

文章编号: 1006-2467(2008)03-0500-04

有交易费用和高阶矩的最优投资组合问题

陈志娟^{1,2}, 叶中行²

(1. 厦门大学 金融系, 厦门 361005; 2. 上海交通大学 数学系, 上海 200240)

摘要: 讨论了有交易费用的、包括偏度和峰度在内的高阶矩约束的多目标最优投资组合选择模型. 将该模型转化为单目标最优化问题, 利用线性逼近的方法讨论了在有交易费用时规划问题的近似转化; 给出了具体算例; 分析了参数对最优目标的影响.

关键词: 最优投资组合; 线性规划; 交易费用; 偏度; 峰度

中图分类号: O 22; F 830.9 **文献标识码:** A

An Optimal Portfolio Selection Model with Transaction Costs under the Constraint of Higher Moments

CHEN Zhi-juan^{1,2}, YE Zhong-xing²

(1. Department of Finance, Xiamen University, Xiamen 361005, China;

2. Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: A portfolio selection model with transaction costs under the constraint of higher moments such as skewness and kurtosis was discussed. The original model was transferred to a single objective optimization model. Using linear approaching method, this model was transferred approximately to a linear programming model. A numerical example was given. Finally, the relationship between the objective and the parameters was discussed.

Key words: optimal portfolio; linear programming; transaction costs; skewness; kurtosis

现代投资理论的核心是投资组合理论, 均值-方差模型^[1,2] 基于资产组合收益率服从联合正态分布, 只涉及到一阶矩(期望)和二阶矩(方差). 但大量实证分析表明^[3], 资产的收益率并非服从正态分布, 而是服从非对称的厚尾分布. 文献[4,5]中的研究表明, 投资者在做出投资组合选择时, 在期望和方差相同情况下绝大多数投资者偏爱具有较大偏度(三阶中心矩)的收益率, 厌恶峰度(四阶中心矩)的, 且峰度比偏度更有影响性. 文献[6]中研究了最优投资组合的智能算法, 但是这类算法需要运行的时间较长.

文献[7]中在带有交易成本的均值-方差模型计算中给出了一个线性规划算法, 文献[8]中研究了有交易费用的均值-绝对离差-偏度的投资组合模型, 采用线性逼近方法将非光滑规划问题转化为线性规划问题. 本文研究有均值方差、偏度、峰度约束的最优投资组合模型, 由于该模型通常没有解析解, 本文考虑了该问题的数值解法.

1 模型描述

首先假设市场无税收且不允许卖空, 资产数量

收稿日期: 2007-01-20

基金项目: 国家重点基础研究发展规划(973)项目(2007CB814903); 国家自然科学基金资助项目(70671069)

作者简介: 陈志娟(1979-), 女, 山东威海人, 博士, 主要从事金融工程、金融数学的研究. 叶中行(联系人), 男, 教授, 博士生导师,

电话(Tel.): 021-54743148 - 2406; E-mail: zxye@sjtu.edu.cn.

因此,有

$$l(s) = l_0(s) + l_{-1}(s) + l_{-2}(s) + \dots + l_{-k}(s) \quad s \geq 0$$

设 $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}$ 为第 j 种资产收益率的观察数据,作数值计算时用子样矩代替母体矩,从而有

$$r_j = EX_j = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x_{jm}$$

$$E(X_p - EX_p) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^n w_j (x_{jm} - r_j)$$

记

$$\sum_{j=1}^n w_j (x_{jm} - r_j) = s_m$$

因此,规划问题 P_1 可以近似转换为规划问题 P_2 :

$$\min O_2(w) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M l_j(s_m)$$

$$\text{s. t. } EX_p = \sum_{j=1}^n w_j r_j - \sum_{j=1}^n c_j / w_j - w_j^0 / \quad r_0$$

$$r_0 \geq 0, \quad s_m \geq 0, \quad r_j = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x_{jm}$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = w \mathbf{1} = 1 \quad w_j \geq 0$$

