

# 含期权债券利率风险的衡量<sup>1</sup>

## Measurement of Interest Rate Risk of Option Embedded Bond

郑振龙 康朝锋

(厦门大学金融系, 福建厦门 361005)

内容摘要: 内嵌期权会对债券的久期和凸度带来很大的影响, 使债券面临更大的利率风险。实际久期和实际凸度能够有效衡量内嵌期权对债券利率风险的影响。对国家开发银行发行的可赎回债券和可回售债券的模拟和实证分析表明, 实际凸度解释了大部分的利率风险, 因此在投资中不可忽略。

关键词: 内嵌期权; 实际久期; 实际凸度

Abstract: Embedded option will strongly affect duration and convexity of bond so that make bond's price fluctuate more as interest rate change. Effective duration and effective convexity can catch the impact of embedded option to bond's interest rate risk. Simulation and empirical analysis show that effective convexity explains most of the interest rate risk of callable bond and puttable bond issued by Chinese Development Band. So we cannot ignore it in investment.

Key words: Embedded Option ; Effective Duration ; Effective Convexity

## 1. 内嵌期权对债券利率风险衡量的影响

### 1.1 内嵌期权对债券利率风险的影响

我们通常采用久期 (Duration) 和凸度 (Convexity) 衡量债券的利率风险。由于久期的概念最早是马考勒提出的, 所以又称马考勒久期(简记为  $D$ )<sup>2</sup>。所谓马考勒久期, 是指未来一系列现金流的时间以现金流的现值为权数所计算的加权平均到期时间。

假设利率期限结构是平的, 现在是 0 时刻, 债券持有者在  $t_i$  时刻收到的支付为  $c_i$  (1

<sup>1</sup>感谢教育部优秀青年教师资助计划“中国信用风险度量和控制模型”项目、教育部人文社会科学研究 2003 年度博士点基金研究项目“中国利率类金融产品的设计和定价”(03JB790016)、福建省社科“十五”规划(第二期)项目(2003B069)的资助。本文观点仅代表作者个人观点。

<sup>2</sup> Macaulay, F.R., 1938, “Some Theoretic Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1856”, National Bureau of Economic Research, Columbia, New York.

i n), 则债券价格 P 和连续复利到期收益率 y 的关系为 :

$$P = \sum_{i=1}^n c_i e^{-y t_i}$$

由此可得 :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = - \sum_{i=1}^n c_i t_i e^{-y t_i}$$

而久期的定义为 :

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n t_i c_i e^{-y t_i}}{P} = \sum_{i=1}^n t_i \left[ \frac{c_i e^{-y t_i}}{P} \right]$$

代入前式可得 :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -PD$$

所以久期衡量了债券的利率风险。但这只是一阶的利率风险, 如果我们把债券价格的变化对利率的变化进行泰勒展开 :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial y} (\Delta y) + \frac{1}{2! P} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} (\Delta y)^2 + \dots$$

那么我们可以看出久期只衡量了债券价格一阶的利率风险。为了衡量债券价格二阶的利率风险, 我们需要用到凸度 (C):

$$C = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

二阶的精度在正常情况下足够, 所以通过久期和凸度我们基本上可以衡量利率变动对债券价格的影响。

对于不含内嵌期权的债券而言, 其价格 - 收益率曲线是凸向原点的, 所以凸度总是正的 (略大于 0)。即当利率下降时, 债券价格将以加速度上升; 当利率上升时, 债券价格将以减速度下降。在这种情况下, 无论利率是上升还是下降, 对投资者都有好处。

但这个结论不能直接用于含权债券, 例如对于可赎回债券, 当市场利率下降时, 债券很

可能被提前赎回，此时债券价格并不会向普通债券那样加速上升，如果直接用久期度量此类债券的利率风险，会得到歪曲的结果。由于嵌入期权，它可能使得可赎回债券在低收益率时呈现出负凸度，而在高收益率时呈现出正凸度。负凸度的涵义与正凸度截然不同。正凸度表明，当市场利率下降时，债券价格将以加速度上升；当市场利率上升时，债券价格将以减速度下降，因此，正凸度对投资者是有利的。而负凸度表明，当市场利率下降时，债券价格将以减速度上升，当市场利率上升时，债券价格将以加速度下降，因此，负凸度对投资者而言是不利的。所以说负凸度会放大投资者承担的利率风险，因此，在度量可赎回债券的利率风险时必须考虑到久期和凸度的上述特性。

