第 15 卷第 6 期
2012 年 6 月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol. 15 No. 6
Jun. 2012

指令配置:微观结构与资产配置的统一框架①

郑振龙，刘杨树
(厦门大学经济学院金融系，厦门 361005)

摘要: 本文将资产配置的方法推广到限价指令簿市场上. 在投资者效用函数符合指数效用的假设下，考虑了限价指令簿中委托的执行概率，将限价指令簿的边际订单递交纳入到资产配置的框架中. 首先，推导出投资者在限价指令市场上对市价委托指令和限价委托指令配置的解析式，从而将资产定价模型与限价指令簿的微观结构理论模型统一到一个模型中. 其次，还证明了传统的单资产 CAPM 是本文模型在只能递交边际市价委托时的一个特例.

关键词: 指令递交; 指令配置; 资产配置

中图分类号: F830. 91　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1007 - 9807(2012) 06 - 0040 - 09

0 引 言

近年来，指令驱动市场因其透明的交易机制和低廉的交易费用，逐渐替代传统的做市商市场，成为交易所市场发展的趋势. 在纯限价指令市场上，交易者通过递交限价委托来进行交易. 限价委托分为积极的限价委托与消极的限价委托，它们的成交都遵循价格优先和时间优先的原则. 具体而言，积极的限价委托指的是交易者所报出的买价(卖价) 高于(低于) 限价指令簿上的最低(最高) 卖价(买价) ; 消极的限价委托指的是交易者所报出的买价(卖价) 低于(高于) 限价指令簿上的最高(最低) 买价(卖价) . 由于限价指令交易制度的规则简明扼要，它不仅成为多数股票市场的主要或者部分②交易制度，还成为交易所内衍生品市场所采用的主要交易制度. 在一个纯限价指令市场上，投资者在投资时，除了要考虑如何进行资产配置外，还必须考虑如何提交限价委托来完成交易以最大化自己的效用. 然而，从当前金融学理论研究的角度来看，资产配置理论与微观结构理论作为两个经典的金融理论分支，它们之间是相互割裂的. 一方面，资产配置理论[1-4] 指出给定资产分布的信息如何在资产之间进行配置，但在微观的操作层面，它并没有说明具体的买卖应该怎样操作. 另一方面，市场微观结构理论关注的主要是指令递交和处理的问题，但它没有说明要如何对自己的资产进行配置. 而从现实中来看，既然投资者总是面临买卖多少和如何买卖的问题，那么金融理论就应当对这个问题做出解答. 虽然，目前在国际上已经有学者将订单流与资产收益率联系在一起[5,6]，但目前还没有学者将市场微观结构的订单配置与资金层面的资产配置这两者统一起来，因此对限制指令簿市场上的投资者而言，当前的模型无法产生直接可操作的决策.

在对限价指令簿的指令递交的研究中，早期的文献集中在讨论信息不对称对市场上的投机者的行为的影响上[7,8]; 之后，不少文章关注限价指令市场上的微观均衡问题，包括静态均衡[9-15]. 在以上这些研究中，学者们大多从市场微观结构

① 收稿日期: 2011 - 03 - 24; 修订日期: 2011 - 10 - 10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70971114) ; 国家青年科学基金资助项目(71101121) ; 福建省自然科学基金资助项目(2009J01316) .
作者简介: 郑振龙(1966—) ，男，福建平潭人，博士，教授，博士生导师. Email: zlzheng@ xmu. edu. cn
② 如 NYSE 以及 NASDAQ 都部分使用了限价指令簿交易机制来降低市场交易成本，而新兴市场如中国大陆则完全采用限价指令的交易制度.

的理论出发对投资者递交委托的效用函数进行设置，进而得出解析解或用数值方法进行求解，然而这些模型的假设与资产配置模型有较大差别，无法融入经典的资产配置模型框架中，从而使得资产配置和指令递交被人为的分割成两个独立研究的理论. 在国内，也有不少学者对指令簿的问题进行研究，比如，陈炜和屈文洲[16]认为订单持续期能够反映市场流动性、投资者成交意愿等变量，是一个非常重要的微观结构指标. 陈收，李双飞和黎传国[17]研究了订单的递交对于股票价格的影响，发现订单对股票价格的影响呈现出非线性关系，并且，买单的影响大于卖单的影响. 以上国内学者研究主要集中在订单流的信息含量以及对股票价格的影响上.

本文的研究目标与之前的研究有所不同，将着重刻画投资者如何同时考虑资产配置与订单配置. Parlour，Seppi[18]认为 "当前微观结构中的最优交易和价格发现问题往往与资产选择以及资产定价理论相分离，虽然这种做法在数学上方便求解，但这是一种误导，因为在现实中投资者进行的交易决策总是放在资产配置的选择之后，作为资产配置的一个步骤. "因此，将指令提交策略纳入资产定价的框架下进行研究能够联合资产配置理论与微观市场结构理论，将资产配置理论纳入到实际可操作的范围，而且是进一步联合微观价格发现机制与资产定价的理论基础. 虽然，Parlour，Seppi[18]提出了一个多期动态的多资产指令配置框架，但是，由于其时间维度与空间维度的复杂性，他们并没有做进一步的深入讨论. 并且，之后并没有学者解决 Parlour，Seppi[18]所提出的这个资产配置与指令分配相统一的理论问题. 本文所解决的正是 Parlour，Seppi[18]所提出的这个问题的基础部分，即一个单期静态的资产配置与指令分配相统一的模型. 本模型是基于一个最为基础的单期两资产的资产配置模型，将风险资产的指令递交策略纳入到基础的资产定价框架中，得出市价委托指令与限价委托指令配置的解析解并以此来分析背后的经济学含义. 通过设定在不同价格档上新增限价委托的执行概率，然后计算每个委托的可能获利，最后通过最优化效用函数来确定其最优的指令提交策略. 本文最大的贡献在于: 第一，首次将指令提交策略纳入到资产配置的框架中，并得出指令配置的解析解，从而将微观市场的理论与资产配置的理论有效地结合在一起. 第二，证明了传统的单资产资产配置模型是考虑指令递交后模型的一个特例. 在多资产情况下，指令递交除了取决于风险证券的期望收益和期望方差外，还取决于投资者试图在其他股票的各个价格档所递交委托的情况以及各个股票的限价指令簿之间的相关性.

