

基于高阶矩的金融资产定价和配置

黄文彬 郑振龙

(厦门大学金融系, 福建 厦门 361005)

Asset Pricing and Portfolio Allocation basing on Higher-moments

Wenbin HUANG and Zhenlong ZHENG

(Department of Finance, Xiamen University, Xiamen, Fujian, PRC, 361005)

摘要: 金融资产对数收益常呈现不对称性和厚尾性, 一般不是正态分布, 而均值一方差 CAPM 模型中的系统性风险只考虑二阶矩风险即波动率, 忽略了高阶矩风险, 可能使资产定价和资产配置存在严重的误差。本文考察了偏度和峰度在我国金融资产配置和资产定价中的作用, 发现加入系统性协偏度和协峰度的高阶矩 CAPM 模型能够重新解释我国金融资产风险与收益间的平衡关系, 比均值一方差 CAPM 模型更适合我国的金融市场。

关键词: 高阶矩; 资产定价; 资产配置

中图分类号: F830

Asset Pricing and Portfolio Allocation basing on Higher-moments

Abstract: The financial asset return distributions are often asymmetric and fat-tailed, generally speaking, non-normal. If we use mean-variance CAPM to price and allocate these assets, it will lead serious errors, since mean-variance CAPM systematic risk is only second-moment risk and ignores higher-moment risks. The paper analyzes the actions of skewness and kurtosis on Chinese asset pricing and portfolio allocation, finding that higher-moment CAPMs with systematic co-skewness and co-kurtosis explain the asset risk-return trade-off. They are more suitable for Chinese financial market.

Key words: High Moment; Asset Pricing; Asset Allocation

1 引言

均值一方差 CAPM 模型是金融领域最重要的理论模型之一。均值一方差 CAPM 模型只关心均值和方差, 隐含着收益分布是正态分布或者投资者的效用函数是二次效用函数的假定。但众多文献研究表明大部分金融资产的对数收益并非正态分布, 特别是近十几年对新兴市场的研究发现, 新兴市场的金融资产具有高收益和高波动特征, 以致收益分布呈现不对称性和厚尾性 (常存在负偏度和高峰度)。负偏度使得收益下降概率超过上升概率, 从而增大投资者蒙受损失的可能性; 高峰度又使得极值事件发生的概率增加, 然而投资者对于具有相同概率、相同值的收益和损失感受却完全不同。投资者愿意对与市场具有正协偏度和负协峰度的资产付出风险溢价, 当收益分布具有正协偏度 (负协峰度) 时, 投资者要求较低的收益。同时, 二次效用函数是递增的绝对风险厌恶型效用函数, 这与投资者理性行为的效用理论相矛盾。针对这些问题, 国外很多学者开始提出利用高阶矩 CAPM 模型进行资产定价和配置以纠正均值一方差 CAPM 模型造成的误差。

Kraus^[1]首次在传统的均值一方差 CAPM 模型中加入系统性协偏度重新解释风险-收益间的

平衡关系，发现作为系统性风险的协偏度得到定价。自此以后，将高阶矩纳入风险溢价的研究逐渐展开。但在 Kraus 之后的十几年间，国外学者一般都只关注协偏度定价。直到 1997 年，Fang^[2] 才将偏度和峰度同时纳入定价模型，证明作为系统性风险的协偏度和协峰度都得到定价；Hwang^[3] 利用 17 个新兴市场的股票指数说明偏度和峰度在新兴市场资产定价中的重要作用；Dittmar^[4] 通过美国 20 个行业指数，证明受到偏度和峰度偏好限制的三次多项式非线性随机贴现因子明显优于线性单因子的随机贴现因子；Jondeau^[5] 在对收益分布不做假设的前提下，证明当收益分布较大幅度偏离正态时，基于效用函数三阶和四阶泰勒展开得到的投资组合配置优于均值一方差 CAPM 模型的配置。

关于高阶矩 CAPM 模型的研究大都集中于研究成熟市场的投资者对于偏度和峰度的偏好，只有少数是对新兴市场的研究。特别是我国这种新兴的快速增长的金融市场，这方面的研究不容忽视。目前国内尚无文献完整地探讨高阶矩在我国金融资产定价和配置中的作用，许启发^[6] 主要研究高阶矩波动性建模技术；蒋翠侠和张世英^[7] 采用包括上证指数的五个市场指数通过多目标优化比较基于高阶矩的投资组合，蒋和张的研究并非专门针对我国金融市场，而且多目标优化的缺点是其中参数由外生给定。本文探索的问题是：我国的金融市场是否能够通过另外的风险因子比如偏度和峰度风险得到更好的解释。本文将从高阶矩在我国资产定价和资产配置中的作用考察高阶矩特别是偏度和峰度对我国金融资产的影响。首先，本文对预期效用函数在不同阶泰勒展开^[5] 对申银万国一级行业三个指数进行资产配置，通过四个衡量指标评估不同阶泰勒展开得到的投资组合配置的优劣。这种方法的好处在于参数由投资者风险厌恶偏好内生决定。实证表明，在我国股票市场，预期效用函数的三阶、四阶泰勒展开比均值一方差 CAPM 模型能更好的逼近预期效用函数。其次，本文采用 GMM 方法证明了在我国股票市场协偏度和协峰度作为系统性风险都得到定价，多项式非线性随机贴现因子优于线性单因子随机贴现因子，即高阶矩 CAPM 模型比均值一方差 CAPM 模型更适合我国的金融资产定价。

