第21章

估计波动率与相关系数

陈　蓉　教授

aronge@xmu.edu.cn

厦门大学金融系

2011年3月30日

>> 本章主要内容

1. 引论
2. ARCH模型与GARCH模型
3. 扩展的GARCH模型
4. 随机波动率模型

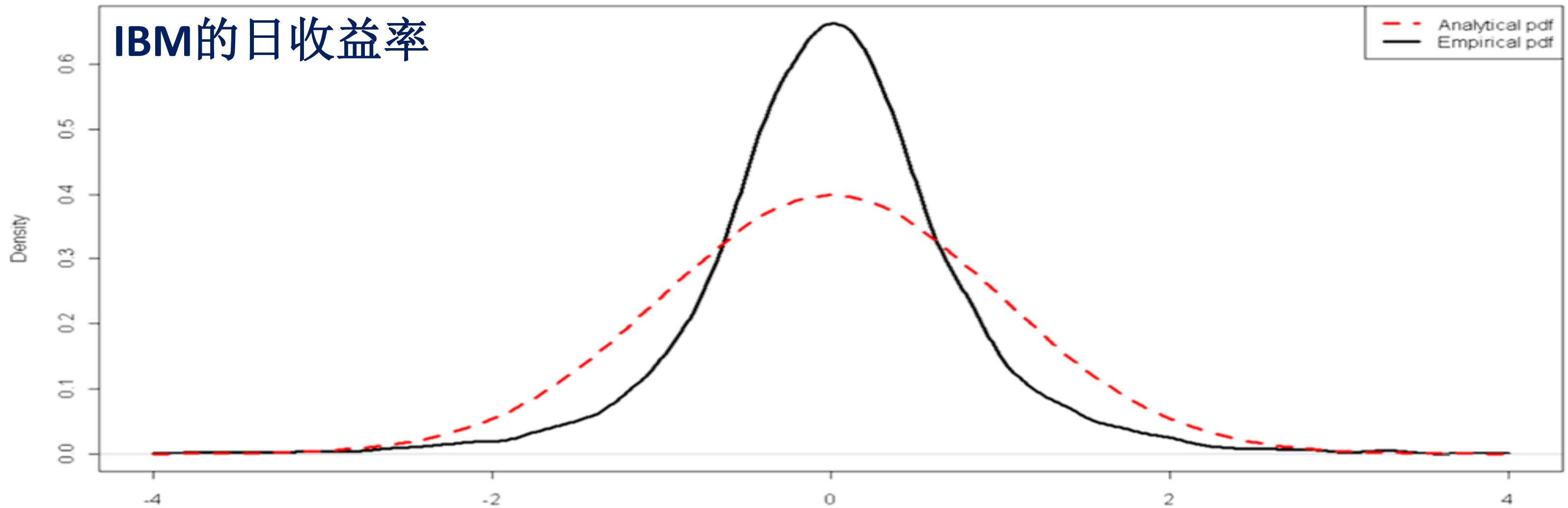
>> Why Volatility Models？

- 经济意义
  - 波动指标和风险指标
  - 期权定价
  - 风险管理重要参数
  - 可交易资产

- 统计意义
  - ARMA模型不能刻画收益率的超额峰度以及收益率二阶矩之间的关联。为更有效地刻画收益率的变化规律，必须对高阶矩进行建模

>> 收益率的经验事实（1）

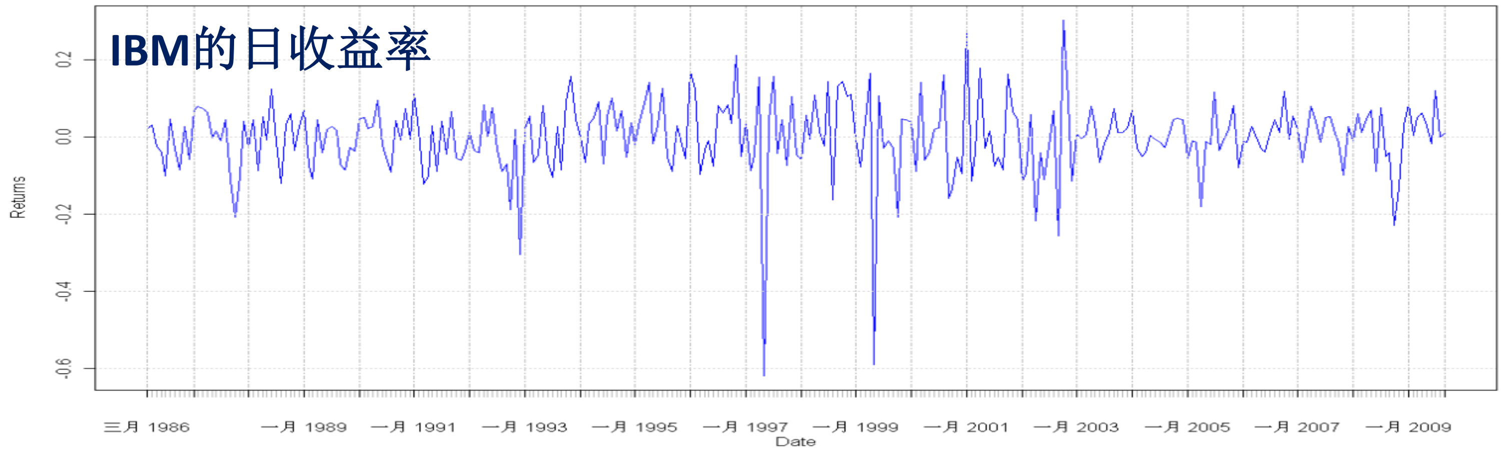
- 收益率是尖峰厚尾的



- 收益率的尖峰厚尾的可能原因：
  - 收益率的分布本身是尖峰厚尾的（厚尾分布的研究）
  - 波动率聚类（Volatility Cluster）

>> 收益率的经验事实（2）

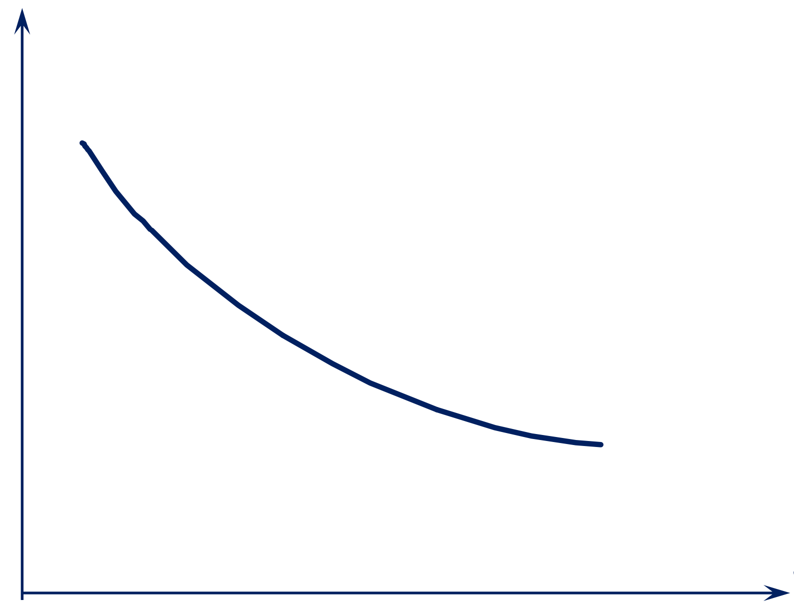
- 波动率“聚类”



– 波动率类聚：
  - 冲击本身是非均匀的；
  - 市场对冲击的反应/消化不是瞬时的。

>> 收益率的经验事实（3）

- 股票市场新息对收益率的冲击是非对称的（Volatility Skew）



Volatility Skew in Equity Market in USA

>> 波动率：不可观测

- 无法被直接观测
  - 现货市场收益率
  - 期权市场隐含波动率

>> 波动率特征

- 波动率聚类
- 波动率连续变动，很少跳跃
- 波动率通常在固定范围内变化：平稳序列（均值回复）
- 波动率的非对称变动：下跌/熊市