1　模型假设以及相关变量说明

由于此前并没有学者把市场微观结构与资产配置问题结合起来，因此，本文研究基于最简单的资产定价假设，包括: 投资者可以按同一利率自由借贷，没有卖空限制，没有交易成本. 希望通过这样的假设能够得到一个简单但具有明确经济意义的解析式，为将来的进一步研究作铺垫. 这些假设并不会对结论的分析造成很大的影响，但可以带来解的方便性，并且保证解析解的明确经济意义.

首先，本文假设在时间 $t \sim T$ 之间，投资者只在 t 时刻进行一次递单或撤单操作，并且该操作本身不会影响自身的决策③，之后将在 T 时刻才再次进入市场结算盈亏. 在这种假设下只要考察市场上限价指令簿与投资者的主观预期如何影响投资者的边际递单行为④. 另外假设在整个市场上，只存在两个证券，一个为无风险证券，它在 $t \sim T$ 期间提供 r_f^T 的收益; 另一个为股票，其初始价格为 P_t，在到期时刻 T，其价格服从正态分布 $P_T \sim N(\overline{P}_T, \sigma_T)$. 投资者拥有的初始禀赋为总资产 W_t，其中持有的股票份数为 θ_t，投资者在 t 时刻向 n 档的限价指令簿递交买卖委托$\{\Theta_{ti}^B, \Theta_{ti}^S\}$ $i = 1, \cdots,$

③　这个假设实际上意味着投资者自身所递交的委托指令不影响自身的委托指令执行概率，这个条件在投资者递交的限价指令为边际指令时可以满足.

④　当递出的限价指令包含大量的指令时，投资者自身的递单决策将受到自身递单行为的影响，这种情况有待继续研究，但不是本文的模型所要解决的重点部分.

n. 比如: 投资者在限价指令簿上的第 i 个价格档，递交 2 个买单，则 $\Theta_{ti}^{B} = 2$. Θ_{ti}^{S} 的表示与 Θ_{ti}^{B} 类似. 在模型中，$\{\Theta_{ti}^{B}, \Theta_{ti}^{S}\}$ $i = 1, \cdots, n$ 是投资者的决策变量，代表买卖委托单个数; $\Theta_{Ti}^{B}, \Theta_{Ti}^{S}$ 代表 T 时刻仍然遗留在限价指令簿上的限价委托，可以表示为⑤

$$\begin{aligned} \Theta_{Ti}^{B} &= \Theta_{ti}^{B}(1 - \mathrm{exe}_{Ti}^{B}) \\ \Theta_{Ti}^{S} &= \Theta_{ti}^{S}(1 - \mathrm{exe}_{Ti}^{S}) \end{aligned} \tag{1}$$

其中$\{\mathrm{exe}_{Ti}^{B}, \mathrm{exe}_{Ti}^{S}\}$ $i = 1, \cdots, n$ 代表在第 i 档所递交的买入或卖出委托是否被执行，只有 0，1 两个值分别代表未被执行和被执行，比如

$$\mathrm{exe}_{Ti}^{B} = 1 \tag{2}$$

代表限价买单中的第 i 档上的限价单被执行. 在不同的价格档上，其条件期望为投资者对递交限价委托执行概率的主观判断，记为 Pr_{ti}^{B}, Pr_{ti}^{S}⑥.

$$\mathrm{E}_t(\mathrm{exe}_{Ti}^{B}) = Pr_{ti}^{B} \tag{3}$$

另外，限价指令簿上的价格向量记为 P^{LOB}

$$P^{LOB} = \left.\begin{bmatrix} 10.00 \\ 9.99 \\ \cdots \\ 10.00 - Tick \times (n-1) \end{bmatrix}\right\} n \tag{4}$$

表示在 t 时刻，限价指令簿上有从最高 10.00 元到最低 $10.00 - Tick \times (n-1)$ 元⑦的 n 个价格档. 其中，P_i^{LOB} 代表第 i 档的价格，并且 $P_i^{LOB} = P_{i+1}^{LOB} + Tick \times 1$.

