

一种处理高维 GARCH 模型的新方法—SCC

摘要: 在许多金融计量问题中(如风险管理, 衍生产品定价和最优投资组合选择), 模拟二阶矩的相关性和预测未来的波动性有很重要的意义。近年来出现了大量多维 GARCH 模型来模拟资产组合的波动性及相关性, 但是在估计多维 GARCH 模型中仍存在着不尽如人意的地方, 资产的数量过多困扰着估计时的最优化问题, 即使随着模型的逐渐改善, 参数估计的结果仍然对参数选取的初值非常敏感, 因此许多文献都停留在二维 GARCH 模型的估计, 很难推广到高维 GARCH 模型。SCC(序列条件相关)方法是新近的由 Palandri(2005)提出的一种处理高维相关矩阵的估计方法, 本文在介绍新方法的基础上, 给出了对这种方法的一些理论的完善, 并加入了 Fisher 转换, 极大地提高了优化效率。

关键词: 多维 GARCH ; SCC(序列条件相关)

SCC Method : A New Approach Dealing With High-Dimension GARCH model

Abstract: It's very important to model correlation matrix and volatility in many financial issues such as risk evaluation, derivatives pricing, and optimal portfolio choice. Kinds of multivariate GARCH models have been developed recently to model the conditional second moments. However, there are dissatisfaction, for example, too many parameters in optimization problem and optimization result is sensitive to initial value choosed. Therefore, two dimension GARCH models are applied usually in literature. It's difficult to model three or more dimension GARCH model. SCC method is introduced to deal with high-dimension conditional correlation matrix. This paper presents some complementarity of theory and adds fisher transformation in order to increase optimization effect.

Key words: multivariate GARCH ; SCC(Sequential Conditional Correlation)

一、文献回顾

投资组合问题是应用和理论金融的主要研究课题之一。归结起来, 研究投资组合问题的文献主要从三条途径进行研究。第一个途径是 Markowitz(1952)提出的均值—方差分析, 这是研究资产的风险回报的有力工具。另外一个途径是应用连续时间金融来研究投资组合问题, Merton (1973) 给出了多期最优均值—方差投资组合的特征。第三个途径是从资产之间的动态相关性着手来研究动态的资产组合。从整体上讲, 第二个途径和第三个途径都是从动态资产配置着手来研究投资组合和风险的。后来的研究者主要从以下几个方面对投资组合理论进行扩充:

1. 把完全市场的假设扩充到不完全市场;
2. 加入各种允许卖空和不允许卖空的限制;
3. 加入税收和交易成本的限制;
4. 把方差描述的风险进一步扩充到用 VaR 或者 CvAR 描述的风险框架中进行分析;
5. 特别在连续时间金融的框架中, 根据利率期限结构, 把不变利率的假定改为随机利率进行投资组合分析;
6. 把各种资产的相关性扩展为动态的来进行动态资产组合研究。

研究资产收益的相关性有三种思路, 大体分为多维随机波动模型, 多维时间序列方法和多维 Copula 方法。本文的这种方法是多维时间序列研究的方法。首先简单的向大家介绍多

维随机波动模型和多维 Copula 方法的特点。

对于连续时间金融中的最基本的投资组合问题为：

$$\text{资产价格满足 } \frac{dP_0}{P_0} = r(X)dt$$

$$\frac{dP_i}{P_i} = \mu_i(X)dt + \sum_i(X)dB \quad , \quad i = 1, 2, \dots, M$$

B 是标准 M 维布朗运动， $r(X)$ 是短期利率， $\mu_i(X)$ 和 $\sum_i(X)$ 是状态变量 X 的函数，

X 是 n 维 Markovian 扩散过程。这里 $dX = \mu^X dt + \sum^X(X)dB^X(X)$ ， μ^X 和 $\sum^X(X)$ 是 X 的漂移和扩散项， $B^X(X)$ 是标准 N 维布朗运动。因此 $\mu_i(X)$ 是一个 $M \times 1$ 的向量， $\sum_i(X)$ 是 $M \times M$ 的矩阵

消费者目标是 $\max_{\phi, C_t} E_t[\int_0^T u(C_t)dt + U(W_T)]$ ，其中 ϕ_t 是风险资产投资组合权重的 M 维向量， C_t 和 W_t 分别是消费和财富过程。

如果加入了以上的扩展条件后，那么这个最优化问题的解并不是很容易的事情，牵涉到随机微分方程。

第二种是用多维 Copula 方法来衡量多种资产之间的相关性。其中最基本的 m 维正态 Copula 为

$$C_{\Sigma}^{Normal}(u_1, \dots, u_m) = \Phi_{\Sigma}(\varphi^{-1}(u_1), \dots, \varphi^{-1}(u_m))$$

这里 Σ 表示多维正态分布中的相关系数矩阵，也是正态 Copula 的参数， Φ_{Σ} 为相关系数矩阵为 Σ 的 m 维正态分布函数， φ^{-1} 为标准正态分布函数的反函数。

但是目前关于动态的 Copula 来描述相关性的结构还并不完善。

本文重在从多维时间序列的动态相关性的角度进行研究，从而构造投资组合和进行风险管理。此外在许多金融计量问题中，例如，风险管理，衍生产品定价和最优投资组合选择，模拟二阶矩的相关性和预测未来的波动性有很重要的意义。许多多维 GARCH 模型在近年来发展起来用以模拟条件二阶矩。但是，在众多多维 GARCH 模型的估计中参数的数量过多使得估计多维 GARCH 过程中遇到了困难。即使是 DCC(Dynamic Conditional Correlation)模型，也会涉及到多个参数的最优化问题，而最优化问题对参数初值的选取异常敏感，因此在估计高维相关矩阵时，就要不断的试着选取不同的初始值以求达到满足收敛标准的参数解。

总结各类研究多维 GARCH 模型的文献，我们可以比较出各种模型的优缺点，Bollerslev(1988)提出的 VECH 模型最大的缺点是不能保证 H_t 的正定性；由 Bollerslev(1990)提出的常数相关的多维 GARCH 模型又违反了相关性的时变性；而 Engle 和 Kroner(1995)提出的多维 GARCH(1,1)-BEKK 模型虽然保持了 H_t 的正定性，但是模型中参数不能用经济意义解释。一些模型通过对参数加以很强的限制减少参数的数量，例如 Alexander 和 Chibumba

(1997) 提出的正交的 GARCH 模型。Patton(2000), Jondeau 和 Rockinger(2001) 提出的 copula-MGARCH 模型。2002 年, Engle 提出了动态条件相关的多维 GARCH 模型。Cappiello, Engle 和 Shepard (2003) 提出了动态条件相关的多维 GARCH 模型的其中一种 ADCC (Asymmetric Dynamics Conditional Correlation) 多维 GARCH 模型, 用来模拟全球债券和股票收益的非对称性。Lin(2004) 用此模型来模拟中国证券市场和世界股票市场之间的相关性。Ledoit, Santa-Clara 和 Wolf(2002) 提出了 Flexible-GARCH, 利用范数逼近的方法构造多维 GARCH 模型的估计方法。