## 1.2 实际久期( Effective Duration )和实际凸度( Effective Convexity )

为了解决上述问题，人们提出了实际久期和实际凸度的概念。

实际久期是指利率水平发生特定变化情况下，证券价格变动的百分比。它充分考虑了内嵌期权对证券市场价格的影响，其计算公式为：

$$D_{eff} = \frac{P_- - P_+}{P_0(y_+ - y_-)}$$

$D_{eff}$  为证券的实际久期； $P_0$  为债券的初始市场价格； $P_-$ 、 $P_+$  分别为利率上升和下降 X 个基本点时债券的市场价格； $y_-$ 、 $y_+$  分别为初始收益率减去和加上 X 个基本点，而初始收益率是指证券的初始到期收益率，它是由无风险市场利率加上违约风险溢酬、流动性风险溢酬、以及期权调整利差构成的<sup>3</sup>。

所谓期权调整利差(OAS) 是指对证券中含有的内嵌期权风险的补偿。以国际金融市场中最常见的抵押支持证券为例，抵押贷款人享有可随市场利率波动而提前偿还本金不受任何惩罚的内嵌期权。如当市场利率下降时，贷款人往往会提前偿付本金，则证券持有人将会由于收到的本金的再投资收益率降低而遭受损失，市场对此作出的补偿就是期权调整利差。它是实际久期能够测量内嵌期权风险的基础，因此实际久期又称为期权调整久期。

实际凸度的计算公式为：

$$C_{eff} = \frac{(P_+ - 2P_0 + P_-)}{(y_+ - y_-)^2 P_0}$$

测量内嵌期权金融工具的利率风险的核心在于 OAS 的计算。计算 OAS 时，假设市场

---

<sup>3</sup>通常，两种债券之间的利差是由违约风险、流动性风险和内嵌期权引起的，而期权调整利差是指在其他条件相同的情况下，由内嵌期权引起的两种债券的收益率差别。

是有效的(即市场价格已反映了内嵌期权风险的存在)。首先计算证券的未来现金流(此现金流跟未来利率和提前偿付模型有关),并将这些现金流用无风险利率贴现加总得到证券的一个理论价格;将该理论价格与市场价格比较,如不相等(实际上很少相等),则将无风险利率加上一个固定值(如5个基本点),再计算证券的理论价格,然后再与市场价格相比。如此重复上述工作,直到理论价格与市场价格相一致,用此时得到的证券贴现率(即到期收益率)减去无风险率就是OAS。

使用二叉树模型计算实际久期和实际凸度的过程如下:

- (1) 估计利率的二叉树动态树图,计算证券的OAS;
- (2) 将利率期限结构上升(下降)少量固定的基点,在此基础上重新估计利率的二叉树图;
- (3) 给二叉树图上的每个短期利率加上OAS得到“调整后的二叉树”;
- (4) 使用“调整后的二叉树”计算 $P_+$  ( $P_-$ );
- (5) 计算实际久期和凸度。

这里要注意的是上面的计算方法隐含假设了各种期限的利率是按相同点数变化的,这个假设就是收益率曲线平移的假设(Parallel Yield Curve Shift Assumption)

## 2. 可赎回债券的利率风险

可赎回债券赋予发行人赎回债券的权力,在市场利率下降,债券价格上升的时候,发行人会选择赎回债券来降低融资成本。所以当利率下降,债券价格上升到一定幅度的时候,发行人选择赎回,债券价格不会继续上升,使债券凸度下降甚至出现负的凸度,不过此时债券的久期仍然大于或等于0,因为债券价格不可往回跌。

