

动态风险厌恶、随机贴现因子与资产定价

林海, 郑振龙

(厦门大学 金融系, 厦门 361005)

摘 要: 本文在 Campbell and Cochrane (1998) 和 Brandt and Wang (2001) 的研究基础之上利用随机贴现因子对包含习惯的效用函数中的风险厌恶进行了动态一般化分析, 并探讨了动态风险厌恶、随机贴现因子、资产定价以及消费增长等因素之间的一般化关系。这种一般化关系有助于解释“股权溢价之谜”(Equity Premium Puzzle) 等不合理现象的存在。

关键词: 动态风险厌恶; 随机贴现因子; 资产定价

中图分类号: F016 文献标识码: A 文章编号: 1005-0892 (2003) 09-0005-04

一、文献回顾

自 Markowitz (1959), Sharpe (1964) 以及 Lintner (1965) 提出 CAPM 以来, 资产定价问题一直是金融领域争论与研究的一个焦点。Black (1972) 推导出 CAPM 的一般形式。但是由于 CAPM 建立于对单一因素风险的单期优化的基础之上, 用它来解释现实的资本市场显得过于简单。在多因素的基础之上, Ross (1976) 提出了套利定价原理 (APT), 而 Merton (1973a) 则在考虑多期决策的基础之上引入了基于消费的跨期资产定价模型 (ICAPM)。自此, 基于消费的资产定价模型理论迅速发展, 最终形成了随机贴现因子理论。Campbell (2000) 通过随机贴现因子对资产定价问题进行了分析和回顾, 而 Cochrane (2000) 则将所有的资产定价问题纳入到随机贴现因子的一般框架之中。这些随机贴现因子都和消费效用函数有关。^①

在传统的效用函数的假设前提下, 相对风险厌恶是一个常数。Mehra and Prescott (1985) 在这一条件下发现了“股权溢价之谜”。^②Brennan and Yihong Xia (2000) 通过一个一般均衡模型来解释。Campbell and Cochrane (1998) 通过引入一个有习惯的消费效用函数, 使得相对风险厌恶系数可以发生变动, 并以此来解释“股权溢价之谜”。Brandt and Wang (2001) 在此基础之上考虑了通货膨胀的因素。类似的, Normandin and Pascal (1998) 在消费效用函数中引入了偏好因素。^③

但是在 Campbell and Cochrane (1998) 和 Brandt and Wang (2001) 中, 均假设存在一个代表性消费者的稳定状态, 而且相对风险厌恶系数的对数服从一阶均值回归过程。然而, 实际上消费者并不知道这个稳定的状态, 他们也不关心这个状态。他们只是关心整个环境的不确定性并

根据这个不确定性改变自己的消费投资活动。如果状态是确定的, 消费者就可通过最初最优的决策行为保证自身的相对风险厌恶不会发生变动。因此, 可以合理地假设消费者的相对风险厌恶系数服从一个单位根过程。事实上, 上述两篇文献中接近于 1 的回归系数也为单位根假设提供了合理性证明。这个单位根过程假设不需要对稳定状态进行假设并且可以在不丧失模型解释能力的前提下使参数的估计变得十分容易。

就风险厌恶而言, 许多学者对此都进行了十分深入的研究。Pratt (1964) 对风险厌恶的衡量以及特征进行了开创性的研究, Amihud (1980) 对风险厌恶进行了分解, 将之分成由消费引起的风险厌恶部分和由价格波动率引起的风险厌恶部分, 并对各自的特征和行为进行了研究。Stapleton and Subrahmanyam (1990) 分析了风险厌恶和多期资产价格变动之间的关系, 并推导出资产价格随机游走的充要条件。Zeckhauser and Keeler (1970) 研究了与规模相关的一种风险厌恶形式, 这种风险厌恶实际上是由边际规律造成的。Green and Srivastava (1985) 对套利和风险厌恶之间的关系进行了深入的研究, 指出无套利不仅意味着收益状态的价格为正,^④还意味着消费状态的价格为正。Sundaresan (1983) 利用 Merton (1990) 的方法对绝对风险厌恶和均衡利率之间的关系进行了研究。而 Merton (1980) 和 Klock and Philips (1999) 则分析了价格波动率和风险厌恶之间的关系。

