR 模型为：

$$dX_t = \left(\begin{pmatrix} \varphi_1^\varrho \\ \varphi_2^\varrho \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1^\varrho & 0 \\ 0 & k_2^\varrho \end{pmatrix} X_t \right) dt + \begin{pmatrix} \sigma_1\sqrt{X_{t,1}} & 0 \\ 0 & \sigma_2\sqrt{X_{t,2}} \end{pmatrix} dW_t^\varrho$$

则 SAM 框架下，状态变量和持有期收益率的风险溢价为：

$$e_{r,x} = \begin{pmatrix} \boxed{\sigma_1\sqrt{X_{t,1}}\lambda_0(1)} + \sigma_1^2 X_{t,1}\lambda_1(1) \\ \boxed{\sigma_2\sqrt{X_{t,2}}\lambda_0(2)} + \sigma_2^2 X_{t,2}\lambda_1(2) \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$e_{r,p} = -B(\tau) \begin{pmatrix} \boxed{\sigma_1\sqrt{X_{t,1}}\lambda_0(1)} + \sigma_1^2 X_{t,1}\lambda_1(1) \\ \boxed{\sigma_2\sqrt{X_{t,2}}\lambda_0(2)} + \sigma_2^2 X_{t,2}\lambda_1(2) \end{pmatrix} \quad (26)$$

其中方框 \square 表示 SAM 比 EAM 多出的变量。

我们接下来比较一下 SAM 与 EXAM 的几点不同，以及它对 EAM 的改进：

首先，在这种设定下，风险溢价、现实测度下的漂移项都是状态变量的非线性函数。

这是与之前的三种风险价格设定形式所不同的。

其次，为了刻画风险溢价的小均值、大方差特性，我们需要风险溢价中的各参数能够改变符号。EXAM 的方法是在其中一个状态变量的风险溢价中引入了另外一个状态变量的影响，以使风险溢价中的各个参数的符号可以改变；而 SAM 则直接在风险溢价中引入状态变量自身的均方根，从而使得各参数符号能够改变。

Duarte(2004)^[9]在提出 SAM 后，用 MLE 对 SAM、EAM 进行了估计和比较，发现在大多数模型中，尤其是多因子 CIR 模型，SAM 在一定程度上能够改进 EAM 对收益率曲线的预测能力。

四. 本文的实证研究方法

(一) 本文的实证动因

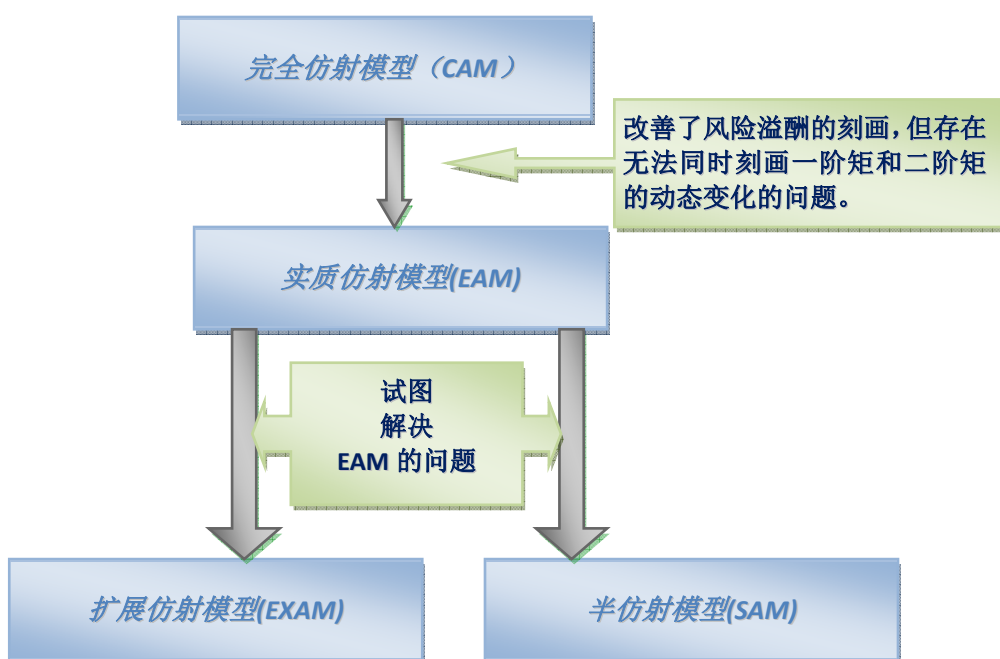


图 1 风险价格发展脉络图

图 1 给出了四种风险价格的发展过程。根据之前的理论分析以及 Duffee(2002)^[10]、Duarte(2004)^[9]以及 Cheridito, Filipovic and Kimmel(2007)^[3]的实证，我们可以知道，EAM 是比 CAM 更加一般化的风险价格设定形式，而 EXAM 和 SAM 也都分别通过各自的方式改进了 EAM，是比 EAM 更优的风险价格设定形式。

然而，EXAM 和 SAM 之间，哪一种风险价格设定形式是更优的呢？本文以下将对 EXAM 和 SAM 的优劣进行实证比较，以弥补国内外在这一块的空白，为日后的进一步研究提供参考。