- 不同资产、金融市场间波动率存在协同性：波动率之间的相关性往往高于收益率之间的相关性

>> Various Volatilities：基于方差

- 历史波动率（收益率）
  - 历史平均日波动率
    - 简单的平均日波动率：假定波动率为常数
    - EWMA
  - 已实现波动率（高频数据，无模型）
  - 统计模型
    - ARCH族模型
    - 随机波动率模型（是否属于历史波动率？）
- 隐含波动率（来源于期权的可观测的预期波动）
  - (BS)隐含波动率：常用平价隐含波动率
  - 无模型隐含波动率
  - Implied Volatility Surface

>> 历史平均日波动率

- 简单历史平均 $\sigma_n^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i}^2$

- 加权历史平均 $\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2, \ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$

- EWMA

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2 \\ &= (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} \lambda^{i-1} u_{n-i}^2 + \lambda^m \sigma_{n-m}^2\end{aligned}$$

>> 已实现波动率（Realized Volatility）

- 已实现波动率

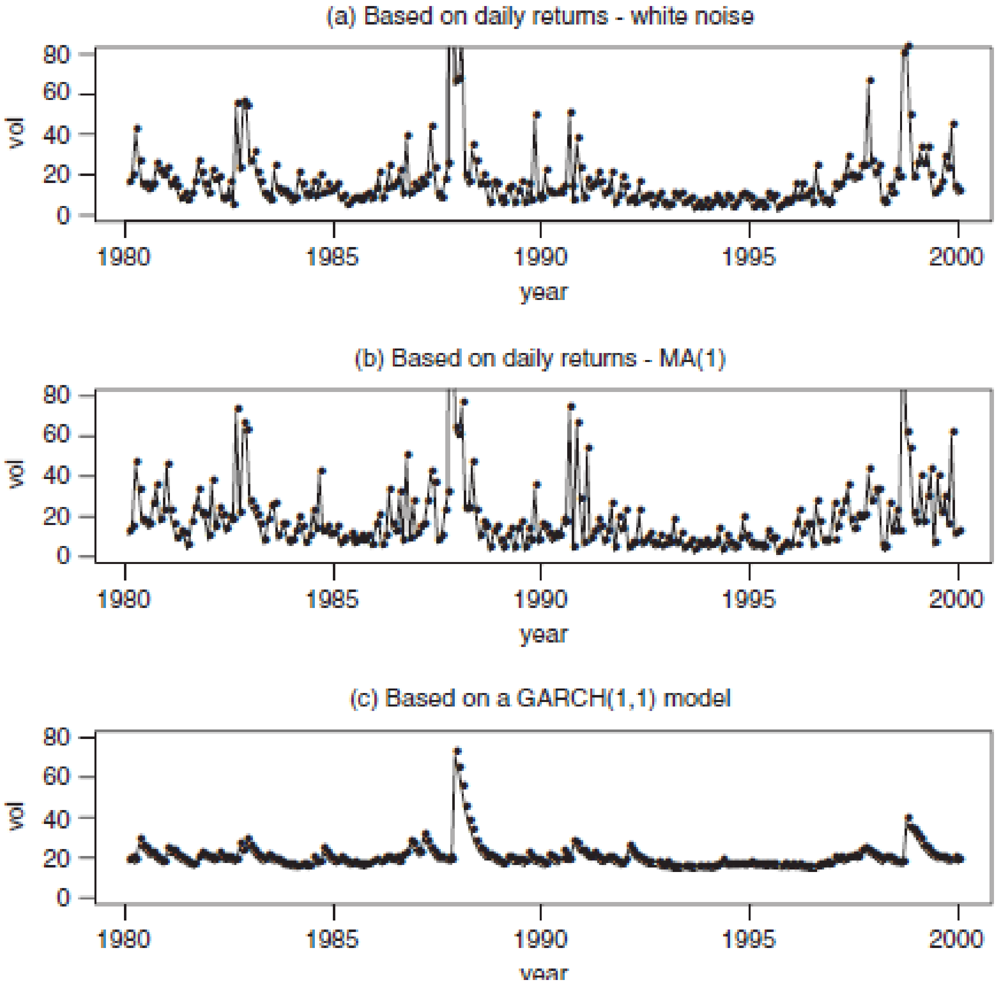
$$\sum_{i=1}^{m} r^2_{t+\frac{i}{m}\Delta}$$

