6. 衍生证券定价：PDE 方法

6.1 衍生证券定价方法

衍生证券定价方法主要可分为三类：

(1) PDE 方法

(2) 测度转换和鞅定价方法

从 PDE 方程中可以看到，标的资产的漂移率（预期收益率）并没有出现在方程中。因此我们可以进行测度转换，到另一个求解更方便的等价测度中去求衍生品价格。比如我们可以假设投资者为风险中性，在风险中性测度下求出衍生证券未来的现金流期望值，再将其以无风险利率贴现，即可得到衍生证券的定价公式。（注意我们并没有认为现实世界中人们真的变成了风险中性，这是其他学者对金融工程最大的误解之一。）

我们将在第 7 讲中详细介绍鞅定价方法，说明为什么可以用等价测度来进行定价、具体方法和需要满足的条件。

(3) 二叉树方法

该方法的原理就是概率中的中心极限定理：二项分布最终收敛为正态分布。事实上这也可以看做是一种离散方法的建模，Cox, Ross and Rubinstein (1979)利用该方法推导出了 B-S 模型的闭式解。该方法是从直观上最容易理解的方法，也运用较多，但可扩展性相对较差。

这三种方法显然将殊途同归，最终都能得到同样的答案。

6.2 随机微分方程（SDE）

6.2.1 随机微分方程一般形式

随机微分方程是如下形式的方程

$$dX(t)=a(t)dt+b(t)dW(t) \tag{6.1}$$

其中$a(t)$和$b(t)$都应该是可测的，分别被称为 drift 和 diffusion，也称为漂移率和波动率。除了方程之外，通常还需要指定初始条件

$$X(t)=x, t\geq 0, x\in R$$

因此，SDE 方程的定解问题可以表述为，寻求对于$T\geq t$有定义的随机过程$X(T)$，使得

$$X(T)=X(t)+\int_t^T a(u)du+\int_t^T b(u)dW(u)$$

SDE 一般难以求解，但一维线性 SDE

$$dX(t)=\left(\alpha(t)+\beta(t)X(t)\right)dt+\left(\gamma(t)+\sigma(t)X(t)\right)dW(t)$$

是可以显性求解的，其中$\alpha(t)$、$\beta(t)$、$\gamma(t)$和$\sigma(t)$只要是适应随机过程即可。我们遇到的方程中，$\alpha(t)$、$\beta(t)$、$\gamma(t)$和$\sigma(t)$多为时间的非随机函数。

6.2.2 金融中常见的 SDEs

金融中最常见的 SDE 一般为 CKLS(1992)模型（Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders model）

$$dX(t)=\left(\alpha+\beta X(t)\right)dt+\sigma X^{\gamma}(t)dW(t)$$

其中α、β、γ和σ均为常数。这 4 个参数设定不同，就形成普通布朗运动、几何布朗运动、均值回归过程（mean-reverting process）、平方根过程（γ=0.5）。几何布朗运动意味着$X(t)$的方差与$X^2(t)$成比例，平方根过程则意味着$X(t)$的方差与$X(t)$成比例，大小不同。

具体来看，金融中常被提及的模型包括：

Ornstein-Uhlenbeck 过程(1930)（O-U 过程）

$$dX(t)=\kappa\left(\mu-X(t)\right)dt+\sigma dW(t)$$

股票价格的 B-S 几何布朗运动(1973)

$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dW(t)$$

利率模型：

Merton 模型(1973)

$$dr(t)=\mu dt+\sigma dW(t)$$

Vasicek 模型(1973)

$$dr(t)=\kappa\left(\mu-r(t)\right)dt+\sigma dW(t)$$

CIR 模型 (1985)

$$dr(t)=\kappa\left(\mu-r(t)\right)dt+\sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

Dothan 模型(1978)

$$dr(t)=\sigma r(t)dW(t)$$

Brennan-Schwartz 模型(1980)

$$dr(t)=\kappa\left(\mu-r(t)\right)dt+\sigma r dW(t)$$

波动率模型：

CEV 模型(1975)（constant elasticity of variance model，常弹性方差）

$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S^{\gamma}(t)dW(t)$$

随机波动率模型 Heston 模型(1993)

$$
\begin{aligned}
&dS(t)=\mu(t)dt+\sqrt{V(t)}dW_1(t)\\
&dV(t)=k\left(\theta-V(t)\right)dt+\sigma_V\sqrt{V(t)}dW_2(t)\\
&dW_1(t)dW_2(t)=\rho dt
\end{aligned}
$$

其中几何布朗运动的求解运用$\ln S(t)$，O-U 过程则运用$r(t)e^{\kappa t}$。几何布朗运动解的一般形式为

$$S(T)=S(t)e^{\int_t^T\left(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u)\right)du+\int_t^T\sigma(u)dW(u)}$$