本文研究的主要方法是利用利率期限结构的面板数据，通过卡尔曼滤波估计出 EAM、EXAM 和 SAM 在三因子 CIR 模型基础上的各个参数，并比较三种风险价格对期限结构横截面性质和时间序列性质的拟合以及预测能力，以此作为风险价格优劣的评判标准。

(二) 因子模型的选择

在 Affine DTSM 框架下，本文选择三因子 CIR 模型作为比较风险价格优劣的基础。

在三因子 CIR 模型下，瞬时利率与状态变量的函数关系为：

$$r_t = \sum_{i=1}^3 X_{t,i}$$

而状态变量在风险中性测度下的动态过程可以写为：

$$dX_t = \left(\begin{pmatrix} \varphi_1^Q \\ \varphi_2^Q \\ \varphi_3^Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1^Q & 0 & 0 \\ 0 & k_2^Q & 0 \\ 0 & 0 & k_3^Q \end{pmatrix} X_t \right) dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 \sqrt{X_{t,1}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{X_{t,2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \sqrt{X_{t,3}} \end{pmatrix} dW_t^Q$$

使动态过程在风险中性测度下存在唯一解所需要的参数限制是：

$$\varphi_i^Q \geq 0, k_i^Q \geq 0, i = 1, 2, 3$$

此时债券价格和连续复利收益率可以表示为：

$$P_t(\tau) = \exp\left(A(\tau) - B(\tau)' X_t\right)$$

$$R_t(\tau) = -\frac{A(\tau)}{\tau} + \left(\frac{B(\tau)}{\tau}\right)' X_t$$

其中，

$$A(\tau) = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{2\varphi_i^Q}{\sigma_i^2} \left(\ln(2\gamma_i) + \frac{1}{2}(k_i^Q - \gamma_i)\tau - \ln\left((\gamma_i + k_i^Q)(1 - e^{(-\gamma_i\tau)}) + 2\gamma_i e^{(-\gamma_i\tau)}\right) \right) \right]$$

$$B(\tau)_i = \frac{2(1 - e^{(-\gamma_i\tau)})}{(\gamma_i + k_i^Q)(1 - e^{(-\gamma_i\tau)}) + 2\gamma_i e^{(-\gamma_i\tau)}}$$

$$\gamma_i = \sqrt{k_i^2 + 2\sigma_i^2}$$

(三) 风险价格设定形式的选择

本文选择 EAM、EXAM 和 SAM 三种风险价格形式进行比较研究。

比较 EXAM 和 SAM 的优劣是本文的主要目的,而 EAM 的选择则是为了提供一个基准。

1. EAM 的风险溢价

在三因子 CIR 模型中, EAM 的风险溢价为:

$$e_{t,x} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 X_{t,1} \lambda_1(1) \\ \sigma_2^2 X_{t,2} \lambda_1(2) \\ \sigma_3^2 X_{t,3} \lambda_1(3) \end{pmatrix}$$

为了使状态变量在现实测度的动态过程有唯一解并恒大于 0, 所需参数限制是:

$$\begin{aligned} k_i^0 - \sigma_i^2 \lambda_1(i) &\geq 0, i = 1, 2, 3 \\ \varphi_i^0 &\geq \frac{1}{2} \sigma_i^2, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

2. EXAM 的风险溢价

三因子 CIR 模型中, EXAM 的风险溢价为:

$$e_{t,x} = \begin{pmatrix} \lambda_1(1) + \lambda_2(1,1)X_{t,1} + \lambda_2(1,2)X_{t,2} + \lambda_2(1,3)X_{t,3} \\ \lambda_1(2) + \lambda_2(2,1)X_{t,1} + \lambda_2(2,2)X_{t,2} + \lambda_2(2,3)X_{t,3} \\ \lambda_1(3) + \lambda_2(3,1)X_{t,1} + \lambda_2(3,2)X_{t,2} + \lambda_2(3,3)X_{t,3} \end{pmatrix}$$

为了使状态变量在现实测度的动态过程有唯一解并恒大于 0, 所需参数限制是:

$$\begin{aligned} \lambda_2(i, j) &\geq 0, 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j; \\ \varphi_i^0 + \lambda_1(i) &\geq \frac{1}{2} \sigma_i^2, i = 1, 2, 3; \\ (K^P)^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_1^0 + \lambda_1(1) \\ \varphi_2^0 + \lambda_1(2) \\ \varphi_3^0 + \lambda_1(3) \end{pmatrix} &\geq 0 \end{aligned}$$

此外, EXAM 还要求状态变量在风险中性测度下恒大于 0, 所需参数限制是:

$$\varphi_i^0 \geq \frac{1}{2} \sigma_i^2, i = 1, 2, 3$$

3. SAM 的风险溢价

三因子 CIR 模型中，SAM 的风险溢酬为：

$$e_{t,x} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \sqrt{X_{t,1}} \lambda_0(1) + \sigma_1^2 X_{t,1} \lambda_1(1) \\ \sigma_2 \sqrt{X_{t,2}} \lambda_0(2) + \sigma_2^2 X_{t,2} \lambda_1(2) \\ \sigma_3 \sqrt{X_{t,3}} \lambda_0(3) + \sigma_3^2 X_{t,3} \lambda_1(3) \end{pmatrix}$$