- 根据二次变分原理可得

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\int_t^{t+\Delta} \sigma^2_{t+\tau} d\tau - \sum_{i=1}^{m} r^2_{t+\frac{i}{m}\Delta}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

- 被认为提高了度量波动率的准确性；但可能受到市场微观结构的噪音干扰，对时间间隔选择的依赖性较高；同时忽略了每天之间的价格变化的影响

>> 已实现波动率 VS GARCH



>> 期权市场隐含波动率(I)

- 无模型隐含波动率：
  - Demeterfi，Derman，Kamal and Zou（1999）

$$E^F(Var)=\frac{2}{T}\left\{rT-[\frac{S_0}{S_*}e^{rT}-1]-\ln\frac{S_*}{S_0}+e^{rT}\int_0^{S_*}\frac{1}{K^2}P(K)dK+e^{rT}\int_{S_*}^{\infty}\frac{1}{K^2}C(K)dK\right\}$$

  - Britten-Jones and Neuberger（2000）

$$E^F(Var)=\frac{2e^{rT}}{T}\left[\int_0^{F_0}\frac{P(T,K)}{K^2}dK+\int_{F_0}^{\infty}\frac{C(T,K)}{K^2}dK\right]$$

  - VIX(2003)

$$VIX=\frac{2}{T}\sum_i\frac{\Delta K_i}{K_i^2}e^{rT}Q(T,K_i)-\frac{1}{T}\left(\frac{F_0}{K_0}-1\right)^2$$

  - Jiang and Tian(2007)：上述的等价性

>> 期权市场隐含波动率(II)