在规划问题 P_2 条件中含有绝对值,存在不光滑性,采取规划问题中常用的增添未知变量办法来解决其中含有绝对值的不光滑性问题. 设:

$$b_j^+ = \frac{1}{2} / w_j - w_j^0 / + \frac{1}{2} (w_j - w_j^0)$$

$$b_j^- = \frac{1}{2} / w_j - w_j^0 / - \frac{1}{2} (w_j - w_j^0)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

于是把规划问题 P_2 进一步转化为 P_3 :

$$\min O_3(w) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M l_j(s_m)$$

$$\text{s. t. } EX_p - \sum_{j=1}^n c_j (b_j^+ + b_j^-) \quad r_0 \quad r_0 \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = w \mathbf{1} = 1 \quad w_j \geq 0, \quad s_m \geq 0$$

$$b_j^+ - b_j^- = w_j - w_j^0 \quad b_j^+ \geq 0, \quad b_j^- \geq 0$$

$$b_j^+ b_j^- = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

并且规划问题 P_2 和 P_3 有如下关系的命题.

命题 1 如果 (w_1, w_2, \dots, w_n) 是规划问题 P_2 的最优解,当且仅当存在 $b_j^+ \geq 0, b_j^- \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$,使得 $(w_1, w_2, \dots, w_n, b_j^+, b_j^-)$ 也是规划问题 P_3 的最优解.

为了消除规划问题 P_3 条件中出现的 $b_j^+ b_j^- = 0$ 这个二次约束条件,下面把规划问题 P_3 的二次约束条件放大,进一步转化为 P_4 :

$$\min O_4(w) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M l_j(s_m)$$

$$\text{s. t. } EX_p - \sum_{j=1}^n c_j (b_j^+ + b_j^-) \quad r_0 \quad r_0 \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = w \mathbf{1} = 1 \quad w_j \geq 0, \quad s_m \geq 0$$

$$b_j^+ - b_j^- = w_j - w_j^0 \quad b_j^+ \geq 0, \quad b_j^- \geq 0$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

规划问题 P_3 和 P_4 之间有如下关系的命题.

命题 2 如果 $(w_1, w_2, \dots, w_n, b_j^-, b_j^+)$ 是规划问题 P_4 的最优解,则一定存在 $\tilde{b}_j^+ \geq 0, \tilde{b}_j^- \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$,使得 $(w_1, w_2, \dots, w_n, \tilde{b}_j^-, \tilde{b}_j^+)$ 也是规划问题 P_3 的最优解.

证明 如果 $(w_1, w_2, \dots, w_n, b_j^-, b_j^+)$ 是规划问题 P_4 的最优解,则:

(1) 若 $b_j^+ b_j^- = 0$, 则设 $\tilde{b}_j^+ = b_j^+, \tilde{b}_j^- = b_j^-$, 因此 $(w_1, w_2, \dots, w_n, \tilde{b}_j^-, \tilde{b}_j^+)$ 也是规划问题 P_3 的最优解.

(2) 若 $b_j^+ b_j^- > 0$, 则设:

$$\tilde{b}_j^+ = \begin{cases} b_j^+ - b_j^- & b_j^+ > b_j^- > 0 \\ 0 & 0 < b_j^+ < b_j^- \\ 0 & b_j^+ > b_j^- > 0 \end{cases}$$

$$\tilde{b}_j^- = \begin{cases} 0 & b_j^+ > b_j^- > 0 \\ b_j^- - b_j^+ & 0 < b_j^+ < b_j^- \\ 0 & b_j^+ > b_j^- > 0 \end{cases}$$

因此, $\tilde{b}_j^+ \tilde{b}_j^- = 0$, 很明显, $\tilde{b}_j^+ + \tilde{b}_j^-$ 和 $\tilde{b}_j^+ - \tilde{b}_j^-$ 是满足规划问题 P_3 的条件的.

按这种构造方法, $(w_1, w_2, \dots, w_n, \tilde{b}_j^-, \tilde{b}_j^+)$ 显然是规划问题 P_3 的可行解,当然,规划问题 P_3 的可行解和最优解也是规划问题 P_4 的可行解. 由于规划问题 P_3 和 P_4 的目标函数一样,可以证明 $(w_1, w_2, \dots, w_n, \tilde{b}_j^-, \tilde{b}_j^+)$ 也是规划问题 P_3 的最优解. 命题成立.