为了使状态变量在现实测度下的动态过程有唯一解并恒大于 0，所需参数限制是：

$$k_i^0 - \sigma_i^2 \lambda_1(i) \geq 0, i = 1, 2, 3$$

$$\varphi_i^0 \geq \frac{1}{2} \sigma_i^2, i = 1, 2, 3$$

为便于比较，我们将三种形式的风险溢酬写到一个式子中，并对参数做一些等价的变

换：

$$e_{t,x} = \begin{pmatrix} \lambda_0(1)\sqrt{X_{t,1}} + \lambda_1(1) + \lambda_2(1,1)X_{t,1} + \lambda_2(1,2)X_{t,2} + \lambda_2(1,3)X_{t,3} \\ \lambda_0(2)\sqrt{X_{t,2}} + \lambda_1(2) + \lambda_2(2,1)X_{t,1} + \lambda_2(2,2)X_{t,2} + \lambda_2(2,3)X_{t,3} \\ \lambda_0(3)\sqrt{X_{t,3}} + \lambda_1(3) + \lambda_2(3,1)X_{t,1} + \lambda_2(3,2)X_{t,2} + \lambda_2(3,3)X_{t,3} \end{pmatrix}$$

其中，有一条下划线的代表 SAM 专有的参数，有两条下划线的代表 EXAM 专有的参数，

没有下划线的表示 EAM、EXAM 和 SAM 共用的参数。

(四) 数据描述

数据来源：Wind 数据库，由 Nelson-Siegel-Svensson 法拟合出的银行间国债收益率曲线。

时间跨度：从 2005 年 1 月 4 日至 2008 年 12 月 1 日

时间间隔：一星期，总共 192 个星期。

其中，2005 年 1 月 4 日至 2008 年 5 月 5 日共 163 个星期 2771 个数据用于样本期内拟合，2008 年 5 月 6 日至 2008 年 12 月 1 日共 29 个星期的数据用于样本期外检测。

(五) 估计方法的选择：Kalman Filter

Duffee and Stanton(2004)^[11] 和 DE JONG(2000)^[8] 通过比较各种估计方法的有效性后发

现，研究仿射模型时，使用 kalman filter 是最有效、误差最小的估计方法。因此，本文选择 Kalman Filter 法进行估计，具体估计步骤详见附录 A。

本文采用最小化残差平方和的方法选择状态变量的初始值：

$$\min_{X_0} : \sum_{\tau} \left(R_0(\tau) - \left(-\frac{A(\tau)}{\tau} + \left(\frac{B(\tau)}{\tau} \right) X_0 \right) \right)^2$$

s.t. $X_0 \geq 0$

$R_0(\tau)$ 表示在 0 时刻、到期日为 τ 的连续复利收益率，单位为百分点。

五. 实证结果

（一）参数估计结果

表 1 参数估计结果

	EAM	SAM	EXAM
Log-likelihood	3754.275727	3765.483526	4943.95179
σ_{ε}^2	0.067738	0.067440	0.050872
	(1.044602)	(0.001437)	(0.000768)
φ_1^0	33.022883	8.630834	2.708032
	(12.180763)	(0.007035)	(0.001194)
φ_2^0	0.699371	0.671541	0.267534
	(0.255963)	(0.000621)	(0.000470)
φ_3^0	0.024570	0.061793	0.859048
	(0.049252)	(0.000015)	(0.000206)
k_1^0	295.429851	299.743538	70.957371
	(0.127615)	(0.007592)	(0.000098)
k_2^0	0.000000	0.000000	0.000092
	(0.999778)	(0.000286)	(0.000000)
k_3^0	301.872313	299.431048	0.181932

	(26.724830)	(0.013141)	(0.000000)
σ_1	8.126855	1.648840	0.844699
	(1.768472)	(0.001390)	(0.000561)
σ_2	0.225750	0.213130	0.112290
	(1.514034)	(0.000665)	(0.000573)
σ_3	0.221630	0.126192	0.705673
	(1.256028)	(0.000030)	(0.000678)
$\lambda_0(1)$	—	0.000531	—
	—	(0.000004)	—
$\lambda_0(2)$	—	0.538634	—
	—	(0.000022)	—
$\lambda_0(3)$	—	-0.156171	—
	—	(0.000011)	—
$\lambda_1(1)$	—	—	0.942629
	—	—	(0.000336)
$\lambda_1(2)$	—	—	-0.255304
	—	—	(0.000289)
$\lambda_1(3)$	—	—	-0.580896
	—	—	(0.000114)
$\lambda_2(1,1)$	293.392717	299.716974	-49.039628
	(0.052872)	(0.000011)	(0.000052)
$\lambda_2(2,1)$	—	—	0.808794
	—	—	(0.000001)
$\lambda_2(3,1)$	—	—	0.210171
	—	—	(0.000001)
$\lambda_2(1,2)$	—	—	1.818952
	—	—	(0.000003)
$\lambda_2(2,2)$	-0.386205	-0.767318	-1.470534
	(0.305042)	(0.001170)	(0.000002)