- Implied Volatility Surface
  - 确定性隐含波动率模型
  - 随机隐含波动率模型

>> 本章主要内容

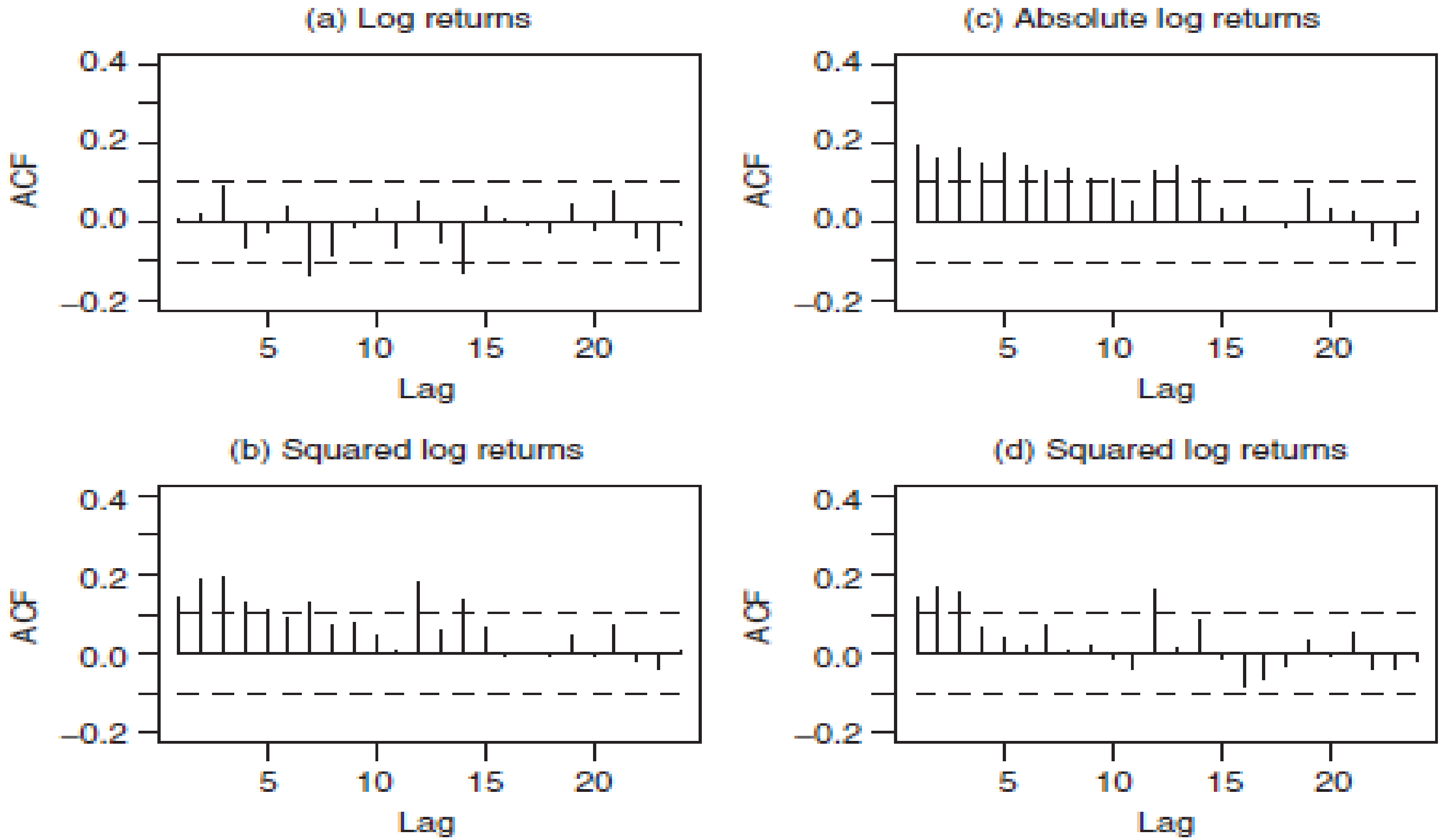
1 引　论

2 ARCH模型与GARCH模型

3 扩展的GARCH模型

4 随机波动率模型

>> 收益率序列：不相关却不独立



>> 条件二阶矩

- ARMA模型：假定收益率的无条件方差和条件方差恒定

- 波动率类聚：尽管具有恒定的均值（即无条件方差），但不同时点的波动率并不相等，亦即存在条件异方差。（Conditional Heteroskedasticity）

>> 条件均值与条件异方差

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

- 条件均值方程（可引入外生变量）

$$E(r_t \mid I_{t-1}) = \mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{it} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

- 条件方差方程（可引入外生变量）

$$\sigma_t^2 = Var(r_t \mid I_{t-1}) = Var(\varepsilon_t \mid I_{t-1})$$

  – GARCH：确定的函数

  – SV：随机方程

（构建条件异方差模型实质上是刻画ε_t^2的动态过程）

>> 条件异方差的检验（1）

- 观察收益率残差的平方序列
  - 对收益率序列建模，使残差序列本身不存在自相关。
  - 计算残差的平方值。观察这一平方序列的ACF、PACF并计算Q统计量。

>> 条件异方差的检验（2）

- ARCH-LM检验（Engle, 1982）
  - 假设
    - H_0: 序列不存在ARCH形式的条件异方差；
    - H_1: 序列存在ARCH(m)阶的条件异方差。
  - 步骤
    - 对收益率序列进行普通的OLS回归，得到残差项；
    - 对残差项的平方继续进行回归（包含截距项和q阶滞后

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_m \hat{\varepsilon}_{t-m}^2 + v_t$$

    - 计算R^2，TR^2渐进服从卡方分布，自由度为 q。
    - 也可直接进行F检验（小样本时使用F检验而非卡方检验），原假设为波动率方程的回归系数联合为0。分子自由度q，分母为T-q。

>> 条件异方差的检验（3）

- ARCH-LM检验的不足
  - ARCH-LM检验对均值方程（即收益率的回归方程）的设定较为敏感。
  - 简单观察残差平方序列或者ARCH-LM检验都只能识别波动率的线性相关.
- BDS检验(Brock, Dechert and Scheinkman , 1987)
  - 直接从收益率的分布入手检验异方差性，避免ARCH-LM检验的缺陷。

>> ARCH模型：基本形式

- ARCH (1)

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t$$

where

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

参数限制：

1. 波动率必须为正： $\alpha_0 > 0,\ \alpha_1 > 0$
2. 波动率是平稳序列: $\alpha_1 < 1$

v_t is a white noise (IID) and $\sigma_v^2 = 1$. v_t is independent of ε_{t-1}.

- ARCH (m)

参数限制：

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t$$

where

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2$$

1. 波动率为正： $\alpha_i > 0,\ i = 0,1,\ldots m$
2. 波动率平稳: 特征根在单位圆内

1+2: $\sum_{i=1}^{m} a_i < 1$

v_t is a white noise (IID) and $\sigma_v^2 = 1$. v_t is independent of ε_{t-i}.

>> ARCH模型：理解

- AR模型

  （系数限制）

$$\varepsilon_t=\sqrt{h_t}v_t,\ \ h_t=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+\ldots+\alpha_m\varepsilon_{t-m}^2$$

$$\text{Define } \eta_t=\varepsilon_t^2-h_t=\left(v_t^2-1\right)h_t\ ,$$

$$E\left(\eta_t\right)=0,\mathrm{cov}\left(\eta_t,\eta_{t-i}\right)=0 \ (\text{not IID})$$

$$\rightarrow \varepsilon_t^2=a_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+\ldots+\alpha_m\varepsilon_{t-m}^2+\eta_t$$

（为何不直接使用AR结构？）

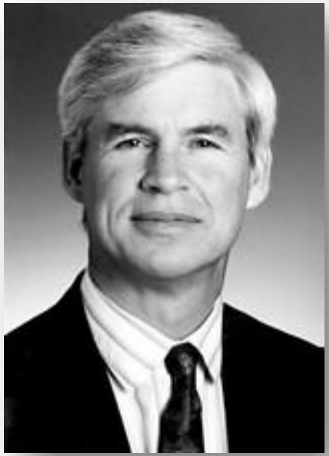
- 加权平均的拓展

$$\sigma_n^2=\sum_{i=1}^m\alpha_i u_{n-i}^2,\ \sum_{i=1}^m\alpha_i=1$$

$$VS\ \ h_t=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+\ldots+\alpha_m\varepsilon_{t-m}^2$$

>> AutoRegressive Conditional Heteroscedastic

- 最早为波动率建立系统框架的模型（Engle, 1982）
- 2003年的诺贝尔经济学奖被授予R. F. Engle III, "for methods of analyzing economic time series with time-varying volatility (ARCH)."