本文其余部分结构如下：第二部分介绍基本理论；第三部分实证分析；最后一部分给出结论。

2 基本理论

2.1 预期效用理论与阶矩

我们假设代表性投资者的效用函数 $U(\bullet)$ 是关于最终财富 W 的函数，消费者的边际消费为正值且具有递减的绝对风险厌恶和绝对审慎 (Kimball^[8])，这个假设意味着 $U' > 0$ 、 $U'' < 0$ 、 $U''' > 0$ 和 $U^{(4)} < 0$ 。由此可知，代表性投资者偏好正偏度，厌恶负偏度和高峰度。因为负偏度使得收益下降概率超过上升概率，从而增大投资者蒙受损失的可能性；高峰度又使得极值事件发生的概率增加，但投资者对于具有相同概率、相同值的收益和损失感受却完全不同。假设代表性投资者期初的初始禀赋为 1，则效用函数可以直接表示为收益的函数。设效用函数具有 n 阶导数，则在预期收益 $E(R)$ 处效用函数的 n 阶泰勒展开式如下：

$$U(R) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} U^{(k)}[E(R)] [R - E(R)]^k + o(R^n) \quad (1)$$

若方程 (1) 收敛，且收益分布由阶矩唯一确定，那么对方程 (1) 取期望时，就有：

$$\begin{aligned}
E[U(R)] = & U[E(R)] + \frac{1}{2}U^{(2)}[E(R)]\sigma^2(R) + \frac{1}{3!}U^{(3)}[E(R)]\gamma^3(R) \\
& + \frac{1}{4!}U^{(4)}[E(R)]\delta^4(R) + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k!}U^{(k)}[E(R)]E[R - E(R)]^{(k)}
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\sigma^2(R) = E[\{R - E(R)\}^2]$; $\gamma^3(R) = E[\{R - E(R)\}^3]$; $\delta^4(R) = E[\{R - E(R)\}^4]$ 是本文所使用的方差、偏度和峰度，这儿的偏度、峰度和统计上真正的偏度、峰度有所不同。统计上真正的偏度、峰度定义为 $\frac{E[\{R - E(R)\}^3]}{\sigma(R)^3}$ 和 $\frac{E[\{R - E(R)\}^4]}{\sigma(R)^4}$ 。

定义 $N \times N^2$ 的协偏度矩阵 M_3 ：

$$M_3 = E[(\bar{R} - E(\bar{R}))(\bar{R} - E(\bar{R}))' \otimes (\bar{R} - E(\bar{R}))'] = \{s_{ijk}\}$$

$N \times N^3$ 的协峰度矩阵 M_4 ：

$$M_4 = E[(\bar{R} - E(\bar{R}))(\bar{R} - E(\bar{R}))' \otimes (\bar{R} - E(\bar{R}))' \otimes (\bar{R} - E(\bar{R}))'] = \{\kappa_{ijkl}\}$$

其中 $\bar{R}, E(\bar{R})$ 分别是风险资产收益向量与预期收益向量， \otimes 代表克罗克内积。

$$s_{ijk} = E[(R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))(R_k - E(R_k))], \quad i, j, k = 1, 2, \dots, N$$

$$\kappa_{ijkl} = E[(R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))(R_k - E(R_k))(R_l - E(R_l))], \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, N$$

对给定的投资组合的风险资产权重向量 $\bar{X} = (x_1, \dots, x_N)'$ ，利用定义的协偏度、协峰度矩阵及协方差矩阵 M_2 ，可将投资组合的预期收益、方差、偏度与峰度表示成如下形式：

$$E(R_p) = \bar{X}'E(\bar{R}) + x_0R_f \quad \sigma^2(R_p) = \bar{X}'M_2\bar{X}$$

$$\gamma^3(R_p) = \bar{X}'M_3(\bar{X} \otimes \bar{X}) \quad \delta^4(R_p) = \bar{X}'M_4(\bar{X} \otimes \bar{X} \otimes \bar{X})$$