2 投资者效用最大化下的指令配置

假设投资者的初始禀赋为 W_t，其中初始风险资产的市值为 $\theta_t P_t$，剩余的现金为 B_t，风险资产不分红⑧. 投资者要关心的是如何根据自己的信息集进行操作，以便在 T 时刻，其总资产为其带来的效用最大. 效用函数符合 CARA 的效用形式

$$\begin{aligned} U &= -\mathrm{e}^{-aW_T} \\ W_t &= \theta_t P_t + B_t \end{aligned} \tag{5}$$

其中，a 为绝对风险厌恶系数. 在 T 时刻，投资者的资产可以写为

$$\begin{aligned} W_T = {} & (B_t - \sum_{i=1}^{n} \Theta_{ti}^{B} P_i^{LOB})(1 + r_f^T) + \\ & (\theta_t - \sum_{i=1}^{n} \Theta_{0i}^{S}) P_T + \sum_{i=1}^{n} \Theta_{ti}^{B} \mathrm{exe}_{Ti}^{B} P_T + \\ & \sum_{i=1}^{n} \Theta_{ti}^{B}(1 - \mathrm{exe}_{Ti}^{B}) P_i^{LOB}(1 + r_f^T) + \\ & \sum_{i=1}^{n} \Theta_{ti}^{S} \mathrm{exe}_{Ti}^{S} P_i^{LOB} + \sum_{i=1}^{n} \Theta_{ti}^{S}(1 - \mathrm{exe}_{Ti}^{S}) P_T \end{aligned} \tag{6}$$

等式(6) 右边的各项都具有一定的经济含义. 其中，第一项代表: 在 t 时刻，投资者递交买入限价委托后遗留的现金部分，它们在 T 时刻所获得的本金以及 r_f^T 比例收益的总和⑨. 若此项中 $(B_t - \sum_{i=1}^{n} \Theta_{ti}^{B} P_i^{LOB})(1 + r_f^T)$ 为负，则表明投资者自有资本不够，必须进行借贷. 第二项代表: 在 t 时刻，投资者递交卖出限价委托后遗留的股票在 T 时刻所获得的股息和股本的总价值. 同样，若此项中$(\theta_t - \sum_{i=1}^{n} \Theta_{ti}^{S})$ 为负，表明投资者需要借股票来卖空，这样他必须在 T 时所归还的股票和股息总价值为$(\theta_t - \sum_{i=1}^{n} \Theta_{ti}^{S}) P_T$. 第三项代表: 在 $t \sim T$ 时刻间，在买方的限价指令簿上已经成交的买入限价委托的回报. 第四项代表: 在 $t \sim T$ 时刻内，在买方的限价指令簿上尚未被成交的买入限价委托，其将仍然获得相应的无风险利息. 第五项代表: 在 $t \sim T$ 时刻间，在卖方的限价指令簿上已经成交的卖出限价委托的回报. 第六项代表: 在 $t \sim T$ 时刻内，在卖方的限价指令簿上尚未被成交的卖出限价委托所获得的回报. 再次整理，可以得到一个经济含义截然不同的等式

$$W_T = (W_t - \theta_t P_t)(1 + r_f^T) + \theta_t P_T +$$

⑤ 为了简化模型得到解析解，此处假设在 0 时刻时所递交的指令，在 T 时刻只有成交、不成交两种状态.

⑥ 由于本文考虑边际递单情况，因此此处的 Pr_{ti}^{B}, Pr_{ti}^{S} 完全取决于当前限价指令簿情况.

⑦ $Tick$ 代表最小计价单位，如中国市场一般为 0.01.

⑧ 也可以将 P_T 看成是一种复权价格.

⑨ 实际上递交委托所占用的资金也获得无风险利率，这点将在式(6) 右边的第四项中表现出来.

$$\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{B}\left[\mathrm{exe}_{Ti}^{S}(P_T-(1+r_f^T)P_i^{LOB})\right]+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{s}\left[\mathrm{exe}_{Ti}^{S}(P_i^{LOB}-P_T)\right] \tag{7}$$

等式(7)是通过在等式(6)中将买方限价委托和卖方限价委托进行合并同类项得到的. 可以发现等式(7)右边的第三项和第四项是每个价格档所递交的指令乘以这个指令的机会成本,比如对买入限价委托而言 $\mathrm{exe}_{Ti}^{B}(P_T-(1+r_f^T)P_i^{LOB})$ 代表的是一个买单成交所获得的可能收益减去递交这个买单的成本,卖单方面的解释也与此类似. 因此,把 $\mathrm{exe}_{Ti}^{B}(P_T-(1+r_f^T)P_i^{LOB})$ 用 PG_{Ti}^{B} 来代替,而 $\mathrm{exe}_{Ti}^{S}(P_i^{LOB}-P_T)$ 用 PG_{Ti}^{S} ⑩ 来替代. 给出了期末资产的表达式后,可以得到投资者在 T 期的最优化问题为

$$\max_{\Theta_{0i}^{B},\Theta_{0i}^{S}}\mathrm{EU}=-\exp\left\{-a\mathrm{E}(W_T)+\frac{a^2}{2}\mathrm{Var}(W_T)\right\} \tag{8}$$

由此式(6)可以推导出 W_T 的期望为

$$\mathrm{E}_t(W_t)=(W_t-\theta_tP_t)(1+r_f^T)+\theta_t\overline{P}_T+\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{B}\mathrm{E}_t(PG_{Ti}^{B})+\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{S}\mathrm{E}_t(PG_{Ti}^{S}) \tag{9}$$

其中

$$\mathrm{E}_t(PG_{Ti}^{B})=\mathrm{E}_t(\mathrm{exe}_{Ti}^{B}P_T)-Pr_{ti}^{B}(1+r_f^T)P_i^{LOB}$$
$$\mathrm{E}_t(PG_{Ti}^{S})=Pr_{ti}^{B}P_i^{LOB}-\mathrm{E}_t(\mathrm{exe}_{Ti}^{S}P_T)$$