在本文中, 将对有习惯的消费效用函数中的风险厌恶进行动态的一般化分析, 并在此基础上研究资产价格行为。

二、模型

收稿日期: 2003-06-20

作者简介: 林海 (1977-), 男, 福建连江人, 厦门大学金融系 2001 级博士研究生; 郑振龙 (1966-), 男, 福建平潭人, 厦门大学金融系教授, 博士生导师。

1. 模型的提出

假设一个代表性消费者的目标是使其一生中的效用函数 $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t - X_t)$ 最大化, 函数的约束条件为 $W_{t+1} = (W_t - C_t)R_{t+1}$, 其中 W 表示财富水平, C 表示消费水平, R 表示资产总收益率。效用函数的表达式为:

$$U(C_t - X_t) = \frac{(C_t - X_t)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}, \text{ 当 } \alpha > 1$$

$$U(C_t - X_t) = \ln(C_t - X_t), \text{ 当 } \alpha = 1$$

在效用函数中, X_t 表示消费者的习惯, 它是消费者各种历史因素的函数, 是一个外生变量, 随着时间的变化而改变。因此 $\frac{\partial X_t}{\partial C_t} = 0$ 。

为了寻找最优决策行为, 构建贝尔曼动态方程:

$$V(W_t, C_t) = U(C_t - X_t) + \beta E_t V(W_{t+1}, C_{t+1})$$

$$\text{最优化的一阶条件是 } U'(C_t - X_t) = \beta E_t R_{t+1} V_1(W_{t+1}, C_{t+1})$$

$$\text{包络条件为 } V_1(W_t, C_t) = U'(C_t - X_t)$$

$$\text{所以 } U'(C_t - X_t) = \beta E_t R_{t+1} U'(C_{t+1} - X_{t+1})$$

$$E_t \left(\beta \frac{U'(C_{t+1} - X_{t+1})}{U'(C_t - X_t)} R_{t+1} \right) = 1 \quad (1)$$

至此, 随机贴现因子 M_{t+1} 就可以写为 $M_{t+1} = \beta \frac{U'(C_{t+1} - X_{t+1})}{U'(C_t - X_t)}$, 这与传统形式上的随机贴现因子不同。

N 期随机贴现因子就可以表示为:

$$M_{t+N} = \beta^N \frac{U'(C_{t+N} - X_{t+N})}{U'(C_t - X_t)} \quad (2)$$

相对风险厌恶

$$RRA_t = - \frac{C_t U''(C_t - X_t)}{U'(C_t - X_t)} = \alpha \frac{C_t}{C_t - X_t} = \frac{\alpha}{S_t}, \quad S_t = \frac{C_t - X_t}{C_t} \quad (3)$$

相对风险厌恶系数的对数 $\gamma_t = \ln RRA_t = \ln \alpha - \ln \left(1 - \frac{X_t}{C_t} \right) \approx \ln \alpha + \frac{X_t}{C_t}$

在第一期, 消费者尚未形成自己的习惯, 所以可假设 $\gamma_0 = \ln \alpha$ 。因此, 相对风险厌恶系数的对数随着习惯—消费比率 $\frac{X_t}{C_t}$ 的变动而变动。

2. 动态风险厌恶与单位根

一般而言, 消费者倾向于保持自身的习惯, 而且总是喜欢使自身的消费变得尽可能平滑, 不出现太大的波动。如果没有不确定性, 消费者就可以在确定条件下进行最优决策行为, 使习惯—消费比率保持不变。习惯—消费比率之所以发生变动, 是因为存在着不确定性。不确定性意味着我们根据现有信息对将来的预期可能与将来实际情况不一致。随着时间的推移, 我们的预期就会被现实所证实或证伪。如果预期和现实相一致, 我们就不需要改变原先的决策行为。但是如果现实和预期之间存在着差异, 这种差

