7.4 资产定价的基本原理

在这个部分中，我们讨论采用鞅定价方法时必须满足的前提条件。

7.4.1 资产定价第一基本定理

资产定价第一基本定理

市场是无套利的，当且仅当存在严格为正的状态价格向量。

推论

市场是无套利的，当且仅当存在等价鞅测度。

7.4.1.1 基础知识

一个离散的模型

引入离散的模型，有助于理解资产定价基本定理。

假设市场上存在N种资产。定义t时刻的资产价格向量为

$$\mathbf{S}(\mathbf{t})=\left(S_1(t),S_2(t),...,S_N(t)\right)'_{N\times 1}$$

其中$S_i(t)$表示资产i在t时刻的价格。定义某投资者的投资组合权重向量为

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t})=\left(\theta_1(t),\theta_2(t),...,\theta_N(t)\right)'_{(N\times 1)}$$

其中$\theta_i(t)$可以为正、为负或为零。 则该投资者t时刻的投资组合价值为

$$X(t)=S(t)'\theta(t)_{(1\times 1)}$$

假设在$t+\Delta t$时刻，状态空间为

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t})=\left(\omega_1(t+\Delta t),\omega_2(t+\Delta t),...,\omega_K(t+\Delta t)\right)'_{(K\times 1)}$$

即在该时刻有K种可能的情形，这些情形中有且只有一个可能发生。定义相应的现实概率测度向量为

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t})=\left(P_1(t+\Delta t),P_2(t+\Delta t),...,P_K(t+\Delta t)\right)'_{(K\times 1)}$$

以$d_{ij}(t+\Delta t)$表示第i种资产在第j种状态下的回报，则$t+\Delta t$时刻，这N种资产的回报矩阵为

$$\mathbf{D}(\mathbf{t}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t})=\begin{pmatrix} d_{11}(t+\Delta t) & \cdots & d_{1K}(t+\Delta t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{N1}(t+\Delta t) & \cdots & d_{NK}(t+\Delta t) \end{pmatrix}_{(N\times K)}$$

因此，前述投资组合在$t+\Delta t$时刻的可能的回报矩阵表达为$\left(\mathbf{D}'(\mathbf{t}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t})\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t})\right)_{(K\times 1)}$。

注意，等价测度意味着两个测度有相同的$\sigma-$代数和相同的状态空间（将概率为 0 的非空集合或是概率为 0 的状态去掉）。

下面我们在上述离散模型的设定下给出无套利的严格数学定义。

定义（无套利）

如果不存在投资组合满足以下任一条件，我们称该市场是无套利的。

(1) $X(t)=S(t)^{'}\theta(t)_{(1\times1)}<0,\left(\mathbf{D}^{'}(\mathbf{t}+\mathbf{\Delta t})\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t})\right)_{(N\times1)}\geq 0$；

(2) $X(t)=S(t)^{'}\theta(t)_{(1\times1)}\leq 0,\left(\mathbf{D}^{'}(\mathbf{t}+\mathbf{\Delta t})\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t})\right)_{(N\times1)}>0$

注：向量$\mathbf{Y}>0$，表示其每个元素都大等于 0，且至少有一个元素大于 0；$\mathbf{Y}\geq 0$表示其每个元素都大等于 0；$\mathbf{Y}\gg 0$表示每个元素都大于 0。

理解无套利：如果一个市场上，存在下述情况：某投资组合初期有正的收入，期末不亏（回报非负）；或是初期不需要支出（可能是收入，可能是 0），期末却有正的收入，这个市场就存在套利机会(注意其中不包含初期和期末同时为 0 的情形)，否则我们就说该市场是无套利的。无套利意味着“没有免费的午餐”。

无套利的概率定义

套利是指满足以下条件的资产组合价值过程（即一种交易策略），$X(0)=0$，并且存在未来的某个时刻$T>0$，

$$\mathbb{P}\left\{X(T)\geq 0\right\}=1,\mathbb{P}\left\{X(T)>0\right\}>0$$

或$X(0)<0$

$$\mathbb{P}\left\{X(T)\geq 0\right\}=1$$

定义（状态价格）

如果存在一个向量

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{t})=\left(\pi_1(t),\pi_2(t),\ldots,\pi_K(t)\right)^{'}_{K\times1}$$