本文所用的模型是 Palandri(2005,10) 提出的 SCC (Sequential Conditional Correlations) 模型, SCC 模型的思想来自于 CCC 和 DCC 模型。

本文结构如下: 第二部分给出了条件相关模型的回顾; 第三部分给出了 SCC 模型的介绍; 第四部分给出了一个简单的数值例子; 第五部分利用中国主要股指市场的数据进行了实证分析; 第六部分给出了模型的评价和比较; 第七部分给出了本文的结论。

二、条件相关模型的介绍:

Bollerslev 在 1990 年提出了多维 GARCH 模型的条件相关 (CC) 模型, CC 模型允许条件方差 $h_{i,t}$ 是滞后项 $h_{i,t-j}$ 和实现值 $\varepsilon_{i,t-j}$ 的函数。这就意味着波动性可以被表示成 M 个单维 GARCH 模型的波动率函数, 其中多维 GARCH 模型的条件相关 (CC) 模型中的常数条件相关 (CCC) 模型给出的条件方差-协方差的形式为:

$$H_t = D_t R D_t$$

其中, D_t 是对角矩阵, 每个对角线上的元素是一维 GARCH 的方差的平方根。R 是常数相关矩阵, $R_{ii} = 1$ 。常数条件相关的主要缺点是常数相关的假设在许多实际问题中是不现实的。

Engle(2001) 提出的动态条件相关模型把 CCC 进一步一般化, DCC 模型的好处是估计可以分成两步走: 第一步, 可以用一维的 GARCH 模型进行估计, 第二步通过对数据进行标准化, 用条件相关来估计相关性。和 CCC 所不同的是, 它的相关矩阵 R 的构造打破了常数的限制, R 的结构如下:

$$Q_t = (1 - \sum_{m=1}^M \alpha_m - \sum_{n=1}^N \beta_n) \bar{Q} + \sum_{m=1}^M \alpha_m (\varepsilon_{t-m} \varepsilon'_{t-m}) + \sum_{n=1}^N \beta_n Q_{t-n}$$

$$R_t = Q_t^{*-1} Q_t Q_t^{*-1}$$

$$Q_t^* = \begin{bmatrix} \sqrt{q_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{q_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{q_{kk}} \end{bmatrix}$$

其中, \bar{Q} 是标准残差的无条件方差协方差矩阵, Q_t 是为了得到正确的相关矩阵所用到的一个正定矩阵, R_t 是相关矩阵, Q_t^* 是一个对角线上的元素等于 Q_t 的对角线元素平方根的对

角矩阵, α_m, β_n 是待估参数。

三、SCC 的介绍

(一) SCC 方法

$y_t = \mu_t(\theta) + H_t^{1/2}(\theta)\varepsilon_t$ 其中, y_t 是 n 维的资产收益率向量, $\mu_t(\theta)$ 是条件期望向量,

$H_t(\theta)$ 是条件方差协方差矩阵, ε_t 是残差向量。

CCC 和 DCC 的分解方法是

$$H_t = D_t R_t D_t$$

其中 D_t 是对角矩阵, 对角线上的元素是单维 GARCH (p, q) 的方差, R 是相关矩阵, 若采用 CCC, 那么 R 是常数相关矩阵, 若采用 DCC 模型, 那么 R 是动态条件相关矩阵。

SCC^①方法利用了 CCC 模型的思想, 把条件方差—协方差矩阵进行分解, 只是分解方法与 CCC 和 DCC 方法的分解方法有所不同。CCC 和 DCC 方法的分解只是把把方差和相关矩阵分解, 从而允许了两步估计, 但 SCC 进一步分离了相关性和偏相关, 从而允许了一个真正的多步估计程序。这个思路使条件方差—协方差矩阵写成了以下形式:

$$H_t = D_t R_t D_t$$

$$\Rightarrow H_t = D_t K_{1,2,t} K_{1,3,t} \cdots K_{M-1,M,t} K'_{M-1,M,t} \cdots K'_{1,3,t} K'_{1,2,t} D_t$$

$$\text{其中, } K_{i,j,t}[\text{row}, \text{col}] = \begin{cases} \rho_{i,j,t} & \text{if row} = j \text{ and col} = i \\ (1 - \rho_{i,j,t}^2)^{1/2} & \text{if row} = j \text{ and col} = j \\ I[\text{row}, \text{col}] & \text{otherwise} \end{cases}$$

这种特殊的分解保证了方差—协方差矩阵的正定性和对称性, 并且这种分解允许多步的模拟和方差的估计。我们暂且把 $K_{i,j,t}$ 叫作 K 矩阵, 那么多维 GARCH 模型的相关矩阵的复杂估计可以转化为一系简单的估计。

为了弄清楚 K —矩阵的分解, 令 y_t 是 t 时刻 M 维观察向量, H_t 是它的方差—协方差矩阵。那么条件方差—协方差矩阵分解的步骤是:

(1) 模拟 M 维的 y_t 序列的条件方差, 并且用各自的条件方差对数据 y_t 进行标准化:

$$\hat{\varepsilon}_{i,t} = \frac{y_{i,t}}{\hat{h}_{i,t}^{1/2}} \quad \forall i = 1, \dots, M \quad \text{and} \quad \forall t = 1, \dots, T$$

^① ①为简单起见, 本文中用 CCC 代替常数条件相关的多维 GARCH 模型, 用 DCC 代替动态条件相关的多维 GARCH 模型, 用 SCC 代替序列条件相关的多维 GARCH 模型。

那么 $\hat{\varepsilon}_t$ 将表现出同方差，并且仍旧表现出随时间可变的相关性。

(2) 对于序列 $\hat{\varepsilon}_{i,t}$ ，模拟此序列的第一项同余下的 $M-1$ 项的相关性，得出下列偏相关估计 $\{\rho_{1,2,t}\}_{t=1}^T, \{\rho_{1,3,t}\}_{t=1}^T, \dots, \{\rho_{1,M,t}\}_{t=1}^T$ ，然后从第 2 项至第 M 项抽出对 $\hat{\varepsilon}_{1,t}$ 的影响，换句话说这些相关估计可以进一步使数据标准化 $\tilde{\varepsilon}_{i,t} = \frac{\hat{\varepsilon}_{i,t} - \rho_{1,i,t}\hat{\varepsilon}_{1,t}}{(1-\rho_{1,i,t}^2)^{1/2}} \forall i > 1$ ，使得转化后的序列 $\tilde{\varepsilon}_{i,t}$ 的第 2, 3, ..., M 项与它的第一项条件不相关。