为了方便以后的计算和编程以及实际中的应用,本文将规划问题 P_4 进一步转化为 P_5 :

$$\min O_5(w) =$$

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (k_{i-1} - k_i) \quad i_m + k_{-1} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M 0_m$$

$$\text{s. t. } EX_p - \sum_{j=1}^n c_j (b_j^+ + b_j^-) \quad r_0 \quad r_0 \geq 0$$

$$i_m \geq 0, \quad i_m - \left[\sum_{j=1}^n w_j (x_{jt} - r_j) - a_i \right] \geq 0$$

$$m = 1, 2, \dots, M; \quad i = -k, -k+1, \dots, -1$$

$$r_j = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x_{jm}, \quad b_j^+ - b_j^- = w_j - w_j^0$$

$$b_j^+ \geq 0, \quad b_j^- \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = w \mathbf{1} = 1 \quad w_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

规划问题 P₄ 和 P₅ 之间同样存在下列命题.

命题 3 如果 $(w_1, w_2, \dots, w_n, b_j^-, b_j^+)$ 是规划问题 P₄ 的最优解,当且仅当存在 $i_m, i = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots, M$,使得 $(w_1, w_2, \dots, w_n, b_j^-, b_j^+, i_m)$ 也是规划问题 P₅ 的最优解.

证明 如果 $(w_1, w_2, \dots, w_n, b_j^-, b_j^+)$ 是规划问题 P₄ 的最优解,则令

$$i_m = \begin{cases} \sum_{j=1}^n w_j (x_{jm} - r_j) - a_i \\ \sum_{j=1}^n w_j (x_{jm} - r_j) > a_i \\ 0 \end{cases} \quad (1)$$

因此, $(w_1, w_2, \dots, w_n, b_j^-, b_j^+, i_m)$ 就是规划问题 P₅ 的一个可行解;且有:

$$O_4(w_1, w_2, \dots, w_n, b_j^-, b_j^+) = O_5(w_1, w_2, \dots, w_n, b_j^-, b_j^+, i_m)$$

考虑到 x^2, x^3 和 x^4 在 $(-\infty, 0)$ 上一阶导函数的单调性及其与斜率的关系可知:

$$k_{i-1} - k_i = \left\{ \frac{a_i^2 - a_{i-1}^2}{a_i - a_{i-1}} - \frac{a_i^2 - a_{i+1}^2}{a_i - a_{i+1}} \right\} - \left\{ \frac{a_i^3 - a_{i-1}^3}{a_i - a_{i-1}} - \frac{a_i^3 - a_{i+1}^3}{a_i - a_{i+1}} \right\} + \left\{ \frac{a_i^4 - a_{i-1}^4}{a_i - a_{i-1}} - \frac{a_i^4 - a_{i+1}^4}{a_i - a_{i+1}} \right\} > 0$$

$i = -k, -k + 1, \dots, -1$

由 $i_m \geq 0$ 以及 $k_{-1} = a_{-1} - a_{-2}^2 + a_{-1}^3 > 0$ 可知,若 $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n, i_m)$ 是规划问题 P₅ 的一个最优解,则式(1)成立.因此有

$$O_5(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n, b_j^-, b_j^+, i_m) = O_4(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n, b_j^-, b_j^+)$$

从而有

$$O_4(w_1, w_2, \dots, w_n, b_j^-, b_j^+) = O_5(w_1, w_2, \dots, w_n, b_j^-, b_j^+, i_m) = O_5(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n, b_j^-, b_j^+, i_m) = O_4(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n, b_j^-, b_j^+) = O_4(w_1, w_2, \dots, w_n, b_j^-, b_j^+)$$

由此可得, $(w_1, w_2, \dots, w_n, b_j^-, b_j^+, i_m)$ 也是规划问题 P₅ 的最优解,而 $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n, b_j^-, b_j^+)$ 也是规划问题 P₄ 的最优解,命题成立.