使得

$$\mathbf{S}(\mathbf{t})=\left(\mathbf{D}(\mathbf{t}+\mathbf{\Delta t})\mathbf{\Pi}(\mathbf{t})\right)_{(N\times1)}$$

则称$\mathbf{\Pi}(\mathbf{t})$为t到$t+\Delta t$时刻的状态价格向量。

我们可以将状态价格视为一类特殊证券在t时刻的价格，例如$\pi_1(t)$对应的是在$t+\Delta t$时刻，如果发生状态 1 回报为 1 否则回报为 0 的证券在t时刻的价格，其余以此类推。这种证券通常被称为 Arrow-Debreu 证券。

注意我们构建的组合$X(t)$是$\mathbf{S}(\mathbf{t})$的线性组合，因此$X(t)$也可以用$\mathbf{\Pi}(\mathbf{t})$加以表达。

也就是说，知道了状态价格和$\mathbf{D}(\mathbf{t}+\mathbf{\Delta t})$，就可以为证券或是证券组合定价。

7.4.1.2 资产定价第一基本定理

定理证明 市场是无套利的，当且仅当存在严格为正的状态价格向量。

(1) 充分性。

假设存在一个严格为正的状态价格向量，即$\mathbf{\Pi}(\mathbf{t}) \gg 0$。

首先，$\left(\mathbf{D}'(\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t})\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t})\right)_{(N\times 1)} \geq 0$ 意味着投资组合在任意状态 j 下的回报 $d_{\theta j}(t+\Delta t) \geq 0$，由状态价格向量的定义可知$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{K} d_{\theta j}(t+\Delta t)\pi_j(t+\Delta t) \geq 0$。也就是说，无套利定义中的第一种套利情形不可能出现。

其次，$\left(\mathbf{D}'(\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t})\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t})\right)_{(N\times 1)} > 0$ 意味着投资组合在任意状态 j 下的回报 $d_{\theta j}(t+\Delta t) \geq 0$，且至少有一个状态的回报为正。假设该正回报为 $d_{\theta m}(t+\Delta t)$，则 $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{K} d_{\theta j}(t+\Delta t)\pi_j(t+\Delta t) > 0$，所以，无套利定义中的第二种套利情形也不会发生。

综上可知，充分性成立。

(2) 必要性。

必要性的证明远没有充分性那么简单，我们仅给出一个说明性的证明。严格证明需要用到分离超平面定理，感兴趣的同学可以参看 Duffie(2001)。

首先，如果状态价格向量不存在，也就是说，线性方程组$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \mathbf{D}(\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t})x$是无解的。这意味着该方程系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩，即$r(D) \neq r(D,S)$。而无套利条件则意味着如果$\mathbf{D}'(\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t})\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t}) = 0$，则 $X(t) = S(t)'\theta(t) = 0$。也就是说，$\mathbf{D}'x = 0$ 和 $(\mathbf{D},\mathbf{S})' x = 0$同解，于是必然有$r(D) = r(D,S)$。因此，无套利条件成立意味着状态价格向量存在。

其次，如果存在状态价格向量，但至少有一个状态价格$\pi_j \leq 0$。构造一个投资组合，使得回报在该状态下为正而在其他状态下为零，从而有

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{K} d_{\theta j}(t+\Delta t)\pi_j(t+\Delta t) \leq 0$$

也就是说，至少有一个状态价格小于 0 意味着存在套利机会，反之，无套利意味着状态价格向量严格为正。

定理的理解

资产定价第一定理是金融经济学和资产定价的基石性定理。绝大多数高级经济学和资产定价的教材都会以该定理作为开篇。无套利是金融中的基本原则，状态价格向量则是“定价核”（pricing kernel）、随机贴现因子（stochastic discount factor）、风险中性测度、等价鞅测度等概念中的核心要素。