(3) 抛弃 $\tilde{\varepsilon}_{i,t}$ 的第一项，重复第二个步骤，求出 $\tilde{\varepsilon}_{i,t}$ 的第二项分别与余下的 $M-2$ 项的偏相关估计，并对序列 $\tilde{\varepsilon}_{i,t}$ 的第二项至第 M 项进行标准化；然后是第三个序列和余下的 $M-3$ 个序列相关性的估计和后面序列的标准化。

(4) 完全标准化后的序列，它的方差-协方差矩阵是单位阵。而且被估计的相关性可以插入到相应的 K -矩阵中，这些 K -矩阵的乘积可以得到相关矩阵 R_t ，再结合 D_t 就可以得到 H_t 。

对于以上的步骤，本文给出了严格的数学证明。

定理 1: 经过标准化数据， $\tilde{\varepsilon}_{i,t}$ ($i > 1$) 的期望是 0，方差是 1，并且与 $\hat{\varepsilon}_{1,t}$ 不相关。

证明: $E(\hat{\varepsilon}_{i,t} - \rho_{1,i,t}\hat{\varepsilon}_{1,t}) = 0$

$$\begin{aligned} & V(\hat{\varepsilon}_{i,t} - \rho_{1,i,t}\hat{\varepsilon}_{1,t}) \\ &= E[(\hat{\varepsilon}_{i,t} - \rho_{1,i,t}\hat{\varepsilon}_{1,t})^2] - [E(\hat{\varepsilon}_{i,t} - \rho_{1,i,t}\hat{\varepsilon}_{1,t})]^2 \\ &= E[\hat{\varepsilon}_{i,t}^2 - 2\rho_{1,i,t}\hat{\varepsilon}_{1,t}\hat{\varepsilon}_{i,t} + \rho_{1,i,t}^2\hat{\varepsilon}_{1,t}^2] \\ &= 1 - \rho_{1,i,t}^2 \\ & E(\tilde{\varepsilon}_{i,t}\hat{\varepsilon}_{1,t}) = E\left(\frac{\hat{\varepsilon}_{i,t} - \rho_{1,i,t}\hat{\varepsilon}_{1,t}}{(1-\rho_{1,i,t}^2)^{1/2}}\hat{\varepsilon}_{1,t}\right) = 0 \end{aligned}$$

定理 2: 经过以上步骤 (1) - (4) 的分解，条件相关矩阵 R_t 可以被分解为

$$R_t = K_{1,2,t} K_{1,3,t} \cdots K_{M-1,M,t} K_{M-1,M,t}' \cdots K_{1,3,t}' K_{1,2,t}'$$

证明: 经过变换， $K_{M-1,M,t}^{-1} \cdots K_{1,M,t}^{-1} \cdot K_{1,M-1,t}^{-1} \cdots K_{1,2,t}^{-1} \cdot \hat{\varepsilon}_t$ 的序列是一个方差协方差为单

位阵的序列。即 $V(K_{M-1,M,t}^{-1} \cdots K_{1,M,t}^{-1} \cdot K_{1,M-1,t}^{-1} \cdots K_{1,2,t}^{-1} \cdot \hat{\varepsilon}_t) = I$,

设 $A = K_{M-1,M,t}^{-1} \cdots K_{1,M,t}^{-1} \cdot K_{1,M-1,t}^{-1} \cdots K_{1,2,t}^{-1}$, 那么 $V(A \hat{\varepsilon}) = I$,

又因为 $E(A \hat{\varepsilon}) = 0$, 那么 $E[(A \hat{\varepsilon})(A \hat{\varepsilon})'] = I$, 即 $A \cdot E(\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}') \cdot A' = I$, 即 $A \cdot R \cdot A' = I$

定理 3^①: 对于 $M \times M$ 相关矩阵 R , 存在唯一的序列矩阵 $K_{1,2}^{-1} K_{1,3}^{-1} \cdots K_{M-1,M}^{-1}$ 满足

$$I = K_{M-1,M}^{-1} \cdots K_{1,3}^{-1} \cdot K_{1,2}^{-1} \cdot R \cdot (K_{1,2}^{-1})' \cdot (K_{1,3}^{-1})' \cdots (K_{M-1,M}^{-1})'$$

定理 4^②: 按照一定的顺序, 任何 K 序列的乘积都是相关矩阵。

(二) Fisher 转换

DCC 多维 GARCH 模型在估计动态条件相关系数时, 优化过程中经常会出现动态条件相关系数落在 $[-1,1]$ 之外, 为了克服这个缺点, 即使动态条件相关系数 ρ_{ij} 落在 $[-1,1]$ 里面, 一个更加方便有效的方法是用 Fisher 转换

$$\chi_t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \rho_t}{1 - \rho_t} \right),$$

$$\text{则 } \rho_t = \frac{\exp(2\chi_t) - 1}{\exp(2\chi_t) + 1}, \quad (1)$$

令 χ_t 服从 ACC 模型:

$$\chi_t = c_0 + c_1 \chi_{t-1} + c_2 \eta_{1,t-1} \eta_{2,t-1} \quad (2)$$

这里 $\eta_{1,t-1} = \frac{\varepsilon_{1,t-1}}{\sigma_{11,t-1}}$, $\eta_{2,t-1} = \frac{\varepsilon_{2,t-1}}{\sigma_{22,t-1}}$ 为标准残差, c_0, c_1, c_2 为参数值。

四、模型的估计

White(1994)提出的两阶段 QMLE 估计成立的条件是

A1 (1) 对于参数集合 Φ 的 ϕ , $E(\log f_1(r_t, \phi))$ 存在并且有限, $t=1,2,3,\dots$,

(2) $\{\log f_1(r_t, \phi)\}$ 服从强大数定律

(3) 对于参数集 $\theta = (\phi, \psi)$, $E(\log f_2(r_t, \theta))$ 存在且有限

(4) $\{\log f_2(r_t, \theta)\}$ 服从强大数定律

A2 (1) $\theta_0 = (\phi_0, \psi_0)$ 是唯一确定的, Θ 是紧集, θ_0 满足两个条件

^①请参照 Alessandro Palandri [1].