以及 W_T 的方差为

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(W_T^i)&=\theta_t^2\sigma_T^2+\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{B}PG_{Ti}^{B}+\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{S}PG_{Ti}^{S}\right)+\\&\quad 2\theta_t\mathrm{cov}\left(P_T,\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{B}PG_{Ti}^{B}+\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{S}PG_{Ti}^{S}\right)\\&=\theta_t^2\sigma_T^2+\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{B2}\mathrm{var}(PG_{Ti}^{B})+\\&\quad\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{S2}\mathrm{var}(PG_{Ti}^{S})+\\&\quad 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\Theta_{ti}^{B}\Theta_{tj}^{B}\mathrm{cov}(PG_{Ti}^{B},PG_{Tj}^{B})+\\&\quad 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\Theta_{ti}^{S}\Theta_{tj}^{S}\mathrm{cov}(PG_{Ti}^{S},PG_{Tj}^{S})+\\&\quad 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Theta_{ti}^{B}\Theta_{tj}^{S}\mathrm{cov}(PG_{Ti}^{B},PG_{Tj}^{S})+\\&\quad 2\theta_t\left[\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{B}\mathrm{cov}(P_T,PG_{Ti}^{B})+\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{S}\mathrm{cov}(P_T,PG_{Ti}^{S})\right]\end{aligned} \tag{10}$$

投资者要最优化 T 时刻的期望效用,其决策变量为 Θ_{ti}^{B},Θ_{ti}^{S},因此,一阶条件为

$$\frac{\partial\mathrm{EU}}{\partial\Theta_{ti}^{B}}=0,\ \frac{\partial\mathrm{EU}}{\partial\Theta_{ti}^{S}}=0 \tag{11}$$

即

$$\frac{-\mathrm{E}(W_T)+\frac{a}{2}\mathrm{Var}(W_T)}{\partial\Theta_{ti}^{B}}=0$$
$$\frac{-\mathrm{E}(W_T)+\frac{a}{2}\mathrm{Var}(W_T)}{\partial\Theta_{ti}^{S}}=0$$

对 Θ_{ti}^{B} 求偏的推导可得

$$-\mathrm{E}_t(PG_{Ti}^{B})+a\theta_t\mathrm{cov}(P_T,PG_{Ti}^{B})+a\left[\sum_{j=1}^{n}\Theta_{tj}^{B}\mathrm{cov}(PG_{Ti}^{B},PG_{Tj}^{B})+\sum_{j=1}^{n}\Theta_{tj}^{S}\mathrm{cov}(PG_{Ti}^{B},PG_{Tj}^{S})\right]=0$$

整理即

$$\Theta_{ti}^{B}=\mathrm{var}^{-1}(PG_{Ti}^{B})\left\{\frac{\mathrm{E}_t(PG_{Ti}^{B})}{a}-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\Theta_{tj}^{B}\mathrm{cov}(PG_{Ti}^{B},PG_{Tj}^{B})-\sum_{j=1}^{n}\Theta_{tj}^{S}\mathrm{cov}(PG_{Ti}^{B},PG_{Tj}^{S})-\theta_t\mathrm{cov}(P_T,PG_{Ti}^{B})\right\} \tag{12}$$

同理可得

$$\Theta_{ti}^{S}=\mathrm{var}^{-1}(PG_{Ti}^{S})\left\{\frac{\mathrm{E}_t(PG_{Ti}^{S})}{a}-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\Theta_{tj}^{S}\mathrm{cov}(PG_{Ti}^{S},PG_{Tj}^{S})-\sum_{j=1}^{n}\Theta_{tj}^{B}\mathrm{cov}(PG_{Ti}^{B},PG_{Tj}^{S})-\theta_t\mathrm{cov}(P_T,PG_{Ti}^{S})\right\} \tag{13}$$

由式(12)与式(13)可以看出,不论是买入限价委托还是卖出限价委托,其递单都受到几个因素

⑩ PG_{Ti}^{B},PG_{Ti}^{S} 分别代表 T 时刻,在价格档 i 上所遗留下的买方和卖方指令的可能获利(Potential Gain).

的影响: 第一,递单的可能获利的均值和方差; 第二,其它价格档的指令与该档指令的协方差; 第三,该价格档与所持有资产价格的协方差. 发现式(12) 与式(13) 中一些系数与传统的 CAPM 模型非常相似,如果按照 CAPM 模型 beta 系数的定义将式(12) 稍作变换,令

$$\frac{\operatorname{cov}(PG_{Ti}^{B},PG_{Tj}^{B})}{\operatorname{var}(PG_{Ti}^{B})}=\beta_{ij}^{BB}$$
$$\frac{\operatorname{cov}(PG_{Ti}^{S},PG_{Tj}^{B})}{\operatorname{var}(PG_{Ti}^{B})}=\beta_{ij}^{SB} \tag{14}$$
$$\frac{\operatorname{cov}(P_{T},PG_{Ti}^{B})}{\operatorname{var}(PG_{Ti}^{B})}=\beta_{i}^{PB}$$