资产定价第一定理本质上是不依赖模型的。为了简明证明的需要，我们构建了一个有限状态时间模型。该结论在推广到无限状态连续时间仍然成立，只是证明远没有这么直观易懂。

定理推论 1 无套利意味着风险中性（等价）测度的存在。

由于无套利意味着状态价格向量严格为正，因此我们只要证明严格为正的状态价格意味着风险中性（等价）测度的存在即可。

定义货币市场账户 $M(t)$，其价格满足 $M(T)=M(t)e^{\int_t^T r(s)ds}, T>t$，其中 $r(t)$ 为瞬时无风险利率。对货币市场账户运用状态价格定价法，有

$$M(t)=\sum_{i=1}^{K} M_i(T)\pi_i(T)$$

其中 $M_i(T), i=1,2,\ldots,K$ 表示 T 时刻不同状态下货币市场账户的回报。

对于任一证券，我们有

$$\frac{S_l(t)}{M(t)}=\sum_{i=1}^{K}\frac{d_{li}(T)\pi_i(T)}{M(t)}=\sum_{i=1}^{K}\frac{d_{li}(T)}{M_i(T)}\frac{M_i(T)\pi_i(T)}{M(t)}$$

令

$$\tilde{P}_i(T)=\frac{M_i(T)\pi_i(T)}{M(t)}$$

可以证明 $\tilde{P}(T)=\left(\tilde{P}_1(T),\tilde{P}_2(T),\ldots,\tilde{P}_K(T)\right)'$ 是风险中性测度下的概率。

首先，$\tilde{P}(T)=\left(\tilde{P}_1(T),\tilde{P}_2(T),\ldots,\tilde{P}_K(T)\right)'$ 是一个概率测度，因为

(1) $\tilde{P}_i(T)=\dfrac{M_i(T)\pi_i(T)}{M(t)}>0$；

(2) $\sum_{i=1}^{K}\tilde{P}_i(T)=\sum_{i=1}^{K}\dfrac{M_i(T)\pi_i(T)}{M(t)}=1$；

(3) 由于分母为常数，而分子可加，因此满足可加性。

其次，该测度与现实测度是等价的。因为状态空间相同，并且其每一个元素的概率都大于 0。

最后，该测度的特征为

$$\frac{S_l(t)}{M(t)}=\sum_{i=1}^{K}\frac{d_{li}(T)}{M_i(T)}\frac{M_i(T)\pi_i(T)}{M(t)}=\tilde{E}\left[\frac{S_l(T)}{M(T)}\right]$$

或

$$S_l(t)=\tilde{E}\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}S_l(T)\right]$$

也就是说，任意证券对货币市场账户的相对价格为鞅过程，即比值的增长率为 0，任意资产价格的增长率等于货币市场账户的增长率。这就是我们常常使用的风险中性测度。

定理推论 2 无套利意味着其他等价鞅测度的存在。

以远期测度为例。用 $B(t,T)$ 表示 T 时刻到期面值为 1 元的零息债在 t 时刻的价格。显然

$$B(t,T)=e^{-r(t,T)(T-t)}$$

对该零息债运用状态价格定价法，有

$$B(t,T)=\sum_{i=1}^{K}\pi_i(T)$$

对于任一证券，我们有

$$S_l(t)=\sum_{i=1}^{K}d_{li}(T)\pi_i(T)=e^{-r(t,T)(T-t)}\sum_{i=1}^{K}\frac{d_{li}(T)\pi_i(T)}{\sum_{i=1}^{K}\pi_i(T)}$$

令

$$P_i^T(T)=\frac{\pi_i(T)}{\sum_{i=1}^{K}\pi_i(T)}$$

可以证明 $P^T(T)=\left(P_1^T(T),P_2^T(T),\ldots,P_K^T(T)\right)'$ 是远期测度下的概率。

首先，$P^T(T)$ 是一个概率测度，因为

(1) $P_i^T(T)=\dfrac{\pi_i(T)}{\sum_{i=1}^{K}\pi_i(T)}>0$；

(2) $\sum_{i=1}^{K}P_i^T(T)=\sum_{i=1}^{K}\dfrac{\pi_i(T)}{\sum_{i=1}^{K}\pi_i(T)}=1$；