2. 2 最优资产配置理论

我国股票市场经常暴涨暴跌，收益偏离正态分布较大，若投资者利用均值一方差 CAPM 模型进行资产配置，可能会导致较大的失误。本文将预期效用函数在预期最终财富值处用泰勒级数展开，研究效用函数高阶泰勒展开式是否比均值一方差 CAPM 模型更适合我国股票市场的资产配置。

由于指数函数的泰勒展开式在任意点均收敛，而且这种形式的效用函数在研究中经常被使用，因此本文假设消费者具有指数形式的效用函数 $U(W) = -\exp(-\lambda W)$ 。另外，效用函数的三阶、四阶泰勒展开式分别代表偏度和峰度，而五阶及其以上的阶矩，我们暂时还不了解它们具体的经济含义，因此本文只考虑三阶和四阶的泰勒展开式。

假设存在卖空限制下投资者将初始禀赋 1 全部投资于 N 个风险资产上, R_i 和 R_p 分别是风险资产和投资组合的收益, 且 $\sigma(W) = \sigma(R_p)$, $\gamma(W) = \gamma(R_p)$, $\delta(W) = \delta(R_p)$ 。

优化资产配置的问题可以通过求解以下问题得到:

$$\text{Max}E[U(W)] = \text{Max}E[U(1 + \vec{X}\vec{R})], \quad \text{s.t.} \sum_{i=1}^N x_i = 1, x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

优化问题一阶条件的 N 个方程:

$$\frac{\partial E[U(W)]}{\partial x_i} = E[R_i U^{(1)}(W)] = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

预期效用函数的泰勒展开式为:

$$E[U(W)] = E\left[\sum_{k=0}^n \frac{U^{(k)}(\bar{W})(W - \bar{W})^k}{k!}\right] + o(\bar{W}^n) = \sum_{k=0}^n \frac{U^{(k)}(\bar{W})E[(W - \bar{W})^k]}{k!} + o(\bar{W}^n) \quad (5)$$

其中 \bar{W} 是预期期末财富。当预期效用函数泰勒展开式 (5) 中截断阶数 $n = 2$ 时, 就是均值一方差 CAPM 模型; $n = 3$ 时, 为三阶 CAPM 模型; $n = 4$ 时, 为四阶 CAPM 模型。

$U(W) = -\exp(-\lambda W)$ 形式的预期效用函数的四阶泰勒展开式如下:

$$E[U(W)] \approx -\exp(-\lambda E(R_p))\left[1 + \frac{\lambda^2}{2!}\sigma^2(R_p) - \frac{\lambda^3}{3!}\gamma^3(R_p) + \frac{\lambda^4}{4!}\delta^4(R_p)\right] \quad (6)$$

由一阶条件 $\frac{\partial E[U(W)]}{\partial x_i} = 0$ 可得:

$$E(R_i)\left[1 + \frac{\lambda^2}{2!}\sigma^2(R_p) - \frac{\lambda^3}{3!}\gamma^3(R_p) + \frac{\lambda^4}{4!}\delta^4(R_p)\right] = \left[\frac{\lambda}{2!}\frac{\partial\sigma^2(R_p)}{\partial x_i} - \frac{\lambda^2}{3!}\frac{\partial\gamma^3(R_p)}{\partial x_i} + \frac{\lambda^3}{4!}\frac{\partial\delta^4(R_p)}{\partial x_i}\right] \quad (7)$$

通过求解方程 (7) 或者最大化方程 (6), 可以求得最优资产配置 $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 。

2. 3 非线性多项式随机贴现因子

Hansen^[9]认为投资者投资组合问题的解最终可以用如下的欧拉方程表示:

$$E_t[(1 + R_{it+1})m_{t+1}] = 1 \quad (8.1)$$

$$\text{或:} \quad E_t[1 + R_{it+1}] = \frac{1}{E_t[m_{t+1}]} - \text{Cov}_t[1 + R_{it+1}, m_{t+1}]\frac{1}{E_t[m_{t+1}]} \quad (8.2)$$

其中 $m_{t+1} = \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}$ 是随机贴现因子, C_t 和 C_{t+1} 分别是第 t 期和第 $t+1$ 期的消费。

在一价定律下随机贴现因子 m_{t+1} 可以为所有的风险回报定价, 而且在无套利条件下 m_{t+1} 是非

负的。均值一方差 CAPM 模型其实意味着随机贴现因子是线性形式 $m_{t+1} = a + bR_{mt+1}$ 。现在我们假设随机贴现因子只是总财富（消费等于总财富）的函数，将随机贴现因子在 W_t 处泰勒展开

$$m_{t+1} = 1 + \frac{W_t U''(W_t)}{U'(W_t)} R_{mt+1} + \frac{W_t^2 U'''(W_t)}{2! U'(W_t)} R_{mt+1}^2 + \frac{W_t^3 U^{(4)}(W_t)}{3! U'(W_t)} R_{mt+1}^3 + o(W_t^3)$$