^②请参照 Alessandro Palandri [1].

$$(2) \{ \bar{L}_{1T}(\phi) = E(T^{-1} \sum_{t=1}^T \log f_1(r_t, \phi)) \} \text{ 是 } O(1)$$

$$(3) \{ \bar{L}_{2T}(\theta) = E(T^{-1} \sum_{t=1}^T \log f_2(r_t, \theta)) \} \text{ 是 } O(1)$$

A3 (1) 对于 ϕ , $\nabla \bar{L}_{1T}(\phi) = E(\nabla L_{1T}(r^T, \phi)) < \infty$, 其中 $r^T = (r_1, r_2, \dots, r_T)$, 是 T 维观测值向量

$$(2) \text{ 对于 } \theta, \nabla \bar{L}_{2T}(\theta) = E(\nabla L_{2T}(r^T, \theta)) < \infty$$

$$A4 (1) \text{ 对于 } \phi, \nabla^2 \bar{L}_{1T}(\phi) = E(\nabla^2 L_{1T}(r^T, \phi)) < \infty$$

$$(2) \{ \nabla^2 \log f_1(r_t, \phi) \} \text{ 服从强大数定律}$$

$$(3) \{ \nabla^2 \log f_1(r_t, \phi) \} \text{ 服从强大数定律}$$

$$(4) \text{ 对于 } \theta, \nabla^2 \bar{L}_{2T}(\theta) = E(\nabla^2 L_{2T}(r^T, \theta)) < \infty$$

$$(5) E(\nabla^2 L_{2T}(r^T, \cdot)) \text{ 是一致连续的}$$

$$(6) \{ \nabla^2 \log f_2(r_t, \phi) \} \text{ 服从强大数定律}$$

$$A5 (1) \{ A_{11,T} = \nabla_{\phi\phi} \bar{L}_{1T}(\phi_0) \} \text{ 是 } O(1), \text{ 并且是负定的}$$

$$(2) \{ A_{22,T} = \nabla_{\psi\psi} \bar{L}_{2T}(\theta_0) \} \text{ 是 } O(1), \text{ 且是负定的}$$

$$A6 (1) \{ T^{-1/2} \nabla_{\phi} \ln f_1(r_t, \phi_0), T^{-1/2} \nabla_{\psi} \ln f_2(r_t, \phi_0, \psi_0) \} \text{ 服从中心极限条件。}$$

定理 1 (渐近正态性): 在 White(1994)提出的 (1) – (6) 的假设条件 (省略) 下, 那么

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, C_1^{-1} C_0 C_1^{-1}), \quad n \rightarrow \infty$$

其中, $C_0 = E_{\theta_0} \{ (\partial l_t(\theta_0) / \partial \theta) (\partial l_t(\theta_0) / \partial \theta)' \}$

$$C_1 = E \left(\left(\frac{\partial^2 l_t(\theta_0)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)_{1 \leq i, j \leq r} \right)$$

证明: 我们以三个市场为例来看一下似然函数的分解, 那么三个市场总的似然函数为 L , 在此似然函数中, 我们先忽略常数项和具体的参数值, 把参数值都看作求两两市场的相关系数, 如果这个似然函数的推导的思路正确, 我们再把参数值加入到两两相关系数中, 同时把常数项也加入进去, 以求更准确的表示。

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |H_t| + \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t) \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |D_t R_t D_t| + \varepsilon_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} \varepsilon_t) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |D_t| + \log |R_t| + \log |D_t| + \varepsilon_t' D_t^{-2} \varepsilon_t - \varepsilon_t' D_t^{-2} \varepsilon_t + \varepsilon_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} \varepsilon_t) \\
&= [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |D_t|^2 + \varepsilon_t' D_t^{-2} \varepsilon_t)] \\
&+ [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_t| + (\varepsilon_t' D_t^{-1}) R_t^{-1} (D_t^{-1} \varepsilon_t) - (\varepsilon_t' D_t^{-2} \varepsilon_t))] \\
&= [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |D_t|^2 + \varepsilon_t' D_t^{-2} \varepsilon_t)] + [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_t| + \hat{\varepsilon}_t' R_t^{-1} \hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_t' \hat{\varepsilon}_t)]
\end{aligned}$$

(其中, $\hat{\varepsilon}_t$ 是标准残差)

$$\text{令 } L_1 = [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |D_t|^2 + \varepsilon_t' D_t^{-2} \varepsilon_t)], L_2 = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_t| + \hat{\varepsilon}_t' R_t^{-1} \hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_t' \hat{\varepsilon}_t)$$

那么, 两阶段估计的第二步要求 L_2 最大, 那么根据这种 SCC 方法, 可以把 L_2 分解为:

$$\begin{aligned}
L_2 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_t| + \hat{\varepsilon}_t' R_t^{-1} \hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_t' \hat{\varepsilon}_t) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\log |K_{1,2,t} R_{1,3,t} K_{1,2,t}'| + \hat{\varepsilon}_t' (K_{1,2,t} R_{1,3,t} K_{1,2,t}')^{-1} \hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_t' \hat{\varepsilon}_t \right) \\
&= [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |K_{1,2,t}| + \log |K_{1,2,t}'| + \hat{\varepsilon}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_{1,2,t})] \\
&+ [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_{1,3,t}| + (\hat{\varepsilon}_t' K_{1,2,t}^{-1}) (R_{1,3,t})^{-1} (K_{1,2,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_t) - \hat{\varepsilon}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_{1,2,t} - \hat{\varepsilon}_t' \hat{\varepsilon}_t - n \log(2\pi))]
\end{aligned}$$

($\hat{\varepsilon}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_{1,2,t}$ 这一项只是为了凑成第一项和第二项的相关系数矩阵的似然函数形式而凭空加上的, 然后再在这个式子后面减掉这一项。 $\Omega_{1,2,t}$ 是标准残差中 $\hat{\varepsilon}_t$ 的第一个市场和第二个市场的相关矩阵的估计, 是个 2×2 矩阵, 即两两市场之间相关矩阵。而 $R_{1,3,t} = K_{1,2,t}^{-1} R (K_{1,2,t}^{-1})'$, 并且 $E[(\hat{\varepsilon}_t' K_{1,2,t}^{-1}) (\hat{\varepsilon}_t' (K_{1,2,t}^{-1})')'] = K_{1,2,t}^{-1} R (K_{1,2,t}^{-1}) = R_{1,3,t}$, 因此 $R_{1,3,t}$ 是一个 $M \times M$ 维的方差协方差矩阵, 因此 $R_{1,3,t}$ 与 $\Omega_{1,2,t}$ 是不相同的)

$$\begin{aligned}
&= [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |\Omega_{1,2,t}| + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t})] \\
&+ [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_{1,3,t}| + (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t' K_{1,2}^{-1})(R_{1,3,t})^{-1} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t K_{1,2}^{-1}) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t - n \log(2\pi))] \\
&= [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |\Omega_{1,2,t}| + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t})] \\
&+ [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_{1,3,t}| + (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t' K_{1,2}^{-1})(R_{1,3,t})^{-1} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t K_{1,2}^{-1}) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t - n \log(2\pi))]
\end{aligned}$$

(其中, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t}$ 是标准残差中的前两个元素组成的向量, $\Omega_{1,2,t}$ 是标准残差中 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$ 的第一项和第二项的相关矩阵的估计。 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t}$ 的相关矩阵, $R_{1,3,t} = K_{1,2,t}^{-1} R (K_{1,2,t}^{-1})'$, $E[(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t K_{1,2,t}^{-1})(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t' (K_{1,2,t}^{-1})')]= K_{1,2,t}^{-1} R (K_{1,2,t}^{-1}) = R_{1,3,t}$ 。)

$$\text{令 } L_{1,2} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |\Omega_{1,2,t}| + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t}),$$

$$L_3 = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_{1,3,t}| + (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t' K_{1,2}^{-1})(R_{1,3,t})^{-1} (K_{1,2,t}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t - n \log(2\pi))$$