(3) 由于分母为常数，而分子可加，因此满足可加性。

其次，该测度与现实测度是等价的。因为状态空间相同，并且其每一个元素的概率都大于 0。

最后，该测度的特征为

$$\frac{S_l(t)}{B(t,T)} = E^T\left[\frac{S_l(T)}{B(T,T)}\right]$$

这就是远期测度。

定理推论 3 等价鞅测度的存在意味着市场是无套利的。

证明概要：以风险中性测度为例。当存在风险中性测度时，对于一个初始值等于 0 的组合，我们有

$$X(0) = \tilde{E}\left[D(T)X(T)\right] = 0$$

由于 $D(T)$ 为正，上式意味着

$$\mathbb{P}\left\{X(T) > 0\right\} = \tilde{\mathbb{P}}\left\{X(T) > 0\right\} = 0$$

对于一个初始值小于 0 的组合，我们有

$$X(0) = \tilde{E}\left[D(T)X(T)\right] < 0$$

由于 $D(T)$ 为正，上式意味着

$$\tilde{\mathbb{P}}\left\{X(T) < 0\right\} > 0$$
$$\mathbb{P}\left\{X(T) < 0\right\} > 0$$

举例

已知市场上有 3 种证券 $\left(B(t), S(t), c(t)\right)$，在 T 时刻所有证券的回报只有 2 种状态，回报矩阵为

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 10 \\ 10 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

t 时刻

$$\left(B(t), S(t)\right) = (8, 7)$$

假设利率为常数，试求风险中性定价测度并为 $c(t)$ 定价。

解：令风险中性概率为 $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{T}) = \left(\tilde{p}_1(T), \tilde{p}_2(T)\right)'$，则

$$\begin{cases} B(t)=e^{-r(T-t)}\tilde{E}\left[B(T)\right]=e^{-r(T-t)}\left(10\tilde{p}_1(T)+10\tilde{p}_2(T)\right)=8 \\ S(t)=e^{-r(T-t)}\tilde{E}\left[S(T)\right]=e^{-r(T-t)}\left(8\tilde{p}_1(T)+10\tilde{p}_2(T)\right)=7 \\ \tilde{p}_1(T)+\tilde{p}_2(T)=1 \end{cases}$$

可解得

$$\begin{cases} e^{-r(T-t)}=0.8 \\ \tilde{p}_1(T)=0.625 \\ \tilde{p}_2(T)=0.375 \end{cases}$$

从而

$$c(t)=e^{-r(T-t)}\tilde{E}\left[c(T)\right]=0.8\times\left(10\tilde{p}_1(T)+8\tilde{p}_2(T)\right)=7.4$$

可以看出，正如我们在二叉树定价法中发现的，风险中性概率实际上是隐含在两个已知的资产价格信息中的（无风险零息债和股票价格），在无套利条件下可求解得到。可以想象，如果未来状态有n种，有n种已知的资产价格信息（其回报矩阵非满秩），我们就可以解出风险中性测度。但如果只有少于n种的已知的资产价格信息，这时满足无套利条件的风险中性测度的解可能有多个，从而导致风险中性测度尽管存在，却并不惟一。这样，$c(t)$可能的解就有多个。

换一个角度，$c(t)$还可以如下求得，由于

$$c(T)=1.8B(T)-S(T)$$

也就是说，资产$c(t)$可以视为$B(t)$和$S(t)$的某种组合，因此

$$c(t)=1.8B(t)-S(t)=7.4$$

因此，这里的$c(t)$实际上是衍生产品和冗余证券。显然，要使得未知价格的资产可以写为已知价格资产的惟一组合，如果未来的状态有n种，同样要求市场中应有n种已知的资产价格信息（其回报矩阵非满秩）。