异就代表了某些新的信息, 我们就必须根据这些信息重新调整我们的决策行为。从这个方面上说, 习惯—消费比率服从于一个单位根过程, 所以相对风险厌恶系数的对数也服从单位根过程。

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t - \varepsilon_{t+1}, \gamma_0 = \ln \alpha, \varepsilon_{t+1} \text{ 为鞅过程, 代表新的信息。}$$

负号表示相对风险厌恶与新信息之间的反向变化关系。当新信息使消费者变得乐观时, 消费者的风险厌恶就下降; 当新信息使消费者变得悲观时, 风险厌恶就上升。

这个表达方式与 Campbell and Cochrane (1998) 存在着两个方面的差异: 首先, 它没有假设稳定状态的存在, 因为一般消费者并不知道这个稳定状态, 而且他们也不关心。稳定状态是一个事后的概念。其次, 他们假设一阶自回归过程, 而本文假设单位根过程。但是他们的自回归系数接近 1 也同时表明单位根假设是合理的。

而且, 他们还在文中进一步假设 ε_{t+1} 只包括消费因素的新信息。Brandt and Wang (2001) 则假设 ε_{t+1} 包括消费和通货膨胀。本文则不对此作任何假设, 而用一个一般性的式子来表示。这样, 本文所得的结论就具有一般性。

假设 G 为一个 $N \times 1$ 向量, 代表 N 个相关因素, H 为一个 $N \times 1$ 向量, 表示敏感性函数。 $\varepsilon_{t+1} = H' (G_{t+1} - E_t G_{t+1})$, H' 为 H 的转置矩阵。一般而言, H_t 与 γ_t 相关, 所以, $\gamma_{t+1} = \gamma_t - H' (G_{t+1} - E_t G_{t+1})$ 。 $E_t G_{t+1}$ 可以用 VAR (m) 方法进行估计: $G_t = A + \sum_{i=1}^m B_i G_{t-i} + \xi_t$, A 为 $N \times 1$ 向量, B_i 为 $N \times N$ 矩阵。

三、一般化分析

1. 动态风险厌恶、随机贴现因子与消费增长

根据 (2),

$$M_{t+N} = \beta^N \frac{U'(C_{t+N} - X_{t+N})}{U'(C_t - X_t)} = \beta^N \frac{U'(C_{t+N} - X_{t+N})^{-\alpha}}{U'(C_t - X_t)^{-\alpha}} = \beta^N \exp (\alpha [\ln (C_t - X_t) - \ln (C_{t+N} - X_{t+N})]) \quad (4)$$

从式子 (3) 可以得到 $\ln (C_t - X_t) = \ln \alpha + \ln C_t - \gamma_t$, 因此 (3) 就可以变成

$$\beta^N \exp (\alpha (\gamma_{t+N} - \gamma_t - (\ln C_{t+N} - \ln C_t))) \quad (5)$$

假定 $g_{t+1} = \ln C_{t+1} - \ln C_t$, 则

$$M_{t+N} = \beta^N \exp (\alpha (\gamma_{t+N} - \gamma_t - (g_{t+1} + g_{t+2} + \dots + g_{t+N}))) \quad (6)$$

$$= \beta^N \exp (-\alpha \sum_{i=1}^N (\varepsilon_{t+i} + g_{t+i})) \quad (7)$$

这就是随机贴现因子、动态风险厌恶和消费增长之间的一般化公式。当 $N=1$ 时,

$$M_{t+1} = \beta \exp (\alpha (\gamma_{t+1} - \gamma_t - g_{t+1})) = \beta \exp (-\alpha (\varepsilon_{t+1} + g_{t+1}))$$

根据 (6) 和 (7), 随机贴现因子的变动方向与风险厌恶的变动方向相同, 而与新信息和消费增长的变动方向相反。这可以从经济意义上进行解释。随着风险厌恶的上升, 代表性消费者越来越倾向于当前的状态, 而不喜欢将