那么,

$$L_3$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |K_{1,3,t} R_{2,3,t} K_{1,3,t}'| + \boldsymbol{\varepsilon}_t' (K_{1,3,t} R_{2,3,t} K_{1,3,t}')^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t - n \log(2\pi))$$

$$(\text{令 } \boldsymbol{\varepsilon}_t = K_{1,2,t}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t)$$

$$= [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |\Omega_{1,3,t}| + \boldsymbol{\varepsilon}_{1,3,t}' \Omega_{1,3,t}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{1,3,t})]$$

$$+ [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_{2,3,t}| + (\boldsymbol{\varepsilon}_t' K_{1,3}^{-1})(R_{2,3,t})^{-1} (K_{1,3,t}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t) - \boldsymbol{\varepsilon}_{1,3,t}' \Omega_{1,3,t}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{1,3,t} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2,t} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t - 2n \log(2\pi))]$$

(注: $\boldsymbol{\varepsilon}_{1,3,t}$ 是上一个等式中 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的第一个项和第三项的相关矩阵, 而 $\boldsymbol{\varepsilon}_t = K_{1,2,t}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\rho(1-\rho^2)^{-1/2} & (1-\rho^2)^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{1,t} \\ \frac{\hat{\varepsilon}_{2,t} - \rho_{1,2,t} \varepsilon_{1,t}}{\sqrt{1-\rho_{1,2,t}^2}} \\ \hat{\varepsilon}_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } L_{1,3} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |\Omega_{1,3,t}| + \varepsilon_{1,3,t}' \Omega_{1,3,t}^{-1} \varepsilon_{1,3,t}) \quad ,$$

$$L_4 = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_{2,3,t}| + (\varepsilon_t' K_{1,3}^{-1})(R_{2,3,t})^{-1} (K_{1,3,t}^{-1} \varepsilon_t) - \varepsilon_{1,3,t}' \Omega_{1,3,t}^{-1} \varepsilon_{1,3,t} - \hat{\varepsilon}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_{1,2,t} - \hat{\varepsilon}_t' \hat{\varepsilon}_t - 2n \log(2\pi))$$

那么

$$L_4 =$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_{2,3,t}| + (\varepsilon_t' K_{1,3}^{-1})(R_{2,3,t})^{-1} (K_{1,3,t}^{-1} \varepsilon_t) - \varepsilon_{1,3,t}' \Omega_{1,3,t}^{-1} \varepsilon_{1,3,t} - \hat{\varepsilon}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_{1,2,t} - \hat{\varepsilon}_t' \hat{\varepsilon}_t - 2n \log(2\pi))$$

=

$$-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |K_{2,3,t} I K_{2,3,t}'| + (\tilde{\varepsilon}_t' (K_{2,3,t} I K_{2,3,t}')^{-1} (\tilde{\varepsilon}_t) - \tilde{\varepsilon}_{1,3,t}' \Omega_{1,3,t}^{-1} \tilde{\varepsilon}_{1,3,t} - \hat{\varepsilon}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_{1,2,t} - \hat{\varepsilon}_t' \hat{\varepsilon}_t - 2n \log(2\pi))$$

$$(\text{令 } \tilde{\varepsilon}_t = K_{1,3,t}^{-1} \varepsilon_t)$$

$$= [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + |\Omega_{2,3,t}| + \tilde{\varepsilon}_{2,3,t}' \Omega_{2,3,t}^{-1} \tilde{\varepsilon}_{2,3,t})]$$

$$+ [-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |I| + (\tilde{\varepsilon}_t' K_{2,3}^{-1})(I)^{-1} (K_{2,3,t}^{-1} \tilde{\varepsilon}_t) - \tilde{\varepsilon}_{2,3,t}' \Omega_{2,3,t}^{-1} \tilde{\varepsilon}_{2,3,t} - \tilde{\varepsilon}_{1,3,t}' \Omega_{1,3,t}^{-1} \tilde{\varepsilon}_{1,3,t} - \hat{\varepsilon}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_{1,2,t} - \hat{\varepsilon}_t' \hat{\varepsilon}_t - 3n \log(2\pi))]$$

$$\text{令 } L_{2,3} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + |\Omega_{2,3,t}| + \tilde{\varepsilon}_{2,3,t}' \Omega_{2,3,t}^{-1} \tilde{\varepsilon}_{2,3,t})$$

$$L_5 =$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |I| + (\tilde{\varepsilon}_t' K_{2,3}^{-1})(I)^{-1} (K_{2,3,t}^{-1} \tilde{\varepsilon}_t) - \tilde{\varepsilon}_{2,3,t}' \Omega_{2,3,t}^{-1} \tilde{\varepsilon}_{2,3,t} - \tilde{\varepsilon}_{1,3,t}' \Omega_{1,3,t}^{-1} \tilde{\varepsilon}_{1,3,t} - \hat{\varepsilon}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_{1,2,t} - \hat{\varepsilon}_t' \hat{\varepsilon}_t - 3n \log(2\pi))$$

$$\text{其中, } \tilde{\varepsilon}_t = K_{1,3,t}^{-1} \varepsilon_t = K_{1,3,t}^{-1} (K_{1,2,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_t)$$

对于 $L_{2,3}$ 来讲， $\check{\varepsilon}_{2,3,t}$ 正是 $\check{\varepsilon}_t$ 的第二项和第三项，而根据 $\check{\varepsilon}_t$ 的表达

$$\begin{aligned} & (\check{\varepsilon}_t = K_{1,3,t}^{-1} \varepsilon_t = K_{1,3,t}^{-1} (K_{1,2,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_t)) \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\rho_{1,3,t}(1-\rho_{1,3,t}^2)^{-1/2} & 0 & (1-\rho_{1,3,t}^2)^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{1,t} \\ \frac{\hat{\varepsilon}_{2,t} - \rho_{1,2,t} \hat{\varepsilon}_{1,t}}{\sqrt{1-\rho_{1,2,t}^2}} \\ \hat{\varepsilon}_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{1,t} \\ \frac{\hat{\varepsilon}_{2,t} - \rho_{1,2,t} \hat{\varepsilon}_{1,t}}{\sqrt{1-\rho_{1,2,t}^2}} \\ \frac{\hat{\varepsilon}_{3,t} - \rho_{1,3,t} \hat{\varepsilon}_{1,t}}{\sqrt{1-\rho_{1,3,t}^2}} \end{pmatrix}, \text{ 那么 } L_{2,3} \end{aligned}$$

正是 $\hat{\varepsilon}_t$ 经过标准化后的第二项和第三项的相关矩阵的似然函数，即 $\check{\varepsilon}_t$ 的第二项是把 $\hat{\varepsilon}_t$ 中第一项与第二项的相关性已经去除了，同理， $\check{\varepsilon}_t$ 的第三项是把 $\hat{\varepsilon}_t$ 中第一项与第三项的相关性已经去除了，因此 $\check{\varepsilon}_{2,3,t}$ 的相关矩阵是不是简单的相关，而是所谓的偏相关。