$\lambda_2(3,2)$	—	—	0.001766
	—	—	(0.000000)
$\lambda_2(1,3)$	—	—	0.807065
	—	—	(0.000001)
$\lambda_2(2,3)$	—	—	2.672848
	—	—	(0.000002)
$\lambda_2(3,3)$	-299.907286	-0.007106	0.171314
	(0.049813)	(0.000000)	(0.000000)

注：为提高拟合精度，本文先将收益率数据放大 100 倍后，再进行参数估计。故表 1 参数所适用的收益率计算公式

式为 $R_t(\tau) = (-\frac{A(\tau)}{\tau} + \frac{B(\tau)}{\tau} X_t) / 100$ 。括号（）里是参数的标准误。

根据表 1 给出的估计结果，可以首先得到的一些结论是：

首先，从极大似然值看，总体而言，EXAM 对 EAM 的改进效果要明显优于 SAM。

其次，EXAM 对模型拟合优度的提高，可以一部分在利率期限结构的横截面性质上体现出来。 σ_ε^2 表示卡尔曼滤波测量方程的误差方差，即，收益率曲线形状拟合的误差方差，在一定程度上可以代表横截面的拟合效果，在三种模型中 EXAM 的方差是最小的。

此外，从参数的标准误看，无论是 SAM，还是 EXAM，它们比 EAM 多出的参数的标准误都很小，所以 P 值都显著的异于 0。这说明状态变量的风险溢价，除了受状态变量自身的波动率影响外，确实还受到其他因素的影响，

（二）样本期内一阶矩预测误差

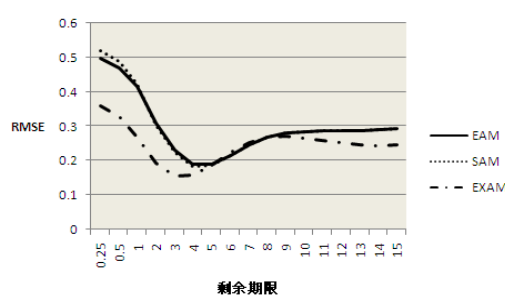
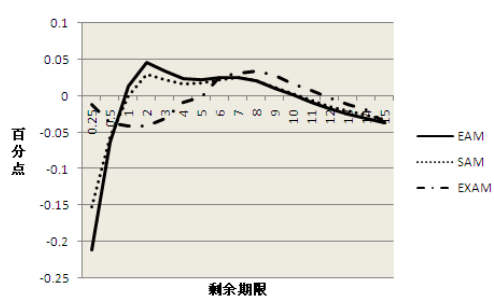


图 2 样本期内一阶矩预测误差均值

图 3 样本期内一阶矩预测误差 RMSE

首先从图 2 可以看出，EAM 和 SAM 对短期利率的预测偏误较大，分别达到 0.2 个百分点和 0.15 个百分点。相比较而言，EXAM 的预测偏误的稳定性较强，对不同到期日的利率的预测误差均值一般不超过 0.05 个百分点。

从图 3 可以看出，EXAM 的样本内一阶矩 RMSE 要明显优于 SAM 和 EAM。而 SAM 对 EAM 的改进则不大。

通过图 2 和图 3 的分析，我们发现，EXAM 对样本内利率期限结构一阶矩的拟合程度，要优于 SAM 和 EAM，即，EXAM 更准确地刻画了利率的风险溢酬的动态变化过程。

(三) 样本期外一阶矩预测误差

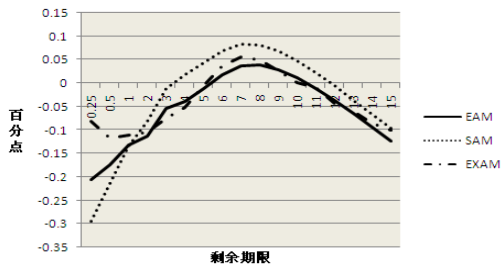


图 4 样本期外一阶矩预测误差均值

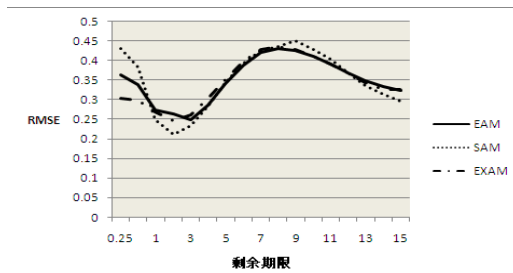


图 5 样本期外预测误差 RMSE

首先，通过图 4 和图 5，我们发现 EXAM 对样本期外预测效果的改进并没有那么明显，其预测效果与 EAM 基本类似。而 SAM 对样本期外的预测误差的波动比较大，有时优于 EXAM 和 EAM，有时却比它们糟糕，从图 5 中可以很明显看出这一点。

其次三种模型对短端利率的预测都不是很好，但是相比较而言，仍然是 EXAM 的 RMSE 较低。此外，三种模型都对 1 至 4 年间的利率和长端利率的预测效果较好。