总之，这个例子说明，无套利仅意味着等价鞅测度的存在，但并不保证惟一。那么如何保证惟一等价鞅测度和衍生产品惟一定价？回答这个问题的是资产定价第二基本定理。

7.4.2 资产定价第二基本定理

可达性

对于任意或有要求权 $f(t)$，如果存在一个投资组合 $X(t)$ 使得

$$f(t)=X(t)$$

对于所有的t几乎必然成立。那么称 $f(t)$ 是可达的（reachable）， $X(t)$ 是 $f(t)$ 的对冲或复制组合。

完备性

如果市场上所有的或有要求权都是可达的，那么称市场是完备的（complete）。
NOTE：完全市场 VS 完美市场

资产定价第二基本定理

在无套利的市场中，等价鞅测度是惟一的当且仅当市场是完全的。

7.4.3 无套利和市场完备性的考察

从以上可见，在我们运用鞅定价方法之前，必须首先验证无套利条件和市场的完备性。

单期二叉树模型

对于二叉树模型而言，如果已知无风险零息债和股票的当前价格$\left(B(0),S(0)\right)$。只要

$$\frac{S_u(1)}{S(0)}>\frac{B(1)}{B(0)}>\frac{S_d(1)}{S(0)}$$

就意味着无套利条件成立。

由于只有两个状态，债券的回报与股票的回报线性无关，所以市场是完全的。

多期二叉树模型

无套利的证明与单期的情况类似。要证明完备性，由于在 0 时刻的对冲组合显然只能模拟或有要求权在 1 时刻的回报，这种情况下要如何讨论市场的完备性？

动态可达性

对于任意或有要求权 $f(t)$，如果对于每个时刻$t\leq T$，都存在一个投资组合$X(t)$使得

$$f(t)=X(t)$$

那么称 $f(t)$ 是动态可达的， $X(t)$ 是 $f(t)$ 的动态对冲或动态复制组合。

动态完备性

如果市场上所有的或有要求权都是动态可达的，那么称市场是动态完备的。

对于动态完备的情形，我们无法在期初构造一个模拟组合然后一劳永逸地等到期末，完全复制 $f(t)$ 的回报，但在期间只需不断地动态调整这一组合就可复制。事实上，这也正是在连续的 B-S-M 模型中我们需要作出的假设，期权必须是能够动态复制的，才能在风险中性测度下加以定价。因此与期货定价不同，“无交易费用”假设对于期权定价来说是致命的假定。

鞅表示定理（Martingale Representation theorem）（一维情形）

设 $W(t), 0\le t\le T$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的布朗运动，$\mathcal{F}(t), 0\le t\le T$ 是由该布朗运动生成的域流。设 $M(t), 0\le t\le T$ 关于这一域流是一个鞅。则存在一个适应过程 $\Gamma(u), 0\le u\le T$，使得

$$M(t)=M(0)+\int_0^t \Gamma(u)\,dW(u), 0\le t\le T$$

鞅表示定理保证了无套利情形下对冲策略存在的可能性，但只有当市场完全时，才能真正运用市场中的可交易资产构造出对冲策略，从而实现惟一定价。

7.4.4 鞅定价与 PDE 定价的内在一致性

首先回忆 PDE 方法的基本思路。我们在无套利条件下，通过构造可交易资产的无风险组合，推导出偏微分方程，衍生产品的定价通过求解 PDE 得到。显然，PDE 方法的根本前提也是无套利和市场完备性！

第二，市场风险价格是联系鞅定价与 PDE 定价的重要桥梁。

第三，Discounted Feynman-Kac theorem 实际上就是风险中性测度定价。

7.4.4 对冲策略的构造

我们已经发现，尽管我们在定价步骤中将对冲策略放在最后一步，但能够构造对冲组合是衍生产品能够运用等价鞅测度定出精确价格的核心和关键。实质上，对冲是国际金融市场上的“大玩家”们的生存法宝。

江湖传言一：赌球公司依靠准确预测比赛结果来设定赔率获利。

真相：

我们不能排除特异功能和预测帝存在的可能性，但是至少这不是博彩业尤其是赌球这种依赖于外在随机性的博彩业获利的基础（抓阄型的博彩会有所不同，因为幸运儿的数量是事先知道的）。

事实是，专业的赌球公司是采用类似于风险中性定价的方法来设定赔率的。他们计算“风险中性概率”的依据是下注额。他们需要保证不管比赛的结果如何，他们都可以大体上无风险地获得一笔佣金。当不同的博彩公司下注的分布不同时，他们设定的赔率会很不一样。