来时间状态，因此将来时间状态的价值就会下跌，因而贴现因子就上升。类似地，随着消费的增长，代表性消费者对将来的预期会越来越乐观，将来时间状态的价值就会上涨，贴现因子下降。

2. 动态风险厌恶、随机贴现因子与资产定价

根据 (1) 及 M_{t+1} 的表达式，

$$E_t(M_{t+1}R_{t+1})=1, \\ E_tR_{t+1}=\frac{1}{E_tM_{t+1}}-\frac{cov_t(M_{t+1}, R_{t+1})}{E_tM_{t+1}} \quad (8)$$

为了简化 (8)，可以使用 Stein 公式。^⑥ R_{t+1} 假设相关因素和收益率 之间为条件联合正态分布。在此条件下，

$$cov_t(M_{t+1}, R_{t+1})=cov_t(\beta \exp(-\alpha(\epsilon_{t+1}+g_{t+1})), R_{t+1}) \\ =E_t(\beta \exp(-\alpha(\epsilon_{t+1}+g_{t+1})))(-\alpha cov_t(\epsilon_{t+1}, R_{t+1})-\alpha cov_t(g_{t+1}, R_{t+1}))$$

$$\text{所以 } E_tR_{t+1}=\frac{1}{E_tM_{t+1}}+\alpha cov_t(\epsilon_{t+1}, R_{t+1})+\alpha cov_t(g_{t+1}, R_{t+1}) \quad (9)$$

而且由于 $\frac{1}{E_tM_{t+1}}=R_t^f$ ， R_t^f 代表无风险利率，

$$E_tR_{t+1}=R_t^f+\alpha cov_t(g_{t+1}, \epsilon_{t+1}, R_{t+1}) \quad (10)$$

我们得到了动态风险厌恶、随机贴现因子、消费增长和资产定价的一个一般化公式。

当 $cov_t(\epsilon_{t+1}, R_{t+1})=0$ ，模型就变成以标准的指数效用函数为基础的资产定价模型， α 代表相对风险厌恶水平。它不能解释股权溢价之谜。但是如果考虑到风险厌恶的动态行为并将指数引入到效用函数中，我们就可以考虑到动态风险厌恶与预期收益率之间的相关关系，从而可以得到合理的 R_t^f 和 α 。

根据 (10)，我们可以观察到代表性消费者的反周期性行为。当消费增长与收益率之间的协方差大于 0 时，资产价格的变动方向与整个经济的变动方向一致。消费者不喜欢这种资产，因为它无法为消费者提供经济衰退的保险，因此必须具有较大的预期收益率才会有人愿意投资于该种资产。当消费增长与收益率之间的协方差小于 0 时，资产价格的变动方向与整个经济环境相反，消费者更愿意投资于该种资产，因此预期收益率也就相对较低。类似地，当动态风险厌恶变动和收益率之间的协方差小于 0 时，^⑧资产的表现同整个经济环境一致，必须具有较高的预期收益率才会吸引消费者进行投资。当动态风险厌恶变动和收益率之间的协方差大于 0 时，资产的表现同经济环境相反，消费者更愿意投资于该种资产，预期收益率较低。

因为 g_{t+1} 也是一个相关因素 而且 $cov_t(g_{t+1}, R_{t+1})=cov_t(g_{t+1}-E_tg_{t+1}, R_{t+1})$ (10) 就可以简化为 $E_tR_{t+1}=R_t^f+\alpha cov_t(H_t \gamma_t+H_t) \gamma_{t+1}-E_tg_{t+1}, R_{t+1})$ ， H_t 是一个 $N \times 1$ 向量，消费影响因素那一列的数值为 1，其余均为 0。

四、计量方法

根据相关因素的 VAR(m)过程，我们可以得到参数 $\psi=$

$(A, B)_{i=1, 2, \dots, m}$ 。在这些参数以及 G 的真实数据的基础上，可以估计出 $\theta=(\beta, \alpha, H)$ 。然后，利用 H_t 的函数形式，计算出动态风险厌恶对每个相关因素的敏感程度。