因此，随机贴现因子 m_{t+1} 可以用总财富的多项式逼近，关键是要决定多项式逼近的截断阶数。

Bansal^[10]用实际数据来决定逼近阶数，但用数据来决定 m_{t+1} 的截断阶数，会导致数据过度匹配，

且缺乏经济意义上的解释力度。Dittmar^[4]采用 Kimball^[8]偏好理论假设高于三次幂的多项式对定价并非太重要，即隐含地假设风险资产收益和总财富的高次幂（大于 3 次）项的协方差 $\text{cov}(R_i, R_m^n) = 0, n \geq 4$ 。因此有：

$$m_{t+1} = a_0 + a_1 R_{mt+1} + a_2 R_{mt+1}^2 + a_3 R_{mt+1}^3 \quad (9)$$

方程 (9) 是 m_{t+1} 的一个简洁近似，但没有对 m_{t+1} 的系数符号加以任何限制。而由 2.1 中偏好假定可知，随机贴现因子 m_{t+1} 关于线性项递减；二次项递增；三次项递减。为了保证 m_{t+1} 中系数符号与偏好理论一致，不妨将方程 (9) 改为 $m_{t+1} = d_0^2 - d_1^2 R_{mt+1} + d_2^2 R_{mt+1}^2 - d_3^2 R_{mt+1}^3$ ，其中 $a_0 = d_0^2 > 0$ 、 $a_1 = -d_1^2 < 0$ 、 $a_2 = d_2^2 > 0$ 和 $a_3 = -d_3^2 < 0$ 。

这里的随机贴现因子 m_{t+1} 有两大优点。首先 m_{t+1} 没有考虑效用函数的具体形式，同时又抓住了金融资产数据中的非线性形式。其次是根据 2.1 中偏好假定来决定随机贴现因子 m_{t+1} 中展开式的阶数和系数的符号。将 m_{t+1} 泰勒展开式代入 (8.2) 中，则预期收益和总财富收益的不同次幂的协方差有关。线性的随机贴现因子只考虑预期收益与总财富的协方差关系，与均值一方差 CAPM 模型相一致。同样的，非线性三次多项式随机贴现因子与四阶 CAPM 模型^[2,3]相一致；当去掉三次幂项后 $m_{t+1} = a_0 + a_1 R_{mt+1} + a_2 R_{mt+1}^2$ 的二次多项式随机贴现因子对应着三阶 CAPM 模型^[1,11]。

欧拉方程 (8) 还隐含着随机贴现因子的均值应该等于无风险资产总收益的倒数，即 $E_t [m_{t+1}] = \frac{1}{1 + R_f}$ 。Dahlquist^[12]发现若没有这个限制条件，随机贴现因子的估计将会出错。为了在随机贴现因子中加上均值的限制条件，估计时，我们用一年期存款利率作为工具变量。

3 实证分析

3.1 数据来源和统计量描述

在研究资产配置和资产定价的相关文献中，所使用的风险资产类型各不相同。King^[13]和Dittmar^[4]认为按照行业进行分类的投资组合能够很好地代表投资机会集，按照行业划分的投资组合能够最大化组合内部各个股票之间的相关性，同时最小化各个组合之间的相关性。基于他们的思想，我们采用申银万国一级行业指数（共 23 个）和上证综合指数作为风险资产组合和市场组合的代表，样本期从 2000 年 1 月到 2007 年 12 月，收益取月对数收益。以上数据来源于万德数据库。以银行一年期存款利率作为无风险利率，数据来源于中国人民银行网站 (<http://www.pbc.gov.cn>)。此外，无风险利率并非在所有时间内都为常数，样本期内一年期存款利率共经过 9 次调整，最高利率 4.14%，最低利率 1.98%。为了不让资产的超额收益受到利率变化的影响，以致影响高阶矩的计算结果，对风险资产的超额收益和市场组合的超额收益都以 $1 + R_{ft}$

进行平减。即它们真正的超额收益分别是 $r_{it} = \frac{R_{it} - R_{ft}}{1 + R_{ft}}$ 和 $r_{mt} = \frac{R_{mt} - R_{ft}}{1 + R_{ft}}$ 。