>> ARCH(1) 性质：ε_t 的无条件矩

- 无条件期望

$$E\varepsilon_t = E\left[v_t\left(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2\right)^{1/2}\right]\left(v_t \text{ is independent of } \varepsilon_{t-1}\right)$$

$$= Ev_t E\left[\left(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2\right)^{1/2}\right] = 0$$

- 自协方差　Since $Ev_i = 0,\ E\varepsilon_t\varepsilon_{t-i} = 0,\ \text{for } i \neq 0$
- 无条件方差　$E\left(\varepsilon_t^2\right) = \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$
- 引入ARCH过程并未改变ε_t序列的无条件矩。ε_t序列依然是0均值、方差恒定的（弱平稳），且与自身的滞后值线性无关。

>> ARCH(1) 性质：ε_t 的条件矩

- 条件期望

$$E_{t-1}(\varepsilon_t) = E_{t-1}v_t E_{t-1}\left(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2\right)^{1/2} = 0$$

- 条件方差

$$Var_{t-1}(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2$$

- 引入ARCH过程后，ε_t 与自身的滞后值不再独立的：较大的冲击导致较大的方差，从而提高了出现较大冲击的概率。

>> ARCH(1)性质：ε_t 的高阶矩(1)

- 无条件四阶矩（假设四阶矩存在）

Since $E(\varepsilon_t)=E\left[E_{t-1}(\varepsilon_t)\right]$ and $E\left[x^4\right]=3E\left[x^2\right]$ if x is normally distributed.

Given information set I_{t-1}, the conditional distribution of ε_t is normal.

$$E_{t-1}\left(\varepsilon_t^4\right)=3\left[E_{t-1}\left(\varepsilon_t^2\right)\right]^2=3\left(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2\right)^2$$

Thus, $E\left(\varepsilon_t^4\right)=E\left[E_{t-1}\left(\varepsilon_t^4\right)\right]=3\left[\alpha_0^2+2\alpha_0\alpha_1\operatorname{var}(\varepsilon_t)+\alpha_1E\left(\varepsilon_t^4\right)\right]$

We have $E\left(\varepsilon_t^4\right)=\dfrac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)\left(1-3\alpha_1^2\right)}$

- 四阶矩存在的条件：$\alpha_1^2<\dfrac{1}{3}$

>> ARCH(1) 性质：ε_t 的高阶矩(2)

- 无条件峰度

$$Kurtosis = \frac{E\left(\varepsilon_t^4\right)}{E^2\left(\varepsilon_t^2\right)} = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3$$

- 引入ARCH过程后（$a_1 \neq 0$），在四阶矩存在的情况下，残差项的峰度将大于3：尖峰肥尾
- A_1＝0，意味着不存在尖峰肥尾

>> AR(1), ARCH(1)：前两阶矩

$$r_t = \frac{\phi_0}{1-\phi_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i},$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t \qquad E\left(\varepsilon_j\right) = 0,\ E\left(\varepsilon_j^2\right) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

无条件期望

$$E\left(r_t\right) = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$$

无条件方差（数值变化）

$$\operatorname{var}\left(r_t\right) = \frac{1}{1-\phi_1^2} \operatorname{var}\left(\varepsilon_t^2\right) = \left(\frac{1}{1-\phi_1^2}\right) \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$$

条件期望

$$E_{t-1}\left(r_t\right) = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1}$$

条件方差

$$\operatorname{var}\left(r_t \mid I_t\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

– 引入ARCH过程没有改变收益率序列无条件一、二阶矩的性质，但改变了条件方差的结构。

>> AR(1), ARCH(1)：高阶矩

– 无条件四阶矩：示意性分解

$$E\left[(r_t-\mu)^4\right]=E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_1^i\varepsilon_{t-i}\right)^4\right]$$

$$=\boxed{E\left[\sum_{i=0}^{\infty}a_1^{4i}\varepsilon_{t-i}^4\right]}+\boxed{E\left[\sum_{i,j}\psi_{i,j}\varepsilon_{t-i}^2\varepsilon_{t-j}^2\right]}$$

引入ARCH过程后，误差项的平方出现了相关性，这一部分不再是0，将对四阶矩产生额外影响。

普通的ARMA模型误差项的高阶是不相关的，因此只存在四次项。

– 引入ARCH过程可以刻画收益率的尖峰肥尾性。

>> ARCH模型：优点与不足

- 优点
  - 能刻画收益率的尖峰肥尾特征；
  - 能刻画波动率的聚类效应；
- 不足
  - 待估参数往往较多；
    - 需要引入多阶滞后刻画波动率变化
  - 参数限制较为严格；
    - 若要保证四阶矩存在，还有额外限制。
  - 不能刻画冲击对市场的非对称影响。
    - 采用残差的平方直接建模，收益率不论是正的偏离还是负的偏离对波动率都将产生同样的影响。与经验事实不符。