把三个市场扩展为 M 个市场，以下是 M 个序列的证明：

利用 White(1994)关于两阶段 QMLE 估计的渐近定理的证明，第一步可以先求出 $L_{1,2}$ 的 QMLE,再把第一步的估计结果代入到 L_3 中。

假设残差序列又 M 个值，依次类推，在此给出最后的两项，倒数第二项为 $L_{1+\frac{(1+M)(M-2)}{2}}$ ：

$$L_{1+\frac{(1+M)(M-2)}{2}} = L_{M-2,M} + L_{1+\frac{(M-1)M}{2}}$$

$$\text{其中 } L_{1+\frac{(1+M)(M-2)}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_{M-3,M,t}| + (\bar{\varepsilon}_t' K_{M-4,M}^{-1})(R_{M-3,M,t})^{-1}(\bar{\varepsilon}_t' K_{M-4,M}^{-1}))]$$

$$L_{M-2,M} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |\Omega_{M-2,M,t}| + \bar{\varepsilon}_{M-2,M,t}' \Omega_{M-2,M,t}^{-1} \bar{\varepsilon}_{M-2,M,t})$$

$$L_{1+\frac{(M-1)M}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_{M-1,M,t}| + (\bar{\varepsilon}_t' K_{M-2,M,t}^{-1})(R_{M-1,M,t})^{-1}(K_{M-2,M,t}^{-1} \bar{\varepsilon}_t))$$

$$-\bar{\varepsilon}_{M-2,M,t}' \Omega_{M-2,M,t}^{-1} \bar{\varepsilon}_{M-2,M,t} - \dots - \check{\varepsilon}_{2,3,t}' \Omega_{2,3,t}^{-1} \check{\varepsilon}_{2,3,t} - \hat{\varepsilon}_{1,3,t}' \Omega_{1,3,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_{1,3,t} - \hat{\varepsilon}_{1,2,t}' \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_{1,2,t} - \hat{\varepsilon}_t' \hat{\varepsilon}_t - \left(\frac{(M-1)M}{2} - 1\right) n \log(2\pi)$$

$$\bar{\varepsilon}_t = K_{M-3,M,t}^{-1} K_{M-4,M,t}^{-1} \dots K_{1,M,t}^{-1} \dots K_{1,2,t}^{-1}, E((K_{M-2,M,t}^{-1} \bar{\varepsilon})(K_{M-2,M,t}^{-1} \bar{\varepsilon})) = R_{M-1,M,t}$$

最后一项分解为 $L_{\frac{1+(M-1)M}{2}} = L_{M-1,M} + L_{\frac{2+(M-1)M}{2}}$

其中, $L_{\frac{1+(M-1)M}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |R_{M-2,M,t}| + (\hat{\varepsilon}'_t K_{M-3,M}^{-1})(R_{M-2,M,t})^{-1}(\hat{\varepsilon}'_t K_{M-3,M}^{-1}))]$

$$L_{M-1,M} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |\Omega_{M-1,M,t}| + \tilde{\varepsilon}'_{M-1,M,t} \Omega_{M-1,M,t}^{-1} \tilde{\varepsilon}_{M-1,M,t})$$

$$L_{\frac{2+(M-1)M}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |I| + (\tilde{\varepsilon}'_t K_{M-1,M,t}^{-1})(I)^{-1}(\tilde{\varepsilon}_t K_{M-1,M,t}^{-1}))$$

$$-\tilde{\varepsilon}'_{M-1,M,t} \Omega_{M-1,M,t}^{-1} \tilde{\varepsilon}_{M-1,M,t} - \dots - \tilde{\varepsilon}'_{2,3,t} \Omega_{2,3,t}^{-1} \tilde{\varepsilon}_{2,3,t} - \tilde{\varepsilon}'_{1,3,t} \Omega_{1,3,t}^{-1} \tilde{\varepsilon}_{1,3,t} - \hat{\varepsilon}'_{1,2,t} \Omega_{1,2,t}^{-1} \hat{\varepsilon}_{1,2,t} - \hat{\varepsilon}'_t \hat{\varepsilon}_t - \frac{(M-1)M}{2} n \log(2\pi)$$

$$\tilde{\varepsilon}_t = K_{M-2,M,t}^{-1} K_{M-3,M,t}^{-1} \dots K_{1,M,t}^{-1} \dots K_{1,2,t}^{-1}, E((K_{M-1,M,t}^{-1} \bar{\varepsilon})(K_{M-1,M,t}^{-1} \bar{\varepsilon})) = I$$

同理对于 L_{2M-2} , 使用 QMLE 两步似然函数, 把第一步的似然函数 $L_{M-1,M}$ 中的结果

代入到代入到第二阶段的似然函数 L_{2M-1} 中。

简而言之, 上述的分解可以写为

$$L = L_1 + L_2$$

$$L_2 = L_{12} + L_3$$

.....

$$L_M = L_{1M} + L_{M+1}$$

$$L_{M+1} = L_{23} + L_{M+2}$$

.....

$$L_{1+(M-1)+(M-2)} = L_{2M} + L_{2+(M-1)+(M-2)}$$

$$L_{2+(M-1)+(M-2)} = L_{34} + L_{3+(M-1)+(M-2)}$$

.....

$$L_{\frac{(M+1)(M-2)}{2}} = L_{M-2,M-1} + L_{\frac{1+(M+1)(M-2)}{2}}$$

$$L_{\frac{1+(M+1)(M-2)}{2}} = L_{M-2,M} + L_{\frac{1+(M-1)M}{2}}$$

$$L_{\frac{1+(M-1)M}{2}} = L_{M-1,M} + L_{\frac{2+(M-1)M}{2}}$$

得到

$$L = L_1 + \underbrace{L_{12} + L_{13} + \cdots + L_{1M}}_{M-1} + \underbrace{L_{23} + \cdots + L_{2M}}_{M-2} + \cdots + \underbrace{L_{M-2,M-1} + L_{M-2,M}}_2 + \underbrace{L_{M-1,M}}_1 + L_{2+\frac{(M-1)M}{2}}$$

经过上述层层迭代，同时在上述的每一个等式中分别利用 White(1994)提出的两阶段似然函数的方法，可以证明只要 SCC 的两两序列的似然函数最大，所得到的整个 SCC 模型的似然函数 (1) 式最大。即结论成立。

五、条件相关矩阵分解的例子

本文给出一个算例，为简单起见，我们没有引入动态条件相关，假设在时刻 T，四个市场间的条件相关矩阵为 R，根据定理 2 和 K 矩阵的定义，我们依次把 K 矩阵和相关矩阵写出来，如下：