CIR 模型不是线性随机微分方程，无法求得显式解。但在给定初始条件的情况下，该解存在且惟一，可由蒙特卡罗模拟逼近；且该解的许多性质可以确定。

6.3 偏微分方程

6.3.1 得到偏微分方程

在金融中，我们通过无套利的方法获得衍生证券价格所满足的偏微分方程。例如第 5 讲中运用标的资产和衍生产品构造无风险组合，或是运用标的资产和无风险资产复制衍生产品。下面我们用另一种无套利方法来得到一般的偏微分方程。

我们总可以用广义几何布朗运动来描述标的资产价格所遵循的随机过程，即：

$$dS(t)=\mu_s(t)S(t)dt+\sigma_s(t)S(t)dW(t) \tag{6.2}$$

根据 Itô-Doeblin 引理，该标的资产的衍生证券价格都应服从

$$df(t)=\mu_f(t)f(t)dt+\sigma_f(t)f(t)dW(t) \tag{6.3}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\mu_f(t)=\frac{1}{f(t)}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\mu_s(t)S(t)\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma_s^2(t)S^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)\\
&\sigma_f(t)=\frac{1}{f(t)}\sigma_s(t)S(t)\frac{\partial f}{\partial S}
\end{aligned}
$$

t 时刻，任选其中两个可交易的衍生证券构造投资组合。卖空总价值为X_1的衍生证券 1 并买入总价值为X_2的衍生证券 2。也就是说，t 时刻该组合的总价值为$X(t)=X_2-X_1$。则有

$$dX(t)=\left[X_2\mu_2(t)-X_1\mu_1(t)\right]dt+\left[X_2\sigma_2(t)-X_1\sigma_1(t)\right]dW(t) \tag{6.4}$$

如果令

$$X_2=\frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)}X_1$$

式(6.4)中的波动率将等于零。也就是说，在 t 时刻，这是一个瞬时无风险的组合。在无套利条件下，该组合在此瞬间只能获得无风险收益，即

$$dX(t)=\left[X_2\mu_2(t)-X_1\mu_1(t)\right]dt=r(t)X(t)dt$$

整理可得

$$\frac{\mu_1(t)-r(t)}{\sigma_1(t)}=\frac{\mu_2(t)-r(t)}{\sigma_2(t)}$$

由于衍生证券是任选的，因此实际上对于任意的可交易 $f(X,t)$，都有

$$\lambda(t)=\frac{\mu_f(t)-r(t)}{\sigma_f(t)} \tag{6.5}$$

从经济含义上说，$\lambda(t)$ 是衍生证券 f_i 的超额收益率（即收益率超过无风险利率的部分）与波动率的比率，它对所有的衍生证券都是一样的，因此它只取决于标的资产 $S(t)$ 和时间 t，被称为标的资产的市场风险价格（market price of risk），代表每单位标的资产风险的风险溢酬。

将式(6.3)中的 $\mu_f(t)$ 和 $\sigma_f(t)$ 代入式(6.5)，就可以得到偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\mu_s(t)-\sigma_s(t)\lambda(t)\right)S(t)\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma_s^2(t)S^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=r(t)f \tag{6.6}$$

当标的资产也是可交易资产时，式(6.6)又可以写为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+r(t)S(t)\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma_s^2(t)S^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}-r(t)f=0 \tag{6.7}$$

式(6.6)和(6.7)是（标的资产不支付红利情形下）一维衍生证券的一般 PDE 方程。求解该方程，即可为衍生证券定价。B-S-M 偏微分方程是标的资产服从几何布朗运动的特例。

NOTE 1：如何理解式(6.5)与 CAPM 的关系？如何理解衍生证券的 σ_f 和 β_f？

NOTE 2：如果标的资产支付红利，应作什么调整？

6.3.2 理解偏微分方程

偏微分方程一般包括方程本身，如式(6.6)，再加上边界条件（boundary condition）如

$$f(S(T),T)=g(S(T),T)$$

其中 $g(\cdot)$ 是一个已知的函数。

首先，PDE 也是函数方程，其解是标的变量的函数。我们不知道该函数的形式如何，但知道其偏导数的组合满足该 PDE；同时，该函数满足给定的边界条件，例如在 T 时刻，该函数等于已知的 $g(S(T),T)$。因此求解 PDE，就是找到一个函数，其偏导数满足 PDE

方程和边界条件，该函数是用标的资产所满足的 SDE 的参数来表达的。

其次，理解式(6.7)的具体形式。由于式中的参数可能是随机过称，我们以最简单的 B-S-M 方程为例来加以阐述。

回忆 B-S-M 方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS(t)\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma_s^2S^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}-rf=0$$