>> ARCH → GARCH

- Why GARCH：节省参数
  - ARCH模型往往面临着节省参数和刻画波动率的缓慢衰减过程的冲突
  - 按照AR模型到ARMA模型同样的逻辑，当ARCH模型所需要的参数较多时，能否引入ARMA模型构建波动率模型，解决参数过多的问题？
- Bollerslev(1986)和Taylor(1986) 将ARMA过程引入波动率模型，提出了GARCH模型（Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model）。

>> GARCH模型：基本形式

- GARCH(s, m)

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2}_{\text{ARCH项}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{s} \beta_j h_{t-p}}_{\text{GARCH项}}$$

- GARCH(1,1)：基本能够描述金融数据的波动率特征，最常用的GARCH模型

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

>> GARCH模型：参数限制

- GARCH(1,1) $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1};$

  1. Positive volatility and conditional variance

     $\text{GARCH}(1,1): \alpha_0 > 0,\ \alpha_1 > 0,\ \beta_1 > 0$

  2. Stationary and invertible ARMA process in conditional variance equation

     $\text{GARCH}(1,1): \alpha_1 < 1,\ \beta_1 < 1$

  3. Bounded unconditional variance (To be proved)

     $\text{GARCH}(1,1): \alpha_1 + \beta_1 < 1$

- GARCH(s ,m)的限制可类似给出。

>> GARCH模型：理解

- ARMA模型

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

$$\text{Define } \eta_t = \varepsilon_t^2 - h_t = \left(v_t^2 - 1\right) h_t \ ,$$

$$E\left(\eta_t\right) = 0, \operatorname{cov}\left(\eta_t, \eta_{t-i}\right) = 0$$

$$\rightarrow \varepsilon_t^2 = a_0 + \left(\alpha_1 + \beta_1\right) \varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1 \eta_{t-1} + \eta_t$$

- 简约模型：等价于ARCH(∞)

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \\ &= \alpha_0 \left(1 + \beta + \beta^2 + \ldots\right) + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \left(1 + \beta L + \beta^2 L + \ldots\right) + \beta^\infty \sigma_0^2 \end{aligned}$$

- EWMA的拓展

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda) u_{n-1}^2$$

$$v.s.\ h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

>> GARCH(1,1)：ε_t 的前两阶矩

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{h_t} \qquad h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

- ε_t的无条件期望与条件期望：依然为0
- 自协方差依然为0：$E\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-i}\right)=0,\ \text{for } i\neq 0$
- 条件方差 $E_{t-1}\left(\varepsilon_t^2\right)=h_t$
- 无条件方差：利用条件期望迭代法则

$$\text{Since } \operatorname{var}\left(\varepsilon_t\right)=E\left[E_{t-1}\left(\varepsilon_t^2\right)\right]=E\left(h_t\right)$$

Thus,

$$\operatorname{var}\left(\varepsilon_t\right)=\alpha_0+\alpha_1\operatorname{var}\left(\varepsilon_t\right)+\beta_1\operatorname{var}\left(\varepsilon_t\right)$$

$$\operatorname{var}\left(\varepsilon_t\right)=\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$$ 验证对于参数的限制

>> GARCH(1, 1)性质：ε_t 的高阶矩

- 无条件四阶矩（假设四阶矩存在）

Since $E(\varepsilon_t)=E\left[E_{t-1}(\varepsilon_t)\right]$ and $E\left[x^4\right]=3E\left[x^2\right]$ if x is normally distributed.

$$E_{t-1}\left(\varepsilon_t^4\right)=3\left[E_{t-1}\left(\varepsilon_t^2\right)\right]^2=3\left[\alpha_0\left(1+\beta_1+\beta_1^2+\ldots\right)+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2\left(1+\beta_1L+\beta_1^2L+\ldots\right)+\beta_1^{\infty}\sigma_0^2\right]^2$$

$$E\left(\varepsilon_t^4\right)=3\left[\left(\frac{\alpha_0}{1-\beta_1}\right)^2+\frac{2\alpha_0}{1-\beta_1}\frac{\alpha_1}{1-\beta_1}\mathrm{var}\left(\varepsilon_t\right)+\alpha^2{}_1E\left\{\left[\varepsilon_{t-1}^2\left(1+\beta_1L+\beta_1^2L+\ldots\right)\right]^2\right\}\right]$$

$$\alpha_1=0\rightarrow Kurtosis=\frac{E\left(\varepsilon_t^4\right)}{E^2\left(\varepsilon_t^2\right)}=3$$

$$\beta_1=0\rightarrow Kurtosis=\frac{E\left(\varepsilon_t^4\right)}{E^2\left(\varepsilon_t^2\right)}=3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}>3$$

- ARCH项是尖峰肥尾的来源

>> GARCH模型：r_t 的性质

- 与ARCH部分的推导一致，引入GARCH过程刻画条件异方差，收益率序列的一、二阶无条件矩性质不会发生变化，但条件方差改变。

- 由于考虑了残差平方间的相关性，引入GARCH过程同样可以刻画收益率的尖峰厚尾性。

>> GARCH模型评价

- 优点：与ARCH相比，待估参数大量减少。

- 缺点：
  - 参数限制依然较严格
  - 同样不能刻画波动率变化的非对称性

>> 独立同分布、鞅差分序列与白噪音

$$\ln S_t - \ln S_{t-1} = \mu_t + \varepsilon_t$$

其中 ε_t 是一个均值为零的协方差平稳过程。

（1） ε_t 是 i.i.d.（$0,\sigma^2$）；

（2） $E(\varepsilon_t \mid I_{t-1}) = 0$， I_{t-1} 表示时刻 t-1 的信息集合；

（3） $E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0, j \succ 0$。

>> 独立同分布VS鞅差分序列

- 独立同分布一定是鞅差分序列
- 鞅差分序列不一定是独立同分布：如ARCH

>> 鞅差分序列VS白噪音

- 鞅差分序列一定是白噪音

$$E(\varepsilon_t) = E(E(\varepsilon_t \mid I_{t-1})) = 0$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = E(E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j} \mid I_{t-1})) = E(\varepsilon_{t-j} E(\varepsilon_t \mid I_{t-1})) = 0$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$$