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.2 & -0.1 \\ 0.3 & 1 & 0.4 & -0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 1 & -0.6 \\ -0.1 & -0.5 & -0.6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow K_{1,2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.31448545 & 1.0482848 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{1,3} = K_{1,2}^{-1} R (K_{1,2}^{-1})'$$

$$R_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.2 & -0.1 \\ 0 & 1 & 0.35641684 & -0.49269387 \\ 0.2 & 0.35641684 & 1 & -0.6 \\ -0.1 & -0.49269387 & -0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow K_{1,3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.20412415 & 0 & 1.0206207 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{1,4} = K_{1,3}^{-1} R_{1,3} (K_{1,3}^{-1})'$$

$$R_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 1 & 0.36376642 & -0.49269387 \\ 0 & 0.36376642 & 1 & -0.59196002 \\ -0.1 & -0.49269387 & -0.59196002 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow K_{1,4}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.10050378 & 0 & 0 & 1.0050378 \end{pmatrix}$$

$$R_{2,3} = K_{1,4}^{-1} R_{1,4} (K_{1,4}^{-1})'$$

$$R_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.36376642 & -0.49517597 \\ 0 & 0.36376642 & 1 & -0.59494221 \\ 0 & -0.49517597 & -0.59494221 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow K_{2,3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.39052093 & 1.0735486 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{2,4} = K_{2,3}^{-1} R_{2,3} (K_{2,3}^{-1})'$$

$$R_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.49517597 \\ 0 & 0 & 1 & -0.44532279 \\ 0 & -0.49517597 & -0.44532279 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow K_{2,4}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.56995872 & 0 & 1.1510226 \end{pmatrix}$$

$$R_{3,4} = K_{2,4}^{-1} R_{2,4} (K_{2,4}^{-1})'$$

$$R_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.51257658 \\ 0 & 0 & -0.51257658 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow K_{3,4}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.59696226 & 1.1646304 \end{pmatrix}$$

$$K_{3,4}^{-1}R_{3,4}(K_{3,4}^{-1})' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此根据定理 2，可以得出，如果得到两两市场间的条件相关系数矩阵，我们经过一定的组合，可以得到四个市场间的条件相关矩阵。至于对于两两市场间的动态条件相关系数的估计，我们就可以采取二维 GARCH 模型动态条件相关矩阵的各种方法，譬如 DCC，DCC 加上 Fisher 转换，BEKK 等方法，然后用本文介绍的 SCC 方法得到相应的高维市场间的动态条件相关系数矩阵。

六、实证

本文进行估计的样本数据从从1999年1月4日至2004年12月30日上证A股(sha)，上证B股(shb)，深综A指(sza)，深综B指(szb)每日的收盘价，取对数收益：

$$x_t = 100 \times (\ln P_t - \ln(P_{t-1}))$$

其数据的描述统计表于表一。

表一

	均值	标准差	偏度	峰度	Jarque-Bera
sha	0.003592	2.380739	1.488071	27.29316	68811.84
sza	0.015034	2.332258	1.225764	24.11885	51925.33
shb	-0.009563	2.234408	0.346519	7.862732	2771.528
szb	0.016808	2.311948	0.365589	10.00474	5697.915

用本文介绍的 Fisher 转换得到的两两市场间相关性的估计如表二所示：

表二

	c_0	c_1	c_2
sha-sza	1.8834 (0.059555)	-0.79412 0.050962 ()	0.0047821 (0.0035704)
sha-shb	-0.00028915 (0.00026571)	0.98946 (0.0021905)	0.0099458 (0.0018469)
sha-szb	0.58193 (0.022780)	-0.93622 (0.028191)	-0.0036371 (0.0043309)
sza-shb	-1.0763e-005 (0.00039512)	0.98334 (0.0027869)	0.014582 (0.0021332)
sza-szb	0.60840 (0.022097)	-0.99603 (0.0012159)	0.0054934 (0.0011084)
shb-szb	-9.4355e-005 (0.00016263)	0.99495 (0.00064249)	0.0055744 (0.00074119)

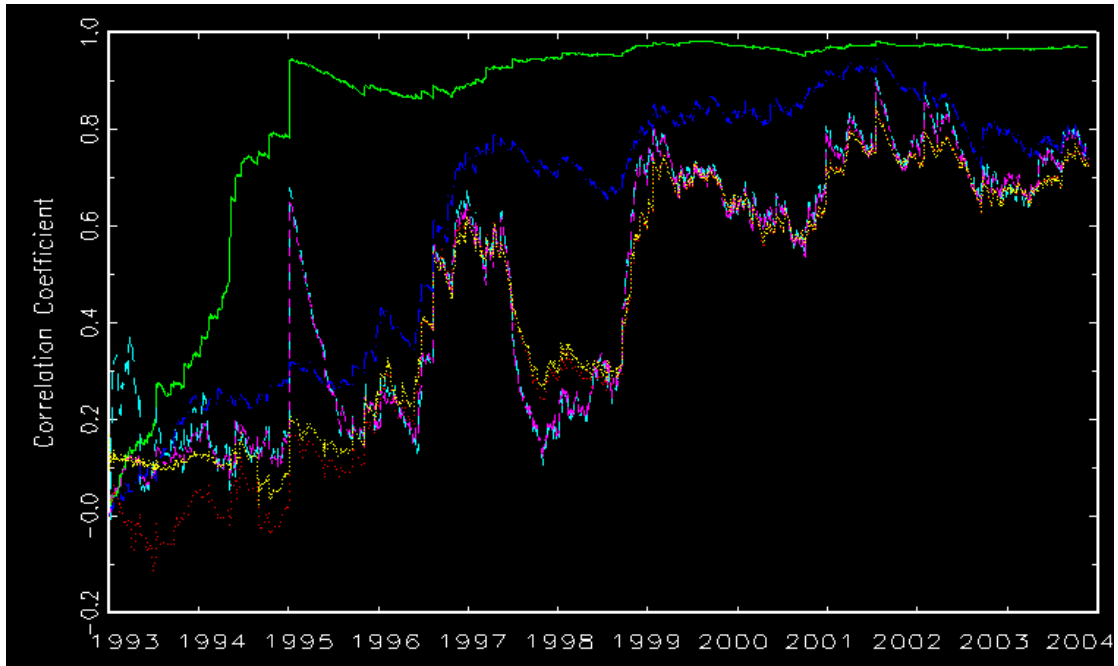
注：无特别说明，参数估计值下方的括号里面的值是标准差

把估计出来的两两股指市场之间的 Fisher 动态条件相关矩阵，代入相应的 K-矩阵中，得到：

$$R_t = K_{1,2,t} K_{1,3,t} \cdots K_{M-1,M,t} K'_{M-1,M,t} \cdots K'_{1,3,t} K'_{1,2,t}$$