3 计算实例

本文随机挑选了通信行业 8 家上市公司的股票 2006-05-08 ~ 2006-06-02 共 20 个交易日数据,利用 $r_j = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x_{jm}$ 得到统计平均收益率如下:G 深桑

达为 0.009 88, *ST 深泰为 0.018 49, *ST 科健为 0.019 14, G 中兴为 0.001 5, G 特发为 0.004 47, G 汇源为 0.018 92, G 金马为 0.025 57, *ST 重实为 0.011 79.

本文取 $\alpha = 1$,假设这 8 份资产交易费用向量 $c = (0.003, 0.004, 0.002, 0.005, 0.004, 0.002, 0.003, 0.005)$

设初始的投资组合为

$$w^0 = (0.1, 0.11, 0.14, 0.15, 0.13, 0.07, 0.18, 0.12)$$

由规划问题 P₆:

$$\begin{aligned} \max r_m &= \sum_{j=1}^8 w_j r_j - \sum_{j=1}^8 c_j (b_j^+ + b_j^-) \\ \text{s.t. } b_j^+ - b_j^- &= w_j - w_j^0, \quad b_j^+ \geq 0, \quad b_j^- \geq 0 \\ r_j &= \frac{1}{20} \sum_{t=1}^{20} x_{jt}, \quad \sum_{j=1}^8 w_j = 1 \\ w_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 8 \end{aligned}$$

求得 $r_m = 0.020 08$. 当给定 $\alpha = 10^{-4}$ 时,可取 $\beta = 0.016$. 将数据参数设置为低于最大的期望值 r_m ,比如设 0.02,由规划问题 P₅ 得到最优解为

$$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8) = (0.000 0, 0.111 5, 0.385 6, 0.034 1, 0.000 0, 0.222 7, 0.246 2, 0.000 0)$$

4 目标函数值与参数之间的关系

利用前面通信行业的 8 家上市公司的数据,观察目标函数 O 对于参数 r 、 β 的依赖关系.给定一个 α , O 是 r 、 β 的函数,可以在 (r, β, O) 三维空间画出图形. $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 5$ 的曲线如图 1 所示.

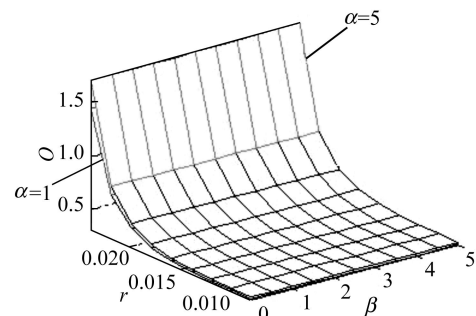


图 1 目标函数与参数关系图

Fig. 1 The relationship between the objective and the parameters

由图可见(这里目标函数值都乘以 1 000,当 $1 < \alpha < 5$ 时,所得曲面位于上面两曲面之间):当期望值 r 较小时,不同 α 值所对应的目标函数值 O 相

(下转第 507 页)

处收敛到 (y_0, z_0) , 且在空间 $L^s(\cdot) \times L^t(\cdot)$ 上强收敛到 (y_0, z_0) . 其中, $1 < s < p^*$, p^* 为 p 的临界指标; $1 < t < q^*$, q^* 为 q 的临界指标. 由引理 2 知 $(y_0, z_0) \in U_0$, 即对任意的 $(\phi, \psi) \in B_r, J_0(y_0, z_0)(\phi, \psi) = 0$ 成立. 因此, $J_k(y_k, z_k) - J_0(y_0, z_0), (y_k - y_0, z_k - z_0) = 0$. 采用和式 (7) 同样的估计, 可知 (y_k, z_k) 在 B_r 中强收敛到 (y_0, z_0) .

定理 4 若边界函数序列 (g_k, h_k) 在迹空间 $W^{1-\frac{1}{p}, p}(\partial\Omega) \times W^{1-\frac{1}{q}, q}(\partial\Omega)$ 中强收敛到 (g_0, h_0) , 则椭圆问题 (1) 的解集的上极限非空, 且在 $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ 的范数拓扑意义下有 $V_k \rightarrow V_0, k \rightarrow \infty$.