我们来看一个例子。

克罗地亚 vs 土耳其赔率					
	博彩公司		交易所		
欧赔			1家交易所开赔率		查看所有赔率 »
克罗地亚	3.25	from	2.12	from	betfair
土耳其	2.28	from	3.50	from	betfair
平局	3.00	from	3.55	from	betfair

这是从专业赌球网站摘录的某场比赛的赔率。我们可以看到两家博彩公司开出的赔率很不一样，如果这是基于专家的看法，我们只能说至少有一个专家预测非常不精确。我们还可

以看出这些赔率都是符合无套利原理的，因为两家公司都至少有一个结果的赔率小于 3。

当一家博彩公司面临单方向的大额下注时它会怎么做？它们会对冲。在这种情况下，博彩公司会大幅降低该方向的赔率，并大幅提高其他方向的赔率，以期吸引其他玩家来为其提供"保险"，保证无论比赛结果如何都不会面临大幅的损失。

当然，博彩公司没有专业的交易所和流动性良好的市场供其进行完美对冲，因此我们也可以时常听到博彩公司因为冷门比赛而遭受损失的消息，但是经历了这么长的历史考验而存活下来的博彩公司们显然都是对冲的高手。

江湖传言二：高盛等投行能够比一般人更好地预测未来的价格走势，甚至操纵价格的走势，

所以他们可以赚大钱，还能躲过金融危机。

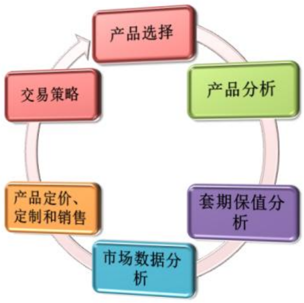
真相：

我们经常听到某企业因为跟高盛等投行做衍生品交易巨亏破产的消息。这是不是国际投行的阴谋？事实上这些国际投行的盈利来源从来都不是对赌，他们基本不会持有大额的裸露头寸，他们良好的风险管理和精妙的对冲技巧是其存活和获利的基础。

我们可以从内幕人士出版的畅销小说中看到这些投行的操作手法。在《FIASCO》中作者参与的每笔交易高盛其实都是一买一卖，也就是说都是进行过对冲的；而在《说谎者的扑克牌中》所罗门兄弟的债券销售员们不遗余力地欺骗客户购买也不是因为他们知道未来的走势，而是因为他们手里有大量的此类"头寸"，他们需要"对冲"。《宽客人生》中德曼们的任务之一就是要说服交易员使用"新模型进行对冲"。所以虽然每年发表了大量关于预测的研究报告，这些投行们一点也没有按照预测进行投机的迹象，而按照他们的预测进行投机的散户们往往损失惨重。

从现实的案例看，高盛没有在 CDO 和 CDS 市场崩盘中遭受大量损失，因为他们通过向包括香港和大陆在内的许多商人和老年人出售了"迷你债券"；而跟大量中国企业的石油衍生品交易也不是裸露的头寸，已经有研究指出，在中海油巨额亏损的例子中，中方企业对对手方其实是日本住友等财团。

总之，对冲是国际金融机构生存的根本。对他们来说，大部分情况下找到合适的对冲策略比计算出近似"合理"的价格要重要得多，他们总是在对冲成本的基础上加成报价。



如果不能进行复制，人类就只能通过预测未来给出定价，（除了上帝和穿越者，）谁都无法保证自己预测的价格是正确的，长期只通过投机获利的机构倒闭的概率为 1。事实上，目前市场上的信用衍生产品，即使有一个"近似合理"的价格，但却很难实施或找到合理的对冲方法，这也是为何此次次贷危机中 CDS 市场遭受重创的根本原因。

江湖传言三：只要做好了对冲，金融机构万事大吉。

真相：

尽管对冲具有如此重要的地位，但当系统性危机发生时，对手方风险和流动性风险仍将是致命的。对冲仅仅在市场有效运行时才能真正发挥作用。

如何构造对冲策略？——希腊字母