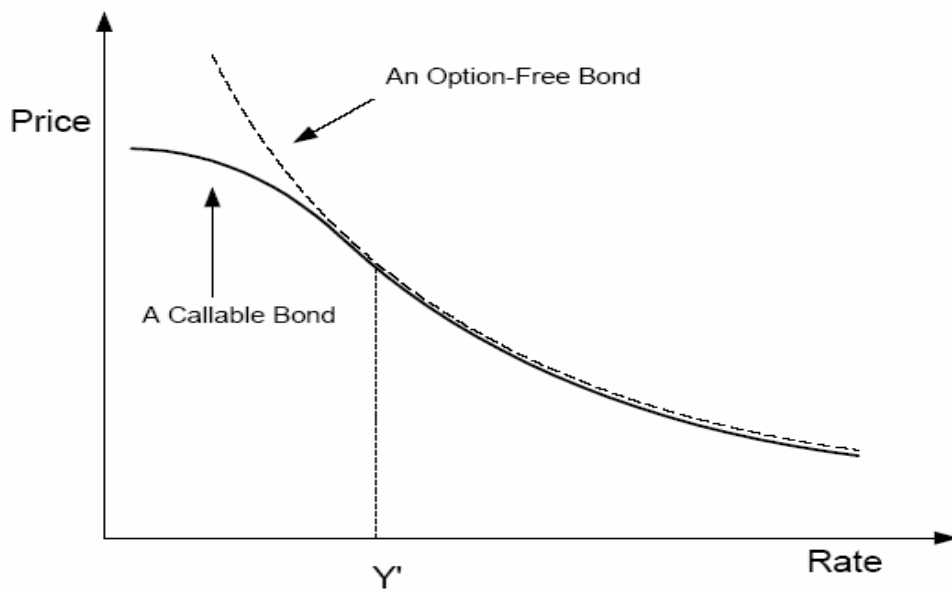


图 1 可赎回债券的价格与利率的关系

### 3.可回售债券的利率风险

可回售债券赋予投资者回售债券的权力，在市场利率上升，债券价格下跌的时候，投资者会选择回售债券来避免损失。所以当利率上升，债券价格下降到一定幅度的时候，投资者选择回售，债券价格不会继续下降，使债券凸度上升，不过此时债券的久期仍然大于或等于 0，因为债券价格不可往回涨。

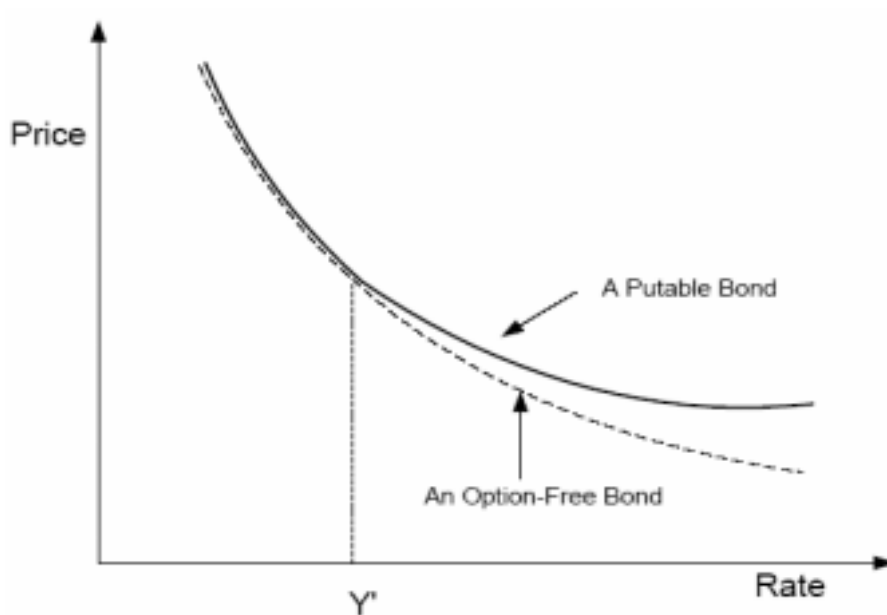


图 2 可回售债券的价格和利率的关系

## 4. 我国可赎回(可回售)债券利率风险的模拟检验和实证分析

我们使用二叉树模型对国家开发银行发行的可赎回金融债和可回售金融债进行实证分析。

### 4.1 模拟检验

为了避免实际利率数据偏差的影响,我们先用模拟的利率二叉树图(Black, Derman 和 Toy, 1990)对可赎回债券和可回售债券分别进行模拟检验。我们假设利率的对数服从二叉树过程,可赎回债券的期限为10年,发行人(或投资人)有权在第5年的付息日按面值100赎回债券。