样本期内，市场组合的平均月收益率 1.40%，波动率 7.25%。23 个行业投资组合中，12 个行业投资组合的平均月收益率大于市场组合的平均月收益率，最高收益 2.13%，最低收益 0.40%。除 1 个行业外，其余所有行业的投资组合的波动率都高于市场组合的波动率。由于样本偏度和峰度逼近正态的速度非常慢，使得常用的正态性检验（JB 检验）仅适合于对大样本使用，因此本文选用适合小样本分析的 Kolmogorov-Smirnov 检验方法对样本进行正态性检验。Kolmogorov-Smirnov 检验是通过将理论联合分布函数与样本的联合分布函数对比进行检验。在 5% 的显著水平下，14 个标准化偏度显著；12 个超峰度显著；23 个行业的投资组合都拒绝正态性假设。

3.2 高阶矩资产配置

为研究方便，本文假设投资者将初始禀赋都投资在三个资产（纺织服务、房地产和信息服务）上，然后分别用均值-一方差 CAPM 模型、预期效用函数三阶、四阶泰勒展开式和直接最大化预期效用函数求出三种资产的配置比例。表 1 是这三个行业指数的统计量。

表 1 资产收益分布的统计检验值

序号	资产名称	均值%	方差%	偏度	超峰度	KS 统计量
1	纺织服务	0.99	9.29	1.119***	2.728***	0.429***
2	房地产	1.6	9.10	0.596***	1.211***	0.431***
3	信息服务	0.97	8.74	1.107***	3.838***	0.429***

*表示在 10% 处显著；**表示在 5% 处显著；***在表示 1% 处显著。

表 1 显示，三个资产的收益分布均不是正态分布，且偏离正态分布比较大。为了研究当收益分布非正态时，基于效用函数的泰勒展开得到的资产配置与直接最大化预期效用函数得到的配置之间的差距到底有多大，本文使用 Simaan^[14]的方法，在给定风险厌恶系数 λ 的情况下，求出直接最大化预期效用函数 $MaxE[-\exp(-\lambda W)]$ 的最优资产配置 $\vec{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)'$ ，同时求出方程

(6) 或 (7) 在不同阶 ($n = 2, 3, 4$) 泰勒展开时的次优资产配置 $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)'$ 。将各个

配置直接代入 $E[-\exp(-\lambda W)]$ ，求出各个配置所得到的预期效用值 $E(U)$ 。

表 2 列出当风险厌恶系数 λ 的取值范围从 1 变化到 6 时, 最优资产配置的权重; 以及基于阶矩配置权重 \vec{X} 与直接最大化效用函数配置权重 \vec{X}^* 之间的绝对距离之和 $SUM = \sum_{i=1}^N |x_i - x_i^*|$ 、最大的绝对距离 $MAX = \max |x_i - x_i^*|$ 。我们还用 Simaan^[15]方法估计使用次优策略的机会成本 (或者称之为最优配置溢价) R_{oc} 。设 R_p^* 是通过直接最大化效用函数得到的最优配置的收益, \hat{R}_p 是基于阶矩得到的次优配置的收益。机会成本定义如下: 必须对 \hat{R}_p 再加上多少收益 R_{oc} 才能使得次优配置 \vec{X} 与最优配置 \vec{X}^* 之间不存在效用差异。即:

$$E[U(1 + \hat{R}_p + R_{oc})] = E[U(1 + R_p^*)] \quad (10)$$

通过求解 (10) 式, 可以得到机会成本 R_{oc} 的值。

表 2.a 直接最大化预期效用函数

λ	x_1	x_2	x_3	$E(U)$
1	0.1352	0.4499	0.4149	-1.3066
2	0.2884	0.3217	0.3899	-3.254
3	0.3401	0.3128	0.3472	-12.287
4	0.3614	0.3198	0.3188	-58.561
5	0.3762	0.3259	0.2979	-313.34
6	0.3899	0.3297	0.2804	-1777.5

表 2.b 二阶泰勒展开 (均值-方差 CAPM 模型)

λ	x_1	x_2	x_3	$E(U)$	SUM	MAX	R_{oc}
1	0.0769	0.5641	0.359	-1.3094	0.2285	0.1143	0.002181
2	0.0765	0.561	0.3525	-3.3973	0.4786	0.2393	0.021544
3	0.0474	0.616	0.3366	-14.81	0.6065	0.3033	0.062232
4	0.0084	0.6893	0.3023	-101.68	0.7390	0.3695	0.13794
5	0	0.7537	0.2463	-1094	0.8557	0.4278	0.25009
6	0	0.8211	0.1789	-19409	0.9828	0.4914	0.39842

表 2.c 三阶泰勒展开 (三阶 CAPM 模型)

λ	x_1	x_2	x_3	$E(U)$	SUM	MAX	R_{oc}
1	0.1059	0.5441	0.35	-1.3087	0.1884	0.0942	0.001645
2	0.1117	0.5451	0.3431	-3.3798	0.4469	0.2235	0.01896
3	0.1028	0.5669	0.3303	-14.01	0.5083	0.2542	0.043694
4	0.0928	0.5885	0.3187	-77.61	0.5374	0.2687	0.070413
5	0.0831	0.6086	0.3083	-514.3	0.5864	0.2932	0.099083