证明 由引理 1, 对任意固定 $k \in \mathbb{N}$, 解集 U_k 非空, 又由引理 2, 存在常数 $r > 0$, 使得对所有 $k \in \mathbb{N}$ 有 $U_k \subset B_r$ 成立. 于是满足条件 $(y_k, z_k) \in U_k$ 的序列 $\{(y_k, z_k)\}$ 在解空间 $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ 中是弱紧的, 故有 $\limsup U_k$ 非空. 由定理 1, 泛函序列 $J_k(y, z)$ 在 B_r 中一致收敛到 $J_0(y, z)$; 由定理 2, 在 $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ 的弱拓扑意义下有 $\limsup U_k \subset U_0$ 成立; 再由定理 3, 在 $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ 的强拓扑意义下有 $\limsup U_k \subset U_0$ 成立, 即 $U_k \rightarrow U_0, k \rightarrow \infty$.

既然有 $V_k = U_k + (T_1 g_k, T_2 h_k)$, 可知在

$W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ 的强拓扑意义下有 $\limsup V_k \subset V_0$ 成立, 即 $V_k \rightarrow V_0, k \rightarrow \infty$.

参考文献:

[1] 李娟. 包含 2 个临界指数的奇异椭圆方程组正解的存在性[J]. 上海交通大学学报, 2006, 40(11): 1991 - 1996.
 LI Juan. The existence of positive solutions for singular elliptic systems involving two critical exponents[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2006, 40(11): 1991 - 1996.
 [2] Bors D, Walczak S. Nonlinear systems with variable boundary data[J]. *Nonlinear Analysis*, 2003, 52: 1347 - 1364.
 [3] Adams R. Sobolev space[M]. New York: Academic Press, 1975.
 [4] Aubin J L, Frankowska H. Set-valued analysis[M]. Boston: Birkhauder, 1990.
 [5] Ghoussoub N, Yuan C. Multiple solutions for quasilinear PDEs involving the critical sobolev and hardy exponents[J]. *Transaction of the American Mathematical Society*, 2000, 352(12): 5703 - 5743.
 [6] Struwe M. Variational methods[M]. Berlin: Springer, 1990.

(上接第 503 页)

差微小, 随着 r 的增大, 目标函数值相差增大, 且 越大目标函数值越大, 但是差别不明显. 目标函数值 o 随 r 的变化基本不变. 整体上, 对每一个 r 值, 目标函数值 o 随着 r 的增大而增大, 图像在 r 较小时比较平缓, 随着 r 的增大变得越来越陡. 这说明当投资者所设定的期望值远离市场最大可能收益 r_m , 面临的风险较小, 当投资者所设定的期望值越接近市场最大可能收益, 面临的风险就较大.

参考文献:

[1] Markowitz H M. Portfolio selection [J]. *Journal of Finance*, 1952, 7(1): 77 - 91.
 [2] Markowitz H M. Portfolio selection: Efficient diversification of investments [M]. New York: John Wiley & Sons, 1959.
 [3] Pornchai C, Krishnan D, Shahid H, et al. Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets [J]. *Journal of Banking and Finance*, 1997, 21: 143 - 167.

[4] Samuelson P. The fundamental approximation of theorem of portfolio analysis in terms of means, variance and higher moments [J]. *Review of Economic Studies*, 1970, 37: 537 - 542.
 [5] Hwang S, Satchell S E. Modelling emerging market risk premia using higher moments [J]. *The International Journal of Finance and Economics*, 1999, 4: 271 - 296.
 [6] 王雪峰, 叶中行. 基于 PSO 的最优投资组合计算方法 [J]. 工程数学学报, 2007, 24(1): 31 - 36.
 WANG Xue-feng, YE Zhong-xing. A computation approach based PSO for optimal portfolio [J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2007, 24(1): 31 - 36.
 [7] Li Z F, Wang S Y, Deng X T. A linear programming algorithm for optimal portfolio section with transaction costs [J]. *International Journal of Systems Science*, 2000, 31: 107 - 117.
 [8] Liu S, Wang S Y, Qiu W. Mean-variance-skewness model for portfolio selection with transaction cost [J]. *International Journal of Systems Science*, 2003, 34(4): 255 - 262.