- 白噪音不一定是鞅差分序列：例如非线性MA过程

>> 非线性MA过程

$$\varepsilon_t = \alpha\xi_{t-1}\xi_{t-2} + \xi_t，其中 \{\xi_t\} 是 i.i.d.(0,\sigma^2)。$$

由于

$$E(\varepsilon_t / I_{t-1}) = E(\alpha\xi_{t-1}\xi_{t-2} + \xi_t / I_{t-1}) = E(\alpha\xi_{t-1}\xi_{t-2} / I_{t-1}) + E(\xi_t / I_{t-1}) = \alpha\xi_{t-1}\xi_{t-2} \neq 0，$$

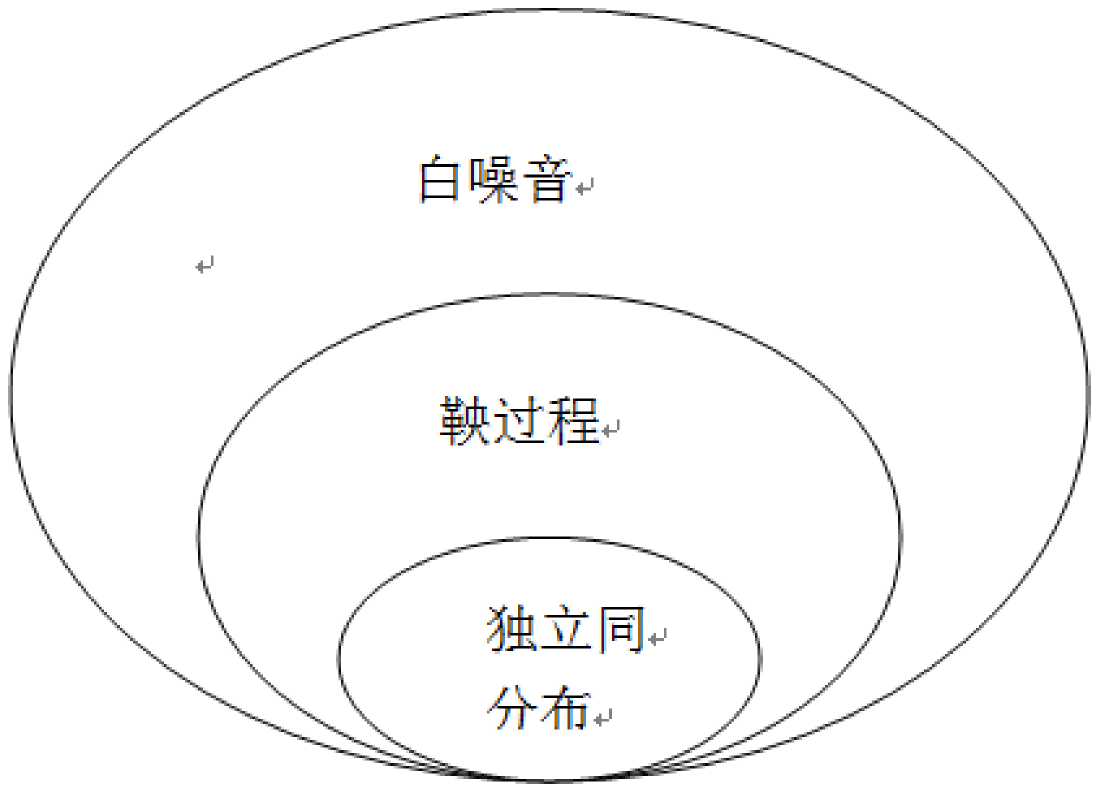
所以它不是一个鞅过程。而

$$\text{cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-j}) = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j}) = E[(\alpha\xi_{t-1}\xi_{t-2} + \xi_t)(\alpha\xi_{t-j-1}\xi_{t-j-2} + \xi_{t-j})]$$

$$= E(\alpha^2\xi_{t-1}\xi_{t-2}\xi_{t-j-1}\xi_{t-j-2} + \alpha\xi_{t-1}\xi_{t-2}\xi_{t-j} + \alpha\xi_{t-j-1}\xi_{t-j-2}\xi_t + \xi_t\xi_{t-j}) = 0$$

$$E(\varepsilon_t) = E(\alpha\xi_{t-1}\xi_{t-2} + \xi_t) = \alpha E(\xi_{t-1})E(\xi_{t-2}) + E(\xi_t) = 0，$$

>> 三者关系



>> GARCH模型：模型识别

- ARCH-LM检验同样可以用来识别GARCH效应。
- PACF可以用来辅助定ARCH模型的阶数，但ACF和PACF不能用来识别GARCH模型

Define $\eta_t = \varepsilon_t^2 - h_t = \left(v_t^2 - 1\right) h_t$ and $E\left(\eta_t\right) = 0, \operatorname{cov}\left(\eta_t, \eta_{t-i}\right) = 0$

Rewrite GARCH(s, m)

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_i \varepsilon_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \eta_{t-j} + \eta_t$$