则式(12) 可以写成

$$\Theta_{ti}^{B}=\frac{\mathrm{E}_{t}(PG_{Ti}^{B})}{a\operatorname{var}(PG_{Ti}^{B})}-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\Theta_{tj}^{B}\beta_{ij}^{BB}-\sum_{j=1}^{n}\Theta_{tj}^{S}\beta_{ij}^{SB}-\theta_{t}\beta_{i}^{PB} \tag{15}$$

其中式(15) 右边的第一部分和传统的 CAPM 模型类似[11],代表期望收益除以方差与风险厌恶系数. 除了右边的第一部分外,后面的部分代表: 在某个价格档上所递交的限价委托受到的其它价格档上所递交限价委托的影响. 因为,在限价指令簿上的不同价格档的委托之间具有一定的相关性,并且它们与证券价格之间也具有一定的相关性,这种相关性体现为两个方面: 首先,不同价格档之间的执行概率具有相关性; 其次,在买方的限价委托被执行后,这些买入指令就都转化为价格相同的证券. 由于对卖出的限价委托 Θ_{ti}^{S},式(13) 同样可以转化为类似式(15) 用 β 表示的形式

$$\Theta_{ti}^{S}=\frac{\mathrm{E}_{t}(PG_{Ti}^{S})}{a\operatorname{var}(PG_{Ti}^{S})}-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\Theta_{tj}^{S}\beta_{ji}^{SS}-\sum_{j=1}^{n}\Theta_{tj}^{B}\beta_{ji}^{BS}-\theta_{t}\beta_{i}^{PS} \tag{16}$$

因此将 $2n$ 个关于 $\{\Theta_{ti}^{B},\Theta_{ti}^{S}\}$, $i=1,\cdots,n$ 的等式联立可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\beta^{BB},\beta^{SB}\\\beta^{BS},\beta^{SS}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta_{t}^{B}\\\Theta_{t}^{S}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{E}_{t}(PG_{T1}^{B})}{a\operatorname{var}(PG_{T1}^{B})}-\theta_{t}\beta_{1}^{PB}\\\cdots\\\dfrac{\mathrm{E}_{t}(PG_{Tn}^{S})}{a\operatorname{var}(PG_{Tn}^{S})}-\theta_{t}\beta_{n}^{PS}\end{bmatrix} \tag{17}$$

其中 $\begin{bmatrix}\beta^{BB},\beta^{SB}\\\beta^{BS},\beta^{SS}\end{bmatrix}$ 中的元素代表的是一个分块矩阵,其对角线元素为 1,如:

$$\beta^{BB}=\begin{bmatrix}1&\beta_{12}^{BB}&\beta_{13}^{BB}&\cdots&\beta_{1n-1}^{BB}&\beta_{1n}^{BB}\\\beta_{21}^{BB}&1&\beta_{23}^{BB}&\cdots&\beta_{2n-1}^{BB}&\beta_{2n}^{BB}\\\beta_{31}^{BB}&\beta_{32}^{BB}&1&\cdots&\beta_{3n-1}^{BB}&\beta_{3n}^{BB}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\beta_{n1}^{BB}&\beta_{n2}^{BB}&\beta_{n3}^{BB}&\cdots&\beta_{nn-1}^{BB}&1\end{bmatrix},$$

$$\beta^{SB}=\begin{bmatrix}1&\beta_{12}^{SB}&\beta_{13}^{SB}&\cdots&\beta_{1n-1}^{SB}&\beta_{1n}^{SB}\\\beta_{21}^{SB}&1&\beta_{23}^{SB}&\cdots&\beta_{2n-1}^{SB}&\beta_{2n}^{SB}\\\beta_{31}^{SB}&\beta_{32}^{SB}&1&\cdots&\beta_{3n-1}^{SB}&\beta_{3n}^{SB}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\beta_{n1}^{SB}&\beta_{n2}^{SB}&\beta_{n3}^{SB}&\cdots&\beta_{nn-1}^{SB}&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\Theta_{t}^{B}\\\Theta_{t}^{S}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Theta_{t1}^{B}\\\vdots\\\Theta_{tn}^{B}\\\Theta_{t1}^{S}\\\vdots\\\Theta_{tn}^{S}\end{bmatrix}$$

由于 $\begin{bmatrix}\beta^{BB},\beta^{SB}\\\beta^{BS},\beta^{SS}\end{bmatrix}$ 矩阵的第 i 行代表着第 i 个价格档的委托与其它价格档委托的关系. 若 $\begin{bmatrix}\beta^{BB},\beta^{SB}\\\beta^{BS},\beta^{SS}\end{bmatrix}$ 矩阵不是满秩的,则必有一个价格档上的委托可以被其余的价格档委托的线性组合所代替,那么这个价格档将成为冗余的价格档,这不符合限价指令簿现实中的经济含义. 因此,假定矩阵 $\begin{bmatrix}\beta^{BB},\beta^{SB}\\\beta^{BS},\beta^{SS}\end{bmatrix}$ 必须是满秩的,则买卖限价委托的解可以写成

$$\begin{bmatrix}\Theta_{t}^{B}\\\Theta_{t}^{S}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta^{BB},\beta^{SB}\\\beta^{BS},\beta^{SS}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{E}_{t}(PG_{T1}^{B})}{a\operatorname{var}(PG_{T1}^{B})}-\theta_{t}\beta_{1}^{PB}\\\cdots\\\dfrac{\mathrm{E}_{t}(PG_{Tn}^{S})}{a\operatorname{var}(PG_{Tn}^{S})}-\theta_{t}\beta_{n}^{PS}\end{bmatrix} \tag{18}$$

---

⑪ 这种形式的 CAPM 请参考 Jonhn H. Cochrane, Asset Pricing, revised edition, 2005, 第 154 页.