6	0.0737	0.6275	0.2988	-3876.5	0.6324	0.3162	0.12995
---	--------	--------	--------	---------	--------	--------	---------

表 2.d 四阶泰勒展开 (四阶 CAPM 模型)

λ	x_1	x_2	x_3	$E(U)$	SUM	MAX	R_{oc}
1	0.1377	0.5029	0.3594	-1.3075	0.1110	0.0555	0.000701
2	0.1547	0.4867	0.3586	-3.321	0.3301	0.1651	0.010182
3	0.1525	0.4941	0.3533	-13.11	0.3751	0.1875	0.021658
4	0.1462	0.5059	0.3479	-66.62	0.4305	0.2152	0.032234
5	0.1381	0.5195	0.3424	-388.8	0.4764	0.2382	0.043177
6	0.129	0.5342	0.3367	-2479.2	0.5217	0.2608	0.055452

将表 2 的结果绘于图 1 到图 4 中，可直观地看出这些不同配置之间存在的差异。图 1 是各种配置得到的效用值，数据做了对数化处理即取 $-\log(-E(U))$ ，这种对数化处理并不改变效用值的排序号。图 1 告诉我们当投资者风险厌恶系数相同时，三阶和四阶泰勒展开的效用都高于均值一方差 CAPM 模型的效用，而且四阶泰勒展开式的效用非常接近直接最大化预期效用函数的最优效用。随着风险厌恶系数的提高，均值一方差 CAPM 模型的效用与最优效用之间的差异迅速增加；三阶和四阶泰勒展开式的效用与最优效用之间的差异变化较小。

图 2 是次优配置 \bar{X} 与最优配置 \bar{X}^* 之间的机会成本。从图 2 中我们看到，若不是采取最优配置 \bar{X}^* 而是采取次优配置 \bar{X} ，有时会导致较大的机会成本。例如：当风险厌恶系数 $\lambda = 3$ 时，均值一方差 CAPM 模型的机会成本为 6.22%，意味着投资者每投资一元，成本 6 分多；三阶矩、四阶矩投资策略的机会成本分别为 4.37% 和 2.17%。当 $\lambda = 6$ 时，它们之间的差异更为显著，二阶矩的投资策略所需要机会成本高达 39.8%，这意味着投资者每投资一元，就要牺牲 4 角当做机会成本；而四阶矩的投资策略所需要机会成本却不超 6%。机会成本的这些数据表明均值一方差 CAPM 模型相对于三阶和四阶 CAPM 模型显得无效率。

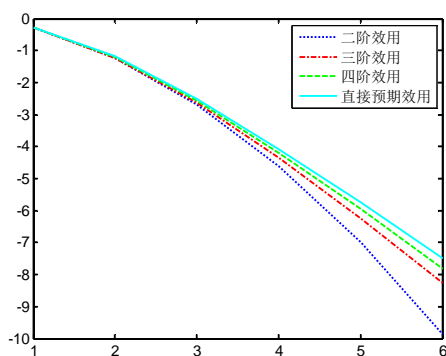


图 1 效用函数图 $E(U)$

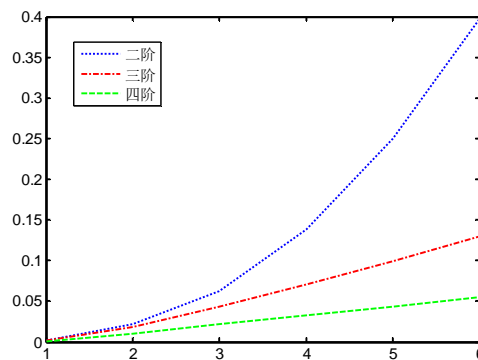


图 2 机会成本 R_{oc}

图 3 和图 4 分别是各阶矩的次优资产配置与最优资产配置的绝对距离之和以及最大绝对距离的图形。随着风险厌恶系数的增加，各阶矩的次优资产配置与最优资产配置之间的差异都变大。二阶的差异最大，四阶的差异最小。