通过以上分析，可以得到的结论是：在样本期外，EXAM 和 SAM 对 EAM 的一阶矩预测效果改进效果并不明显，但总体而言，EXAM 的一阶矩预测效果较为稳定。

(四) 二阶矩预测误差

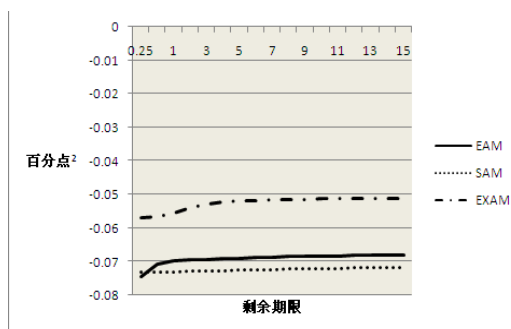


图 6 二阶矩样本期内预测误差均值

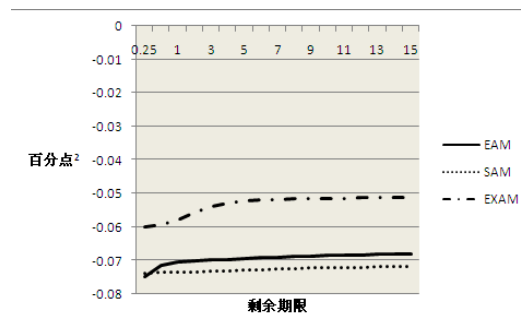


图 7 二阶矩样本外预测误差均值

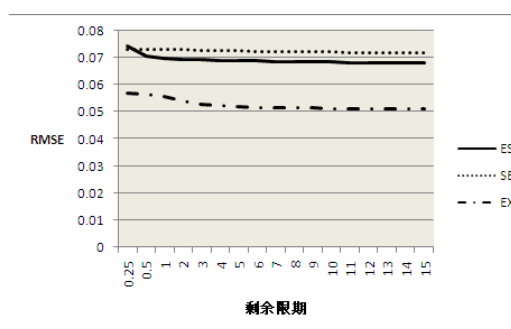


图 8 二阶矩样本内 RMSE

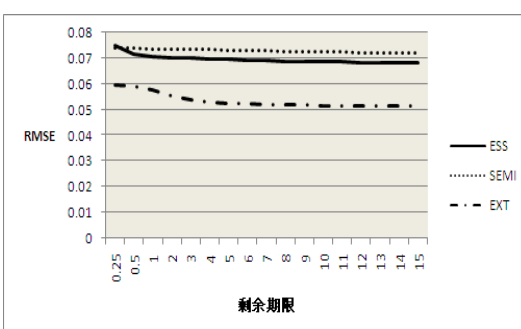


图 9 二阶矩样本外 RMSE

从图 6、图 7 可以看出，三种模型都倾向于高估利率的波动率。而 EXAM 预测二阶矩的效果，显然要好于其他两种模型，这一点从图 8、图 9 的 RMSE 也可以很明显的看出。

以上比较了三种风险价格设定的实证结果，这里我们将各个比较结果做一个小结。为了方便阅读，我们将各种比较结果归纳入表 2。

表 2 实证结果比较

极大似然值	Extended 优于 Semi 优于 Essentially
收益率曲线形状的 横截面拟合误差方差	Extended 优于 Semi 优于 Essentially
样本内一阶矩预测误差	Extended 优于 Semi 近似于 Essentially
样本外一阶矩预测误差	三种模型无明显区别
样本内外二阶矩预测误差	Extended 优于 Essentially 优于 Semi.

我们发现，EXAM 在改进利率现实测度一阶矩、二阶矩动态过程拟合的同时，还改进了利率风险中性测度动态过程的拟合。因此，EXAM 的风险价格设定形式，在很大程度上

要优于 SAM。

(五) 进一步的检验

我们在看到 EXAM 的改善效果的同时，我们还需要考虑另一个问题：其风险价格设定是否刻画了风险溢价变化的所有内容？其是否完全解决了多因子 CIR 模型的问题？

为了检测 EXAM 是否考虑了利率期限结构的所有信息以及是否解决了多因子 CIR 模型的问题，我们对以下方程进行样本期内的回归：

$$\begin{aligned}
 R_{t+\tau}(\tau) - E_t(R_{t+\tau}(\tau)) &= \alpha_\tau + \beta_{1,\tau} level_t + \beta_{2,\tau} slope_t + \beta_{3,\tau} convexity_t + \varepsilon_{t+\tau} \\
 level_t &= \frac{R_t(0.5) + R_t(8) + R_t(15)}{3}; \\
 slope_t &= R_t(15) - R_t(0.5); \\
 convexity_t &= R_t(0.5) + R_t(15) - 2R_t(8);
 \end{aligned} \tag{27}$$

方程左边表示模型隐含的样本内预测误差。

如果 EXAM 的风险价格设定，考虑了所有的关于收益率曲线形状的信息对风险溢价变化的影响，那么上述方程中的系数应该是不显著的，P 值应该较大。因此，本文选择了剩余期限为 0.5 年、5 年和 10 年的收益率为代表，分别对上述方程进行回归，其中 τ 指定为一个星期。