式中，$\frac{\mathrm{E}_t(PG_{Ti}^B)}{a\ \mathrm{var}(PG_{Ti}^B)} - \theta_t\beta_i^{PB}$ 代表投资者在第 i 档上所应当递交的委托数必须扣除持有资产头寸带来的影响，$\begin{bmatrix}\beta^{BB},\beta^{SB}\\ \beta^{BS},\beta^{SS}\end{bmatrix}^{-1}$ 代表的是投资者要在各价格档之间进行权衡.

3 多资产订单配置模型

第二部分中，为能清晰地说明订单配置模型的经济含义，选用了单资产模型进行介绍. 在这个部分，将通过一系列扩展，表明单资产的订单配置模型可以扩展到多资产上.

首先，式(8)的目标函数中

$$\max_{\Theta_{0i}^{Bm},\Theta_{0i}^{Sm}} \mathrm{EU} = -\exp\left\{-a\mathrm{E}(W_T) + \frac{a^2}{2}\mathrm{Var}(W_T)\right\}$$

原先的决策变量 $\{\Theta_{ti}^B,\Theta_{ti}^S\}\ i = 1,\cdots,n$ 现在改为

$$\{\Theta_{ti}^{Bm},\Theta_{ti}^{Sm}\}\ i = 1,\cdots,n,\ m = 1,\cdots,M$$

它代表市场上共 M 个证券中第 m 个证券的限价指令指令簿. 而式(9)可以简单地扩展为

$$\mathrm{E}_t(W_T) = \left(W_t - \sum_{m=1}^{M}\theta_t^m P_t^m\right)(1 + r_f^T) + \sum_{m=1}^{M}\theta_t^m \overline{P}_T^m + \sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{Bm}\mathrm{E}_t(PG_{Ti}^{Bm}) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n}\Theta_{ti}^{Sm}\mathrm{E}_t(PG_{Ti}^{Sm})$$

而相应的期望和方差的式子也类似地进行扩展，由于式子冗长，此处不再展开. 另外，一阶条件相应改为对每个证券 m 的委买和委卖限价指令簿都进行求偏

$$i = 1,\cdots,n,\ m = 1,\cdots,M$$

$$\begin{cases}\dfrac{-\mathrm{E}(W_T) + \frac{a}{2}\mathrm{Var}(W_T)}{\partial\Theta_{ti}^{Bm}} = 0\\[2ex] \dfrac{-\mathrm{E}(W_T) + \frac{a}{2}\mathrm{Var}(W_T)}{\partial\Theta_{ti}^{Sm}} = 0\end{cases}$$

经过推导，可以得出类似式(12)的结论

$$\Theta_{ti}^{Bm} = \mathrm{var}^{-1}(PG_{Ti}^{Bm})\left\{\frac{\mathrm{E}_t(PG_{Ti}^{Bm})}{a} - \sum_{s=1}^{M}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Theta_{tj}^{Bs}\mathrm{cov}(PG_{Ti}^{Bm},PG_{Tj}^{Bs}) - \sum_{s=1}^{M}\sum_{j=1}^{n}\Theta_{tj}^{Ss}\mathrm{cov}(PG_{Ti}^{Bm},PG_{Tj}^{Ss}) - \sum_{s=1}^{M}\theta_t^s\mathrm{cov}(P_T^m,PG_{Tj}^{Bs})\right\} \quad (19)$$

从上面这个式子中，可以发现，对于 M 个资产的市场而言，订单配置模型不仅需要考虑到某只股票自身订单之间的相关性，还要考虑到该股票的限价指令簿与其他股票的限价指令簿以及该股票价格与其他股票的限价指令簿之间的协方差. 虽然，相关的变量增加了，但是由于每一个变量都有对应的一阶条件，因此，待解方程组中的方程也增加了同样的数量，这样仍然可以解出多资产情况下的解.

$$\begin{bmatrix}\Theta_t^{B1}\\ \Theta_t^{S1}\\ \vdots\\ \Theta_t^{BM}\\ \Theta_t^{SM}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m-1} & B_{1m}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m-1} & B_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sm-1} & B_{sm}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm-1} & B_{mm}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{E}_t(PG_{T1}^{B1})}{a\ \mathrm{var}(PG_{T1}^{B1})} - \sum_{s=1}^{M}\theta_t^1\beta_1^{P1Bs}\\ \cdots\\ \dfrac{\mathrm{E}_t(PG_{Tn}^{SM})}{a\ \mathrm{var}(PG_{Tn}^{SM})} - \sum_{s=1}^{M}\theta_t^M\beta_n^{PMSs}\end{bmatrix}$$

其中，$B_{sm} = \begin{bmatrix}\beta^{BsBm},\beta^{SsBm}\\ \beta^{BsSm},\beta^{SsSm}\end{bmatrix}$，代表股票 s 与股票 m 之间的买入与卖出的限价指令的交叉关系，而

$$\beta^{BsBm} = \begin{bmatrix}1 & \beta_{12}^{BsBm} & \cdots & \beta_{1n}^{BsBm}\\ \beta_{21}^{BsBm} & 1 & \cdots & \beta_{2n}^{BsBm}\\ \cdots & & 1 & \cdots\\ \cdots & & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

代表着股票 s 与股票 m 之间的买入限价指令的相关关系. 其中每一个元素

$$\beta_{ij}^{BsBm} = \frac{\mathrm{cov}(PG_{Ti}^{Bs},PG_{Tj}^{Bm})}{\mathrm{var}(PG_{Ti}^{Bs})}$$

代表股票 s 的买入限价指令第 i 档与股票 m 的买入限价指令第 j 档的相关关系. θ_t^m 则代表股票 m 的初始头寸. 虽然，从表面上看，这个式子所要估计的参数非常多，但是实际上，在应用时可以对不同股票间的限价指令的协方差进行一定的合理假设，以方便估计.