该方程针对的函数是 $f\left(S(t),t\right)$，所以是一个二元偏微分方程。该方程有两个一阶偏导数和一个二阶偏导数，类似于我们在初等代数中学过的抛物线，因此被称为抛物线 PDE（Parabolic PDE）。也就是说，衍生证券价值的变动源于时间的推移、标的资产价格的一阶和二阶变化，$-rf$ 则称为衰减项。因为金融价值在时间上是有差异的，随着时间的推移，同样数目的钱将会不断贬值，从而产生了系统价值的漏损。

PDE 在现代物理、电信、计算机等许多尖端领域都有广泛的应用。广义相对论对应的偏微分方程组已经被无数世界最聪明脑袋研究了上百年，至今没有得出具有十分优良物理意义的解。所以可以想象其中的难度。幸运的是 B-S-M 方程是 PDE 中最简单、也是被研究得最透彻的一种：抛物线方程，也叫做热传导方程或扩散方程。该方程最早出现于 19 世纪，广泛应用于粒子扩散、河流海洋污染、人口迁移、生态系统、化学反应、生物电学、甚至是动物的花纹研究，Black and Scholes (1973)则是第一个将 PDE 应用于金融的研究，与其他领域对该方程的应用相比，B-S-M 也是比较简单的。

第三，理解式(6.7)的一般性。由于(6.2)的一般性，标的资产不付红利的一维衍生证券均满足式(6.7)。例如远期价值、奇异期权的价格等等。

第四，理解边界条件。所谓边界条件，在物理学上，就是根据某个 PDE 演化的物理现象的初始状态和最终状态；在金融学上，就是衍生证券自身特性和合约条款中规定的内容，比如期货价格到期收敛于现货价格，零息债价格到期时应等于 100，期权价值则等于某个较大值，等等。显然，产品种类和所要解决的问题不同，边界条件也将不同。如果没有边界条件，一般来说 PDE 是无法求解的。

例如，B-S-M 模型有 4 个边界条件。首先有

$$S(0)=S_0$$

然后是

$$f\left(S(T),T\right)=\max\left\{S(T)-K,0\right\}$$

另外两个边界条件不那么明显，为

$$f\left(\tau,S(\tau)=\infty\right)=\infty$$
$$f\left(\tau,S(\tau)=0\right)=0$$

其中 $t\le\tau\le T$。这些是我们在金融中常见的边界条件。有时我们没有显性用到后面两个边界条件，但是了解这些边界条件可以有助于分析 PDE 的一些性质。

又如，向下敲出期权的边界条件为

$$\begin{cases} f\left(S(T),T,K_T\right)=\max\left\{S(T)-K,0\right\} \\ f\left(S(t),t,K_t\right)=R_t \quad S_t\le K_t \end{cases}$$

边界条件不同，式(6.7)也就不同。

6.3.3 解偏微分方程

关于偏微分方程求解的著作汗牛充栋，我们不得不忽略其中的大部分，重点介绍金融实践中运用最多的几种方法。

(1) 运用 Discounted Feynman-Kac theorem 求解

Discounted Feynman-Kac theorem

设随机变量 $S(t)$ 满足以下过程：

$$dS(t)=\mu(t)dt+\sigma(t)dW(t)$$

给定函数 $h(S)$ 及 $t\in[0,T]$，定义函数

$$f(s,t)=E\left[e^{-\int_t^T b(u)du}h\left(S(T)\right)\mid\mathcal{F}_t\right]$$

并满足 $\forall S(t),t,E\left|h\left(S(T)\right)\right|<\infty$，则 $f(s,t)$ 满足如下偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mu(t)\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=b(t)f$$

边界条件为

$$f\left(S(T),T\right)=h\left(S(T)\right)$$

Discounted Feynman-Kac theorem 的本质是将 PDE 的求解过程转化为求扩散过程的期望。该方法其实是建立了 PDE 跟 SDE 的对应关系，最后将偏微分方程的解表达成了某一扩散扩散过程的期望值。

(2) 运用数值方法求解

在无法求得闭式解时，人们就不得不转向数值方法。其中最常用的是有限差分方法，或者叫有限元方法。该方法由于在几乎所有领域都有应用，所以有大量的相关研究对之加以完善和改进，现在已经非常成熟了。该方法运算效率很高，因此是衍生品定价领域最为常用的方法，但是由于对数学要求较高而不易掌握。我们将在第 8 讲的数值方法中简要介绍一些初级的有限差分方法。

另外最近也有人使用谱分析和小波分析的方法，其在衍生品定价中的实用性尚待验证。

(3) 运用分析法求解

回想一下我们在微积分中对付 ODE 和之前对付 SDE 的方法：猜测函数形式然后待定系数，代入偏微分方程并解出系数。分析方法多数是这样一些设定函数形式的套路。主要的方法有化简法、格林函数法、傅里叶分解法、降维法等。由于时间有限，我们对此不作过多介绍。对 PDE 方法感兴趣的同学可以参考 Willmott (2006)。