模拟结果<sup>4</sup>和理论分析是一致的,普通债券的久期和凸度都为正,可赎回债券的凸度在利率比较低的时候出现了负值,可回售债券的久期和凸度都为正。

### 4.2 实证结果与分析

下面是用国家开发银行2001年至2004年初发行的可赎回债券和可回售进行的实证分析。

表1 国开行可赎回债券的实际久期和实际凸度

债券代码	20206*	20215*	20218*	30202*	30213*	30214*
实际久期	2.82	2.80	2.77	-0.67	3.53	3.53
实际凸度	14.66	26.90	-19.01	842.73	375.15	375.15
利率增减百分比 ( $\Delta y$ )	0.20%					
债券价格变动百分比 $\frac{\Delta P}{P}$	-0.56%	-0.55%	-0.56%	0.30%	-0.63%	-0.63%
久期解释的部分 $\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial y} (\Delta y)$	-0.56%	-0.56%	-0.55%	0.13%	-0.71%	-0.71%
凸度解释的部分	0.00%	0.01%	0.00%	0.17%	0.08%	0.08%

<sup>4</sup>限于篇幅,模拟结果不在此列出,需要的人可向作者索取。

$\left( \frac{1}{2!P} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right)$						
久期的影响所占百分比	100.52%	100.97%	99.32%	44.40%	111.90%	111.90%
凸度的影响所占百分比	-0.52%	-0.97%	0.68%	55.60%	-11.90%	-11.90%

表 2 国开行可回售债券的实际久期和实际凸度

债券代码	10220*	20205*	30215*	30216*	40202
实际久期	5.249773	2.75492	0	2.027436	2.31553
实际凸度	-912.999	-8.854024	3025.074	197.779	2795.729
利率增减百分比 ( $\Delta y$ )	0.02%				
债券价格变动百分比 $\left( \frac{\Delta P}{P} \right)$	-0.11%	-0.06%	0.01%	-0.04%	-0.04%
久期解释的部分 $\left( \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial y} (\Delta y) \right)$	-0.10%	-0.06%	0.00%	-0.04%	-0.05%
凸度解释的部分 $\left( \frac{1}{2!P} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right)$	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.01%
久期的影响所占百分比	98.29%	99.97%	0.00%	100.99%	113.73%
凸度的影响所占百分比	1.71%	0.03%	100.00%	-0.99%	-13.73%

根据前面的分析，可赎回债券和可回售债券的久期不能为负，而可赎回债券的凸度在低利率时应该为负值，在高利率时应该为正值，可回售债券的凸度应该为正值。

计算结果和理论分析有一定出入，可能是软件估计误差所致。

值得注意的是，凸度的数值在有的情况下很大，这说明凸度在债券投资中对价格影响很大，不应该简单忽略。这一点在价格变动的百分比分析中很明显，我们发现，在利率上下波动 0.1% 情况下，考虑凸度以后，债券价格的变动幅度对投资损益已经造成很大影响，忽略它就会对投资决策带来重大影响。

参考文献：

- 1 . Black, Fisher, Emanuel Derman and William Toy, 1990, “A One Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options”, *Financial Analysts Journal*, January-February, 33-39.
- 2 . Lin, Hai and Zhenlong Zheng, 2003, Dynamic Behavior of Interest Rates in China, *Chinese Business Review*, Nov., Vol. 2, No. 4.
- 3 . Macaulay ,F.R. ,1938 ,“ Some Theoretic Problems Suggested by the Movement of Interest Rates , Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1856” , National Bureau of Economic Research, Columbia , New York.
- 4 . 林海、郑振龙，《中国利率期限结构：理论与运用》，北京：中国财经出版社，2004。
- 5 . 郑振龙、林海，2004，“中国可转换债券定价研究”，《厦门大学学报（哲社版）》。