最后中国四个主要股指市场之间的动态条件相关系数图如图一所示：

图一



六、模型评价及比较

本文采用样本外预测，总样本从 1999 年 1 月 4 日至 2005 年 3 月 4 日 2004 年 12 月 30 日每天上证 A 股，上证 B 股，深综 A 指，深综 B 指的收盘价。从 1999 年 1 月 4 日至 2004 年 12 月 30 日的样本为估计样本，从 2004 年 12 月 30 日至 3 月 4 日为预测样本，

在对数据建模的过程中，一个重要的步骤就是用所采取的模型进行预测，对预测结果的评价和比较就显得相当重要和不可缺少。评价 MGARCH 的设定，一个最自然的方法就是把模型的设定与已实现的对比。在一个高频数据不可得的环境下，一个稍微缺少准确性但是仍然非常有用的整合 (INTEGRATED) 波动性可以使用。首先通过构造一个残差在 K 时期已实现的波动性 $\hat{\Omega}$ ，

$$\hat{\Omega}^{(K)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K y_{t-1+k} \cdot y'_{t-1+k} \quad \forall t = 1, \dots, T - K + 1$$

模型的预测在同一时期的平均方差 \hat{H} 是：

$$\hat{H}_t^{(K)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{H}_{t-1+k} | I_{t-1}) \quad \forall t = 1, \dots, T - K + 1$$

预测和已实现的距离可以通过绝对期望偏差 MAD 和平均平方误差 MSE

$$MAD = \frac{1}{T} \left[\sum_{r=1}^M \sum_{c=r}^M \left| \hat{\Omega}_{r,c,t}^{(K)} - \hat{H}_{r,c,t}^{(K)} \right| \right]$$

$$MSE = \frac{1}{T} \left[\sum_{r=1}^M \sum_{c=r}^M \left(\hat{\Omega}_{r,c,t}^{(K)} - \hat{H}_{r,c,t}^{(K)} \right)^2 \right]$$

类似的测度可以应用到相关矩阵，标准残差序列

$$\hat{\varepsilon}_{i,t} = \frac{y_{i,t}}{\hat{h}_{i,t}^{1/2}} \quad \forall i = 1, \dots, M \quad \text{and} \quad \forall t = 1, \dots, T \text{ 是具有同方差的，具有方差为 1。}$$

其中， y_t 是残差， $\hat{\varepsilon}_t$ 是标准残差。

已实现的相关性 $\hat{\Gamma}$ 可以从已实现的方差-协方差矩阵 \hat{Q} 得到：

$$\hat{Q}_t^{(K)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \varepsilon_{t-1+k} \varepsilon_{t-1+k}' \quad \forall t = 1, \dots, T - K + 1$$

$$\hat{\Gamma}_t^{(K)} = \tilde{Q}_t^{(K)} \cdot \hat{Q}_t^{(K)} \cdot \tilde{Q}_t^{(K)}$$

$\tilde{Q}_t^{(K)}$ 是一个对角矩阵，包含 $\hat{Q}_t^{(K)}$ 主对角线元素的平方根的逆。K 时期模型平均相关性
的预测 \hat{R} 是：

$$\hat{R}_t^{(K)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\hat{R}_{t-1+k} | I_{t-1} \right) \quad \forall t = 1, \dots, T - K + 1$$

同样地，对于已实现地和预测地相关性可以通过 MAD 和 MSE 来计算。

$$MAD = \frac{1}{T} \left[\sum_{r=1}^M \sum_{c=r}^M \left| \hat{\Gamma}_{r,c,t}^{(K)} - \hat{R}_{r,c,t}^{(K)} \right| \right]$$

$$MSE = \frac{1}{T} \left[\sum_{r=1}^M \sum_{c=r}^M \left(\hat{\Gamma}_{r,c,t}^{(K)} - \hat{R}_{r,c,t}^{(K)} \right)^2 \right]$$

本文采用一步向前预测，即滚动预测和迭代预测相结合的方法，所得到的预测结果的比较如表三所示

表三

	Riskmetrics	CCC	SCC	ADCC
MAD (25 天)	0.0023267254	0.0011288358 (-95.148393%)	7.0920e-006	2.7769410e-005
MSE (25 天)	0.0028619403	0.00047570366 (-83.378282%)	0.00010574	0.00022220134
MAD(40 天)	0.0024735140	0.00011173174	6.0397e-006	4.1515323e-005

		(-95.482874%)		
MSE(40 天)	0.0029547957	0.00047327869 (-83.982693%)	9.4059e-005	0.00028569582

注：括号内的值，表示用 CCC 方法和 SCC 方法与 Riskmetrics 方法相比较，MAD 或 MSE 减小的百分数。

在表三中我们列出了，对于中国主要股指市场，用不同的方法进行预测分别得到的 MAD 和 MSE 值，通过对比，我们可以看出，在 Riskmetrics、CCC 方法和 SCC 方法中，用 SCC 方法预测得到的 MAD 和 MSE 最小。从而说明了，用 SCC 方法拟和中国主要股指市场最为有效。

七、结论

本文在 Palandri 的基础上，介绍和规范了 SCC 方法，同时引入了 Fisher 转换，最后给出了一个具体的例子，对于高维相关矩阵的估计，提供了一种新方法，并给出了理论支持，未来的研究方向是利用本文所介绍的 SCC 方法，对中国多种市场的相关矩阵进行估计，从而更好的进行风险管理和投资组合。

参考文献：

1. Alessandro Palandri(2005,10) Sequential Conditional Correlations: Inference and Evaluation, working paper
2. Bollerslev, Tim(1990), "Modeling the coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH model," Review of Economics and Statistics, 72:498-505
3. Engle, R.(2001) "Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH" working paper
4. Engle, R.(2001), "Dynamic Conditional Correlation-a Simple Class of Multivariate GARCH Model", forthcoming in Journal of Business and Economic Statistics
5. Kuan-Pin Lin(2004), "China and the World Equity Markets:A Review of the First Decade", working paper
6. Momtchil Pojarliev, "Applying multivariate Time Series Forecasts For Active Portfolio Management" Financial Markets and Portfolio Management , Volume 15, 2001, 2001
7. Momtchil Pojarliev, "Portfolio Construction By Volatility Forecasts: Does the Covariance Structure Matter?", Financial Markets And Portfolio Management , Volume 17, 2003.
8. Olivier Ledoit, Pedro Santa-Clara, and Michael Wolf 2003, "Flexible Multivariate GARCH Modeling With An Application To International Stock Markets" The Review of Economics and Statistics, August 2003, 85(3): 735-747.
9. Patton, A.J.(2000), "Modeling time-varying exchange rate dependence using the conditional copula." University of California, San Diego, Discussion Paper 01-09
10. Patton, A.J.(2005), "Volatility Forecast Evaluation and Comparison Using Imperfect Volatility Proxies" Londen School of Economics
11. Sheppard, K., 2002, "Understanding the Dynamics of Equity Covariance," Manuscript, UCSD.

Salim M.Darbar,Partha Deb, “Cross-Market Correlations and Transmission Of Information”,
The journal of Futures Markets, Vol.22.11,1059-1082