1. 债券

对贴现式债券而言，期末价值是固定的，而且没有利息收入。^⑨因此我们可以通过转化将它们的期末价值全部变成 1，此时 N 期债券的价格就应该为 E_tM_{t+N} 。对此，我们可以通过最小化下列式子来估计参数：

$$\sum_{t=1}^T (P_t - P_t(\theta)) W \sum_{t=1}^T (P_t - P_t(\theta)) = Q(\theta) \quad (11)$$

P_t 为一个 $K \times 1$ 向量，代表 t 时 N_1 期到 N_k 期的债券价格。 $P_t(\theta) = E_t(M_{t+N_1}(\theta), M_{t+N_2}(\theta), \dots, M_{t+N_k}(\theta)) \psi$ 表示根据信息估计的理论价格，W 为加权平均矩阵。

2. 股票

股票的未来现金流是不确定的，所以我们不能运用与债券相同的估计方法。我们可以使用近年来广泛运用的广义矩方法 (GMM) 进行估计。

因为 $E_t(M_{t+1} \theta R_{t+1})=1$ ，所以 $E_t(M_{t+1} \theta R_{t+1} \otimes Z_t)=1 \otimes Z_t$ ， Z_t 是一个条件工具变量集合^⑩， \otimes 为克罗内克积^⑪。

$E_t(M_{t+1} \theta R_{t+1} - 1) \otimes Z_t = 0$ ，无条件均值 $E_t(M_{t+1} \theta R_{t+1} - 1) \otimes Z_t = 0$ ，假设 $h_{t+1}(\theta) = (M_{t+1} \theta R_{t+1} - 1) \otimes Z_t$ ，我们可以通过最小化下列式子来估计参数 θ ：

$$\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h_{t+1}(\theta)\right) W \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h_{t+1}(\theta)\right) \quad (12)$$

五、结论

本文通过一个动态风险厌恶的简单合理的假设，推导了动态风险厌恶、随机贴现因子以及资产定价之间的一般关系。这个一般关系可以合理解释“股权溢价之谜”以及人们在整个经济环境中的决策行为。最后，本文还对模型实证检验所采用的计量方法进行了简要的分析。对该模型的实证检验是今后的研究方向。

注释：

① 随机贴现因子的一般形式是 $m_{t+1} = \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}$ ， m_{t+1} 为随机贴现因子， β 为常数， $u(c)$ 为效用函数。

② 即获得股票市场上超额收益率所需要的相对风险厌恶系数远远超过人们正常想象的合理范围。

③ 其他用来解释股权溢价之谜的相关研究方法有假设不同的分布，如 Fama and French (1988)，Heaton (1993)；以及考虑市场的不完善，如 Heaton and Lucas (1995)。

④ 关于无套利和资产价格之间的关系，参见 Cochrane (2000)。

⑤ 在他们的文章中，相对风险厌恶系数的对数服从 $\gamma_{t+1} = \bar{\gamma} + \varphi(\gamma_t - \bar{\gamma}) + \varepsilon_{t+1}$ ， $\bar{\gamma}$ 代表稳定状态， $\varphi < 1$ 表示均值回归系数。但是他们

同时为了满足无风险利率相对稳定，也假设 φ 应该接近 1。

⑥ Stein 公式指如果两个随机变量 x 和 y 为联合正态分布，而且 f 是一个变量的可微函数，即 $E(f'(x))$ 存在，那么 $\text{cov}(f'(x), y) = E(f'(x)) \text{cov}(x, y)$

⑦ 因为 $E_t(M_{t+1}R_t^f) = 1$ ，而且 M_{t+1} 独立于 R_t^f ，所以 $E_t M_{t+1} = \frac{1}{R_t^f}$ 。