表 3 样本内预测误差对 level、slope 和 convexity 的回归结果

	ESS	SEMI	EXT
$\tau = 0.5$			
Adj-R ²	0.860702	0.865771	0.703524
α_τ	1.591712 (0.0000)	1.668091 (0.0000)	1.054101 (0.0000)
$\beta_{1,\tau}$	-16.96196 (0.0000)	-17.10644 (0.0000)	-18.43102 (0.0000)
$\beta_{2,\tau}$	-46.89076 (0.0000)	-50.24594 (0.0000)	-11.60446 (0.0066)
$\beta_{3,\tau}$	23.36583 (0.0000)	23.66568 (0.0000)	26.25316 (0.0000)
$\tau = 5$			

Adj-R ²	0.399563	0.557077	0.403824
α_τ	0.175057 (0.0748)	-0.293489 (0.0005)	0.057255 (0.5434)
$\beta_{1,\tau}$	1.341022 (0.5737)	4.333392 (0.0604)	9.266033 (0.0000)
$\beta_{2,\tau}$	-26.49476 (0.0000)	-24.69198 (0.0000)	-14.89035 (0.0000)
$\beta_{3,\tau}$	-25.88875 (0.0000)	-24.55162 (0.0000)	-24.07679 (0.0000)
$\tau = 10$			
Adj-R ²	0.832709	0.839118	0.778176
α_τ	-1.356118 (0.0000)	-1.384614 (0.0000)	-1.146155 (0.0000)
$\beta_{1,\tau}$	30.78589 (0.0000)	31.39842 (0.0000)	24.33334 (0.0000)
$\beta_{2,\tau}$	7.783525 (0.0023)	9.029365 (0.0011)	9.265007 (0.0057)
$\beta_{3,\tau}$	-20.95882 (0.0000)	-19.92794 (0.0000)	-19.56225 (0.0000)

注：括号（）里表示 P 值

表 3 给出了回归的结果。我们发现：

首先，无论是哪一种风险价格设定形式下，方程大部分的系数都显著不为 0¹，这说明预测误差仍然与收益率曲线形状的三个因子之间存在着很显著的关系。因此，我们发现 EXAM 虽然比 SAM 和 EAM 的一阶矩预测效果更好，但是在三因子 CIR 模型框架下，其仍然无法完全囊括收益率曲线形状的所有信息。

其次，虽然表三的结果不令人满意，但它仍然从一个侧面说明了 EXAM 确实优于 SAM 和 EAM。因为从表三中的调整 R² 看，从 EAM 到 SAM 再到 EXAM 的回归拟合优度存在一个递减的趋势。

六. 全文总结

利率风险价格，是连接现实测度和风险中性测度的枢纽。利率风险价格设定形式的优

¹ Duarte(2004)采用类似的办法比较了 EAM 和 Semi-Affine Model，同样发现系数都显著不为 0。

劣，会直接影响到模型拟合的准确程度。

目前在 Affine DTSM 框架下，主要有四种风险价格设定形式：CAM、EAM、SAM 和 EXAM。

CAM 是目前国内许多学者所使用最多的风险价格设定形式，然而这种风险价格设定形式有着极大的缺陷，例如，无法描述利率风险溢酬的时变性、许多参数由现实测度和风险中性测度的动态过程共用等。为了改进 CAM 的缺陷，Duffee(2002)^[1] 提出 EAM 以改进其对利率风险溢酬动态过程的拟合。但是 EAM 同样存在缺陷：无法改进多因子 CIR 模型，即，无法同时准确刻画利率的一阶矩和二阶矩的变化。因此，Duarte(2004)^[9] 和 Cheridito, Filipovic and Kimmel(2007)^[3] 各自提出了 SAM 和 EXAM，试图改进 EAM 的缺陷；并且他们都表明了，其风险价格设定在一定程度上改进了 EAM。然而，我们无从得知 EXAM 和 SAM 两种形式到底哪一种更优，因为目前国内外尚无文献做过相关研究。

因此，本文以三因子 CIR 模型为基准，通过卡尔曼滤波估计，比较了 EXAM、SAM 和 EAM 三种风险价格对利率变化一阶矩二阶矩的样本内外的预测效果、以及各自对横截面性质的拟合能力。实证结果表明，无论从一阶矩预测、二阶矩预测还是横截面性质的拟合效果上，EXAM 都明显优于 SAM，而 SAM 对 EAM 的改进则不是很大。

然而，本文通过一阶矩预测误差对 Level、slope 和 convexity 三种因子的回归发现，EXAM 仍然无法完全解决 EAM 的问题，在多因子 CIR 模型框架下，其对二阶矩预测能力的提高，仍然是以牺牲一阶矩预测能力为代价的。因此，通过风险价格设定来改进多因子 CIR 模型对利率一阶矩的预测，仍然需要进一步的深究。