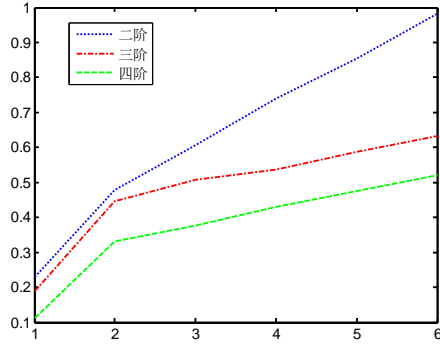


图3 绝对距离之和 SUM

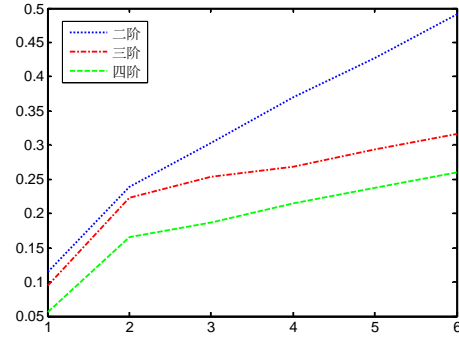


图4 最大绝对距离 MAX

对以上数据的分析表明, 由于我国股票市场收益分布大幅度偏离正态分布, 进行资产配置时, 均值一方差 CAPM 模型 无法准确逼近预期效用函数。在这种情况下, 我们使用泰勒级数展开式来近似表示预期效用函数, 最终将预期效用函数表示成与收益的高阶矩有关的多项式函数。实证表明, 预期效用函数的三阶和四阶泰勒展开式比均值一方差 CAPM 模型能更好地逼近预期效用函数, 在我国股票市场应该用基于高阶矩的 CAPM 模型进行资产配置。

3.3 非线性多项式随机贴现因子的实证分析

由于我国金融市场收益分布一般都偏离正态分布, 具有显著的偏度和峰度。保守的投资者除了对均值和方差有偏好外, 他们同时喜欢正偏度厌恶正峰度, 即保守的投资者喜欢 (厌恶) 较大概率的收益 (损失)。我们通过 3.2 中资产配置的实证表明, 由于偏度、峰度的存在, 基于效用函数的高阶泰勒展开式比均值一方差 CAPM 模型更适合我国股票市场的资产配置, 意味着我国股票市场未必会对均值一方差世界敏感。因此我们将对我国股票市场的风险一收益特征进行更深入的研究, 评估我国金融资产定价是否能够通过高阶矩 CAPM 得到更好的解释。由于 Kraus^[1]、Fang^[2] 和 Harvey^[11] 中的三阶、四阶 CAPM 模型必须估计协偏度和协峰度, 而这些估计量存在变量误差问题, 导致资产定价模型横截面回归时得到的估计值有偏且不一致。Dittmar^[4] 说明随机贴现因子和各阶矩 CAPM 之间的等价性, 可以用随机贴现因子代替各阶矩 CAPM 的检验, 并且随机贴现因子中不需要计算协偏度和协峰度, 故我们采用非线性三次多项式的随机贴现因子模型^[4], 利用 GMM 方法证明协偏度和协峰度也是系统性风险, 必须得到定价。GMM 方法最大的好处在于使用时不必假设数据服从某种分布, 同时还避免了在传统截面资产定价模型中的变量误差问题。

利用非线性三次多项式随机贴现因子 $m_{t+1} = d_0^2 - d_1^2 R_{mt+1} + d_2^2 R_{mt+1}^2 - d_3^2 R_{mt+1}^3$, 欧拉方程 (8.1) 可以表示成:

$$E_t [(1 + \bar{R}_{t+1})(d_0^2 - d_1^2 R_{mt+1} + d_2^2 R_{mt+1}^2 - d_3^2 R_{mt+1}^3) | \bar{Z}_t] = 1_N \quad (11)$$

定义误差向量:

$$\bar{V}_{t+1} = (1 + \bar{R}_{t+1})(d_0^2 - d_1^2 R_{mt+1} + d_2^2 R_{mt+1}^2 - d_3^2 R_{mt+1}^3) - 1_N \quad (12)$$

根据 2.3 的分析, 本文选取 $Z = (\bar{1} \quad \bar{R}_m \quad \bar{R}_f)$ 作为工具变量。

方程 (11) 意味着:

$$E [\bar{V}_{t+1} | \bar{Z}_t] = 0 \quad (13)$$

利用方程 (12) 和工具变量生成矩条件 (GMM 法) 可以用来评估资产定价模型。方程 (13)

意味着无条件限制的 $E[\vec{V}_{t+1} \otimes \vec{Z}_t] = 0$ 的样本形式为:

$$\vec{g}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \vec{V}_{t+1} \otimes \vec{Z}_t' = 0 \quad (14)$$

这里 T 是时间序列数, N 是资产个数。通过最小化二次形式

$$J = \vec{g}_T' W_T \vec{g}_T \quad (15)$$

求出待定系数。其中 W_T 是 GMM 权重矩阵, 我们取 Hansen^[16] 的最优权重矩阵 $W_T^* = [\vec{g}_T \vec{g}_T']^{-1}$ 进行估计。多项式随机贴现因子的估计值最终结果列在表 3 中。