⑧ 注意，动态风险厌恶的变动与 ε_{t+1} 的变动方向相反。

⑨ 对有定期利息收入的债券而言，因为利息收入是固定的，所以可以通过这种有定期利息收入的债券价格减去利息收入的现值将之转化为等价贴现债券。因此，(11) 可应用于一般的债券。

⑩ 因为 $E_t(M_{t+1}R_{t+1}^f) = E_t(M_{t+1} \times \frac{P_{t+1N}}{P_t}) = \frac{E_t M_{t+1N}}{P_t} = 1$ ，所以 $E_t M_{t+1N} = P_t \frac{1}{E_t M_{t+1N}}$ 。

⑪ 对 GMM 方法的详细讨论，参见 Cochrane (2000)。

⑫ 对克罗内克积的论述参见 Green (1993)。

参考文献：

[1] Amihud, Yakov, 1980, "General Risk Averse and Attitude toward Risks", Journal of Finance, vol 35, 685-691.
 [2] Black, F., 1972, "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing", Journal of Business, 45, July 444-454.
 [3] Black, F. and M. Scholes, 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, 81, 637-654.
 [4] Brandt, Michale W., and Kevin Q. Wang, 2001, "Time Varying Risk Aversion and Unexpected Inflation", Wharton School working paper.
 [5] Brennan, Michael J. and Yihong Xia, 2000, "Stock Price Volatility and the Equity Premium". UCLA working paper.
 [6] Campbell, J. Y., 2000, "Asset Pricing at the Millennium", Journal of Finance, 55, 1515-1567.
 [7] Campbell, J.Y., Andrew W. Lo, and A. Craig M., 1997,

The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press.

[8] Campbell, J. Y. and John H. Cochrane, 1998, "By Force of Habit: a Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior", Harvard University and NBER working paper.

[9] Cochrane, John H., 2000, Asset Pricing, Princeton University Press.

[10] Fama, E. F. and K. R. French (1988), "Permanent and Temporary Components of Stock Prices", Journal of Political Economy, 96, 246-73.

[11] Green, Richard C., and Sanjay Srivastava, 1985, "Risk Aversion and Arbitrage", Journal of finance, vol 40, 257-268.

[12] Green, William H., 1993, Econometric Analysis, Prentice-Hall Inc.

[13] Heaton, J. C. (1993), "The Interaction Between Time-non-separable Preferences and Time Aggregation", Econometrica, 61, 353-85.

[14] Heaton, J. C. and D. J. Lucas (1992), "The Effects of Incomplete Insurance Markets and Trading Costs in a Consumption-based Asset Pricing Model", Journal of Economic Dynamics and Control, 16, 601-20.

[15] Klock, Mark, and Robert F. Philips, 1999, "A Model of Return Volatility with Application to Estimating Relative Risk Aversion", Review of Quantitative Finance and Accounting, vol 13, 249-260.

Lintner, J., 1965, "Security Prices, Risks and Maximal Gains from Diversification", Journal of Finance, 20, 587-615.

[16] Markowitz, H., 1959, "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment", John Wiley, New York.

[17] Mehra, R. and E. Prescott, 1985, "The Equity Premium Puzzle", Journal of Monetary Economics, 15, 145-161.

[18] Merton, R.C., 1973a, "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", Econometrica, 41, 867-887.

Dynamic Risk Aversion, Stochastic Discount Factor and Asset Pricing

LIN Hai&ZHEN ZHEN-long

(Finance Dept. of Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: The paper analyzes the consumption-based asset-pricing problems on a dynamic risk aversion base. Different from Campbell and Cochrane (1998) and Brandt and Wang (2001), which both hypothesize the steady state, this paper suppose that the dynamic risk aversion follows a unit root process of. Also, this paper does not suppose the relevant factors of the forming of consumption habit. So, the result is a general form of the relationship between the asset pricing and dynamic risk aversion. This generalization can help to explain the problems of equity premium puzzle and the people's decision in a whole economic condition. Finally, this paper shows some econometric methods for future empirical tests of this model.

Keywords: Dynamic risk aversion ; Stochastic discount factor ; Asset pricing

责任编辑：封明