4 单资产模型的特例(CAPM)与多资产的特例

以下,证明投资者拥有指数效用函数,资产收益率服从正态分布的两期两资产 CAPM 模型所得出的结论是式(15)的特殊形式. 首先,令模型的假设与 CAPM 的假设一致,即假设红利为 0,并且投资者只递交积极的限价委托⑫,这意味着模型中消极的限价委托的递单被限制为零. 此时投资者递交的指令将在 t 时刻成交,瞬间变为 $\Theta_{ti}^{B}P_t$. 具体而言,在递交积极的限价委托时,主观判断的执行概率 $\mathrm{exe}_{Ti}^{B}=1$. 由于限制了不能递交消极的限价委托,因此当买单低于 P_t 时 $PG_{T_j}^{B}=0$; 当买单高于 P_t 时,将以 P_t 成交. 而主动卖单的分析与买单相似,因此,每个指令可能的获利为

$$
\begin{aligned}
PG_{T_i}^{B} &= \mathrm{exe}_{Ti}^{B}(P_T-(1+r_f^T)P_i^{LOB}) \\
&= P_T-(1+r_f^T)P_t \qquad (20)\\
PG_{Ti}^{S} &= P_t - P_T
\end{aligned}
$$

此时,它们的期望和方差可以简化成

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_t(PG_{Ti}^{B}) &= \mathrm{E}_t(P_T)-(1+r_f^T)P_t \\
&= P_t(\mathrm{E}_t(r_p)-r_f^T) \qquad (21)\\
\mathrm{E}_t(PG_{Ti}^{S}) &= P_t-\mathrm{E}_t(P_T) \\
&= P_t(1-\mathrm{E}_t(r_p))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}_t(PG_{Ti}^{B}) &= \mathrm{var}_t(PG_{Ti}^{S}) \\
&= \mathrm{var}(P_T-(1+r_f^T)P) \\
&= \mathrm{var}(P_T) = P_t^2\mathrm{var}(r_p) \qquad (22)
\end{aligned}
$$

为了得到 beta 值,将式(20)以及 $PG_{Tj}^{B}=P_T-(1+r_f)P_t$ 代入式(14),可以得到

$$
\beta_{ij}^{BB}=\frac{\mathrm{cov}(P_T,PG_{Tj}^{B})}{\mathrm{var}(P_T)}=1
$$

$$
\beta_{ij}^{SB}=\frac{\mathrm{cov}(-P_T,PG_{Tj}^{B})}{\mathrm{var}(P_T)}=-1
$$

$$
\beta_i^{PB}=1
$$

将上式与式(21)、(22)代入式(15),可得

$$
\Theta_{ti}^{B}=\frac{P_t(\mathrm{E}_t(r_p)-r_f)}{aP_t^2\mathrm{var}(r_p)}-\theta_t-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i\\ P_j^{LOB}>P_t}}^{n}\Theta_{tj}^{B}+\sum_{\substack{j=1\\ P_j^{LOB}<P_t}}^{n}\Theta_{tj}^{S}
$$

上式中所有的指令都是积极的限价委托,移项并整理可得

$$
\frac{(\mathrm{E}_t(r_p)-r_f)}{a\mathrm{var}(r_p)}=P_t\left[\theta_t+\left(\sum_{\substack{j=1\\ P_j^{LOB}>P_t}}^{n}\Theta_{tj}^{B}-\sum_{\substack{j=1\\ P_j^{LOB}<P_t}}^{n}\Theta_{tj}^{S}\right)\right] \qquad (23)
$$

式(23)右边等于风险资产的当前价格乘以当前持有的风险资产数量与净买入的证券之和⑬,即在 t 时刻所持有的所有风险资产的总价值. 式(23)左边是 CAPM 模型所得到的投资者应持有的风险资产的总价值. 因此,在单资产情况下,CAPM 模型是本文模型在投资者只能递交积极的限价委托情况下的一个特例. 而多资产的情况也是类似,但与经典的 CAPM 在形式上已经有所不同,其具体形式如下

$$
\frac{(\mathrm{E}_t(r_p)-r_f)}{a\mathrm{var}(r_p)}=P_t^m\left[\sum_{s=1}^{M}\beta^{PmPs}\left(\theta_t^s+\sum_{j=1}^{n}\Theta_{tj}^{Bs}-\sum_{j=1}^{n}\Theta_{tj}^{Ss}\right)\right]
$$

从这个式子中可以发现,等式左边依然是投资者在 t 时刻所持有的 m 证券总额. 而等式的右边可以直观的理解为持有量应该与该证券的当前持有量,与其相关的证券的当前持有量,以及与其相关的市场上其他股票的买卖单的递交有关. 得出这个结果的原因在于式(19)中不同股票的限价指令簿之间的相关关系,在只允许递交市价指令时转化为了不同股票价格与价格间的相关关系.