表 3 多项式随机贴现因子估计值

	a_0	a_1	a_2	a_3
系数	1.5626	-0.994		
p 值	(0.0000)	(0.0000)		
系数	1.4884	-1.0609	0.1024	
p 值	(0.0000)	(0.0000)	(0.0001)	
系数	1.2321	-0.4489		-0.1225
p 值	(0.0000)	(0.0000)		(0.0001)
系数	1.0837	-0.2275	0.25	-0.2809
p 值	(0.0000)	(0.0001)	(0.0115)	(0.0000)

表 3 中从上往下依次是线性、二次多项式、含一次幂和三次幂的多项式、三次多项式随机贴现因子的系数估计值和 p 值。我们可以看到, 在线性随机贴现因子中, 不管是单独加入二次项、三次项还是同时加入二次和三次项, 上面所有形式的随机贴现因子的系数中 a_2 和 a_3 都是显著的, 即意味着协偏度和协峰度作为系统性风险都得到定价, 投资者愿意对与市场具有正协偏度和负协峰度的资产付出风险溢价。根据 2.3 分析, 这些不同形式的随机贴现因子对应各阶矩 CAPM 模型, 而且高阶矩 CAPM 模型——如三阶 CAPM 模型和四阶 CAPM 模型——比均值—方差 CAPM 模型能够更好的解释我国的金融资产定价问题。

4 结论

由于我国金融资产具有高收益和高波动特征, 收益分布大幅度偏离正态分布。若用均值—方差 CAPM 模型作为金融资产配置和资产定价的基本理论, 会导致极大误差。

本文首先用三个行业指数之间的资产配置说明基于效用函数的高阶泰勒展开式比均值—方差 CAPM 模型更适合我国的金融资产配置。由此, 我们认为在我国资产定价模型中必须包含协偏度和协峰度这两个风险。基于这种考虑, 本文随后通过非线性多项式随机贴现因子证明具有偏度和峰度偏好的高阶矩 CAPM 比均值—方差 CAPM 模型更适合我国的金融资产定价。本文从这两方面的分析说明高阶矩中的协偏度和协峰度确实是除了协方差外的系统性风险, 应该得到风险溢价。

后面我们将进一步研究高阶矩在我国金融市场其它方面的影响, 如包含高阶矩风险的基金绩效考核模型是否优于以均值—方差 CAPM 模型为基础的绩效考核模型。

参考文献:

- [1] Kraus A, Litzenberger RH. Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets[J]. *Journal of Finance* 1976; 31: 1085-1100.
- [2] Fang H, Lai TY. Co-Kurtosis and Capital Asset Pricing[J]. *Financial Review* 1997; 32: 293-307.
- [3] Hwang S, Satchell SE. Modelling Emerging Market Risk Premia Using Higher Moments[J]. *Int J Fin Econ* 1999; 4: 271-296.
- [4] Dittmar RF. Nonlinear Pricing Kernels, Kurtosis Preference, and Evidence from the Cross Section of Equity Returns[J]. *Journal of Finance* 2002; 57: 369-403.
- [5] Jondeau E, Rockinger M. Optimal Portfolio Allocation under Higher Moments[J]. *European Financial Management* 2006; 12: 29-55.
- [6] 许启发. 高阶矩波动性建模及应用[J]. *数量经济技术经济研究* 2006.
- [7] 蒋翠侠, 张世英. 高阶矩组合投资的 M-V-S-K 分析与效用函数分析的比较[J]. *统计与决策* 2008: 12-15.
- [8] Kimball Miles S. Standard Risk Aversion[J]. *Econometrica* 1993; 61: 589-611.
- [9] Hansen LP, Jagannathan R. Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economies[J]. *Journal of Political Economy* 1991; 99: 225.
- [10] Bansal R, Viswanathan S. No Arbitrage and Arbitrage Pricing: A New Approach[J]. *Journal of Finance* 1993; 48: 1231-1231.
- [11] Harvey CR, Siddique A. Conditional Skewness in Asset Pricing Tests[J]. *Journal of Finance* 2000; 55: 1263-1295.
- [12] Dahlquist M, Soderlind P. Evaluating Portfolio Performance with Stochastic Discount Factors[J]. *Journal of Business* 1999; 72: 347-383.
- [13] King BF. Market and Industry Factors in Stock Price Behavior[J]. *Journal of Business* 1966; 39: 139.
- [14] Simaan Y. Portfolio Selection and Asset Pricing-Three-parameter Framework[J]. *Management Science* 1993; 39: 568-568.
- [15] Simaan Y. What Is the Opportunity Cost of Mean-variance Investment Strategies?[J]. *Management Science* 1993; 39: 578-578.
- [16] Hansen LP. Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators[J]. *Econometrica* 1982; 50: 1029-1054.