附录 A

一. 漂移项为状态变量线性函数时，状态变量的条件均值与条件方差

要用卡尔曼滤波进行估计，首先要计算状态变量的条件均值与条件方差。

假设状态变量的动态过程为：

$$dX_t = K(\theta - X_t)dt + \Sigma\sqrt{S_t}dW_t, \quad S_t = \alpha + \beta X_t$$

Fisher and Gilles(1996)^[14]给出了 Affine Model 下条件均值和条件方差的一般性式子：

$$E(X_T | X_t) = \phi(T-t)X_t + D(T-t)K\theta$$

$$\text{Var}(X_T | X_t) = \int_t^T \phi(T-s)F(t,s)\phi(T-s)ds$$

$$\text{其中, } F(t,s) = \alpha + \beta E(X_T | X_t), \phi(\tau) = e^{(-K\tau)}, D(\tau) = \int_0^\tau \phi(s)ds$$

注意， $e^{(-K\tau)}$ 表示对整个矩阵 $(-K\tau)$ 求 e，在 matlab 中用 `expm` 命令表示。

而 Duffee(2002)^[10] 给出了当 K 可对角化时，条件均值和条件方差的解析式：

令 $K = NDN^{-1}$ ， D 表示 K 的特征值矩阵， $D(i,i)=d_i$ 。

并定义 $X_t^* = N^{-1}X$ ，则 X_t^* 的动态过程可以表示为：

$$\begin{aligned} dX_t^* &= D(\theta^* - X_t^*)dt + \Sigma^*\sqrt{S_t^*}dW_t \\ S_t^* &= \alpha + \beta^* X_t^*; \theta^* = N^{-1}\theta; \Sigma^* = N^{-1}\Sigma; \beta^* = \beta N. \end{aligned}$$

通过推导可得²：

$$E(X_T | X_t) = \left(I - e^{(-K(T-t))}\right)\theta + e^{(-K(T-t))}X_t,$$

$$\text{Var}(X_T | X_t) = N \text{Var}(X_T^* | X_t^*) N'$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_T^* | X_t^*) &= \left\{ (d_j + d_k)^{-1} G_0(j,k) \left(1 - e^{-(T-t)(d_j+d_k)}\right) \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left[\theta_i^* \left\{ (d_j + d_k)^{-1} G_i(j,k) \left(1 - e^{-(T-t)(d_j+d_k)}\right) \right\} \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left[(X_{t,i}^* - \theta_i^*) \left\{ (d_j + d_k - d_i)^{-1} G_i(j,k) \left(e^{-d_i(T-t)} - e^{-(d_j+d_k)(T-t)} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

其中， $G_0 = \Sigma^* \text{diag}(\alpha^*) \Sigma^{*'}$ ， $G_i = \Sigma^* \text{diag}(\beta^*(:,i)) \Sigma^{*'}$ 。 $\{f(j,k)\}$ 表示第 (j,k) 个元素为

$f(j,k)$ 的矩阵。

² 注意 Duffee(2002)^[1] 给的 $\text{Var}(X_T^* | X_t^*)$ 有误，将式中的某个加号写为乘号了；而 Duarte(2004) 给的式子也犯了同样的错误。

二. Semi-Affine Model 下，状态变量的条件均值和条件方差

在 SAM 下，状态变量在现实测度下的漂移项是非线性的，无法通过前面的方法直接求得条件均值和条件方差的解析式。因此，这里采用 Duarte(2004)^[9]的方法求近似的条件均值和条件方差。Duarte(2004)^[9]表明，当时间间隔小于一个月时，这种近似所产生的误差很小，几乎可以忽略不计。

在 SAM 下，状态变量的漂移项可以写为：

$$\begin{aligned}\mu(X) &= K\theta + \Sigma\sqrt{S}\Sigma^{-1}\lambda_0 - KX, \\ S(i, i) &= \alpha_i + \beta_i'X. \\ K &= K^Q - \Sigma(\lambda_1(1)\beta_1', \dots, \lambda_n(1)\beta_n') - \Sigma\sqrt{S}\sqrt{S}^{-1}\lambda_2 \\ K\theta &= K^Q\theta^Q + \Sigma(\lambda_1(1)\alpha_1', \dots, \lambda_n(1)\alpha_n')\end{aligned}$$

对 $\sqrt{\alpha_i + \beta_i'X}$ 做一个 X_t 附近的一阶泰勒展开，得到：

$$\sqrt{\alpha_i + \beta_i'X} \approx \sqrt{\alpha_i + \beta_i'X_t} + \frac{\beta_i'(X - X_t)}{2\sqrt{\alpha_i + \beta_i'X_t}}$$

将泰勒展开近似值代入漂移项，并合并同类项可得：

$$\mu(X) \approx K\theta + \Sigma A(X_t)\Sigma^{-1}\lambda_0 - (KX - \Sigma B(X_t)\Sigma^{-1}\lambda_0)$$

其中， $A(X_t)$ $B(X_t)$ 是对角矩阵，其对角线元素为：

$$\begin{aligned}A_{i,i}(X_t) &= \sqrt{\alpha_i + \beta_i'X_t} + \frac{-\beta_i'X_t}{2\sqrt{\alpha_i + \beta_i'X_t}} \\ B_{i,i}(X_t) &= \frac{\beta_i'X_t}{2\sqrt{\alpha_i + \beta_i'X_t}}\end{aligned}$$