5 结束语

本文基于限价指令市场,将限价委托指令的

⑫ 绝大部分情况下,它等于递交市价委托.

⑬ 由于递交的是边际委托,此处积极的限价委托指令将全部成交.

递交纳入投资者决策中，通过最优化投资者效用函数，得出了问题的解析解. 该结论表明，在一个两期多资产的模型中，投资者的限价委托递交策略不仅与传统的资产配置理论中所需要配置的资产数量息息相关，还与各价格档上指令可能获利的相关性有很大关系. 这意味着限价指令簿上各价格档的指令深度将通过影响指令执行概率，对投资者的指令配置策略产生很大影响. 并且，本文证明了两期单风险资产的 CAPM 模型所得出的结论实际上是本文模型在只考虑积极的限价委托时的一个特例.

由于本文的模型首次将市场上长期投资者的资产配置策略和短期投资者的指令提交策略综合在一个框架内，因此对未来的研究具有重要的意义. 在本文的基础上，研究者可以将指令配置模型深入研究扩展到多期多资产的指令配置模型. 这样指令配置模型就能够为限价指令市场的投资者提供一个既能够考虑资产配置策略，又能够考虑指令提交策略的决策框架.

参 考 文 献:

[1] Markovitz H. Portfolio selection [J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77 – 91.

[2] Sharpe W F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk [J]. Journal of Finance, 1964, 19(3): 425 – 442.

[3] Grossman S J, Stiglitz J E. On the impossibility of informationally efficient markets [J]. The American Economic Review, 1980, 70(3): 393 – 408.

[4] Li D, Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation [J]. Mathmatical Finance 2000, 10(3): 387 – 406.

[5] Easley D, Hvidkjaer S, O'Hara M. Is information risk a determinant of asset returns? [J]. Journal of Finance, 2002, 57(5): 2185 – 2221.

[6] Barber B, Odean T, Zhu Ning. Do retail trades move markets? [J]. Review of Financial Studies, 2009, 22(1): 151 – 186.

[7] Copeland T E, Galai D. Information effects on the bid-ask spread [J]. Journal of finance, 1983, 38(5): 1457 – 1469.

[8] Kyle A S. Continuous auctions and insider trading [J]. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1985, 53(6): 1315 – 1335.

[9] Seppi D J. Liquidity provision with limit orders and strategic specialist [J]. Review of Financial Studies, 1997, 10(1): 103 – 150.

[10] Sandas P. Adverse selection and competitive market making: Empirical evidence from a limit order market [J]. Review of Financial Studies, 2001, 14(3): 705 – 734.

[11] Parlour C A. Price dynamics in limit order markets [J]. Review of Financial Studies, 1998, 11(4): 789 – 816.

[12] Foucault T, Kadan O, Kandel E. Limit order book as a market for liquidity [J]. Review of Financial Studies, 2005, 18(4): 1171 – 1217.

[13] Goettler R L, Parlour C A, Rajan U. Equilibrium in a dynamic limit order market [J]. Journal of Finance, 2005, 60(5): 2149 – 2192.

[14] Goettler R L, Parlour C A, Rajan U. Informed traders and limit order markets [J]. Journal of Financial Economics, 2009, 93(1): 67 – 87.

[15] Rosu I. A dynamic model of the limit order book [J]. Review of Financial Studies, 2009, 22(11): 4601 – 4641.

[16] 陈　炜，屈文洲. 基于订单持续期的投资者订单提交策略研究 [J]. 管理科学学报，2010，13(2): 58 – 65.
Chen Wei, Qu Wenzhou. Study of investors' order placement strategy based on duration [J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 13(2): 58 – 65. (in Chinese)

[17] 陈　收，李双飞，黎传国. 订单差、交易量变化对股票价格的冲击 [J]. 管理科学学报，2010，13(9): 68 – 75.

Chen Shou, Li Shuangfei, Li Chuanguo. Stock price response to order imbalance and change of volume [J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 13(9): 68 – 75. (in Chinese)

[18] Parlour C A, Seppi D J. Limit order markets: A survey [J]. Handbook of Financial Intermediation and Banking, 2008, 5.

Order allocation model: A model combining microstructure theory and asset allocation theory

ZHENG Zhen-long, LIU Yang-shu

Department of Finance, School of Economics, Xiamen University, Xiamen 361005, China

Abstract: This paper extends asset allocation model to order allocation model, which bridges the gap between microstructure theory and asset allocation theory. In particular, by maximizing investor's utility of order submission problem in the same way with solving asset allocation problem, we receive a close-form solution on allocation about order submission. In addition, we prove that CAPM is a special case of our model when submission is constrained to be marginal market order.

Key words: order submission; order allocation; asset allocation

(上接第 39 页)

technical reasons, and is different from the classical batching machine. An integer nonlinear programming is proposed and a heuristic algorithm based on dynamic programming is applied to the total weighted completion time for the new batching machine. The worst case performance of the heuristic algorithm is proved to be at most 3. If any two steps' processing times are the same, the heuristic algorithm can obtain the optimal solution. If any one step's processing time of all the jobs is the same, the worst performance of the heuristic algorithm is proved to be at most 2 and the bound is tight. We also analyze the worst case of the heuristic algorithm for the general case where jobs processing are composed of any step-processing.

Key words: batching machine; bell type annealing furnace; three-step processing time; dynamic programming