这样，就可以得到 SAM 非线性漂移项的一个线性近似，从而利用这个近似值就可以应

用 Fisher and Gilles(1996)和 Duffee(2002)^[10]的方法来求得状态变量的条件均值和条件方差。

三. 卡尔曼滤波估计步骤

令 η 表示所有需要估计的参数，则测量方程可以表示为：

$$R_t(\tau, \eta) = -\frac{A(\tau, \eta)}{\tau} + \frac{B(\tau, \eta)}{\tau}X_t + \varepsilon_{t,\tau};$$

$\varepsilon_{t,\tau}$ 表示横截面拟合的误差。

卡尔曼方程的迭代步骤为：

1. 用最小化残差平方和的办法求得状态变量的初始值 X_{00} ，并为赋予 η 可能的值。

2. 计算 X_t 的条件均值和条件方差：

$$X_{t+\Delta t|t} = (I - e^{(-K\Delta t)})\theta + e^{(-K\Delta t)}X_{t|t}, \quad V_{T|t} = N V_{T|t}^* N'$$

3. 计算 $R_t(\tau, \eta)$ 的条件均值和条件方差：

$$R_{t+\Delta t|t} = -\frac{A(\tau, \eta)}{\tau} + \frac{B(\tau, \eta)}{\tau} X_{t+\Delta t|t}, \quad V_{R,t+\Delta t|t} = \left(\frac{B}{\tau}\right)' V_{t+\Delta t|t} \left(\frac{B}{\tau}\right) + \sigma_\varepsilon^2$$

4. 计算预测误差：

$$e_{t+\Delta t|t} = R_{t+\Delta t} - R_{t+\Delta t|t}$$

5. 用 $t + \Delta t$ 的信息更新状态变量：

$$X_{t+\Delta t|t+\Delta t} = X_{t+\Delta t|t} + V_{t+\Delta t|t} \left(\frac{B}{\tau}\right) V_{R,t+\Delta t|t}^{-1} e_{t+\Delta t}, \quad V_{t+\Delta t|t+\Delta t} = V_{t+\Delta t|t} - V_{t+\Delta t|t} \left(\frac{B}{\tau}\right) V_{R,t+\Delta t|t}^{-1} \left(\frac{B}{\tau}\right)' V_{t+\Delta t|t}$$

通过不断迭代 1 至 5 的步骤，最终可以求得极大似然值。极大似然值函数为：

$$\text{Log-likelihood} = -\sum_{t=\Delta t}^T \left(\log(V_{R,t|t-\Delta t}) + e_t' V_{R,t|t-\Delta t}^{-1} e_t \right)$$

[参考文献]

- [1] Ahn D. H., R. F. Dittmar, and A. R. Gallant (2002). Quadratic term structure models: theory and evidence [J]. *Review of Financial Studies* 15 (1), 243–288.
- [2] Chen R. R., and L. Scott (1993). Maximum likelihood estimation for a multifactor equilibrium model of the term structure of interest rates [J]. *Journal of Fixed Income* 3, 14-31.
- [3] Cheridito P., D. Filipovic, and R. L. Kimmel (2007). Market price of risk specifications for affine Models: theory and evidence [J]. *Journal of Financial Economics* 83, 123–170.
- [4] Cox J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1985). A theory of the term structure of interest rates [J]. *Econometrica* 53, 385-407.
- [5] Dai Q., and K. J. Singleton (2000). Specification analysis of affine term structure models [J]. *Journal of Finance* 55, 1943-1978.
- [6] Dai, Q. and K. J. Singleton (2002). Expectation puzzles, time-varying risk premia, and affine models of the term structure[J]. *Journal of Financial Economics* 563, 415–441.
- [7] Dai, Q. and K. Singleton (2003). Term structure dynamics in theory and reality [J]. *Financial Studies*. 16,631-678.
- [8] De Jong F. (2000). Time series and cross-section information in affine term-structure Models [J]. *American Statistical Association*:300-314.
- [9] Duarte J. (2004). Evaluating an alternative risk preference in affine term structure models [J]. *Review of Financial Studies* 17 (2), 379–404.

- [10] Duffee G.R. (2002). Term premia and interest rate forecasts in affine models [J]. *Journal of finance* 57, 405–443.
- [11] Duffee G. R. and Stanton Richard (2004). Estimation of dynamic term structure models [J]. Haas School of Business, U.C. Berkeley.
- [12] Duffie D. and R. Kan (1996). A yield-factor model of interest rates [J]. *Mathematical Finance* 6, 379–406.
- [13] Lamoureux C. G. and H. D. Witte (2002). Empirical analysis of the yield curve: the information in the data viewed through the window of cox, ingersoll, and ross [J]. *Journal of Finance* 57, 1479–1520.
- [14] Fisher M., and C. Gilles (1996). Estimating exponential-affine models of the term structure [J]. *Working paper*, Federal Reserve Board.
- [15] Vasicek O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure [J]. *Journal of Financial Economics* 5, 177-188.