- 上述分解表明，GARCH(s, m)过程中的序列残差平方实际上是一个ARMA$(\max(s, m), s)$过程。

>> GARCH模型：参数估计

- 联合估计均值与波动率方程（Hamilton）
  - MLE（以正态分布为例）

$$\ln L = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T}\ln h_t - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T}\left(\varepsilon_t^2 / h_t\right), \varepsilon_t = y_t - \beta x_t$$

  - QMLE：正态似然函数得到一致估计，标准差需调整
  - GMM

- 检验的标准
  - AIC和SBC：选择信息准则最小的模型。AIC和SBC也用来事后确定GARCH模型的合理阶数。【H. Leeb and B. M. Potscher (2008, *Handbook of Financial Time Series*, pp. 900)】
  - 标准化残差

$$\tilde{\varepsilon}_t = \frac{\varepsilon_t}{h_t}$$

标准化残差自身以及标准化残差的平方序列都不应该有自相关存在。

>> GARCH模型：预测（1）

- 预测收益率序列r_t
  - 由于ε_t序列的条件均值为0，因此引入GARCH过程不改变r_t的条件均值，即不影响对收益率的点预测。
  - 但引入GARCH过程会改变预测的置信区间

$$E_t y_{t+1} \pm 2\left(h_{t+1}\right)^{0.5}$$

  - 当条件方差特别大时，预测误差的方差将明显增加。因此，对条件波动较大时期的预测值应该特别关注。

>> GARCH模型：预测（2）

- 预测波动率序列 ε_t^2
  - 单步预测：

$$\hat{\varepsilon}_t^2(1)=E_t\left(\hat{\varepsilon}_{t+1}^2\right)=h_{t+1}=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_t^2+\beta_1 h_1$$

  - 多步预测：

$$E_t\left(\varepsilon_{t+i}^2\right)=E_t h_{t+j}$$

$$E_t h_{t+j}=\alpha_0+\alpha_1 E_t\left(\varepsilon_{t+i-1}^2\right)+\beta_1 E_t h_{t+j-1}$$

$$=\alpha_0+\left(\alpha_1+\beta_1\right)E_t h_{t+j-1}$$

$$=\ldots$$

$$=\alpha_0\sum_{i=0}^{j-1}\left(\alpha_1+\beta_1\right)^i+\left(\alpha_1+\beta_1\right)^j h_t$$

  - 将趋近于波动率的无条件均值（序列的无条件方差）

>> 本章主要内容

1 引　论

2 ARCH模型与GARCH模型

3 扩展的GARCH模型

4 随机波动率模型

>> GARCH模型的扩展

- GARCH模型的扩展
  - 考虑风险溢酬的GARCH模型
  - 考虑非对称性的GARCH模型
  - 考虑非平稳性的GARCH模型
  - 放宽参数限制的GARCH模型

  ……

>> 考虑风险溢酬的GARCH模型（1）

- GARCH-M模型（GARCH in the mean）

$$r_t = \mu + f(h_t) + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}$$

$f(h_t): \delta h_t$ where δ is positive, $\delta\sqrt{h_t}$, $\delta \ln(h_t)$ or δh_{t-1}...

- 经济含义
  - 将条件方差引入均值方程刻画时变的风险溢酬。

>> 考虑风险溢酬的GARCH模型（2）

- GARCH-M模型的性质
  - 条件均值时变：条件方差为常数则风险溢酬为常数
  - 条件方差的相关性引起收益率相关

$$E\left\{\left[r_t - E\left(r_t\right)\right]\left[r_{t-k} - E\left(r_t\right)\right]\right\}$$

$$= E\left[\varepsilon_{t-k} f\left(h_t\right)\right] + \operatorname{cov}\left[f\left(h_t\right), f\left(h_{t-k}\right)\right]$$

  - 可能产生有偏的收益率序列

$$E\left[r_t - E\left(r_t\right)\right]^3 = E\left\{f\left(h_t\right) - E\left[f\left(h_t\right)\right]\right\}^3 + 3E\left\{h_t\left[f\left(h_t\right) - E\left(f\right)\right]\right\}$$

    - 偏度并不一定为0。

>> 考虑非对称性的GARCH模型（1）

- 非对称性
  - 杠杆效应（Leverage Effect），Black（1976）
  - Volatility-Feedback Hypothesis
  - 尽管新息对波动率的非对称性冲击并不能必然归因于杠杆率的变化，但学界习惯性地将这种非对称冲击称为杠杆效应。

>> 考虑非对称性的GARCH模型（2）

- 检验杠杆效应方法1：F检验
  - 估计ARCH/GARCH模型，计算标准化残差序列s_t

$$s_t = \hat{\varepsilon}_t / \sqrt{\hat{h}_t}$$

  - 将标准化残差的平方与标准化残差的滞后值回归

$$s_t^2 = a_0 + a_1 s_{t-1} + a_2 s_{t-2} + ...$$

F test: $a_1 = a_2 = ... = 0$

The null hypothesis is the sequence is of no leverage effect.

>> 考虑非对称性的GARCH模型（3）

- 检验杠杆效应方法2：虚拟变量
  - 首先估计ARCH/GARCH模型，得到标准化残差序列；
  - 将虚拟变量与标准化残差的平方回归

$$s_t^2 = a_0 + a_1 d_{t-1} + v_t$$

$$d_{t-1} = 1 \text{ when } \widehat{\varepsilon}_{t-1} < 0$$

$$d_{t-1} = 0 \text{ when } \widehat{\varepsilon}_{t-1} \geq 0$$

Test the significance of a_1

  - 扩展：不仅考虑方向，还考虑大小

$$s_t^2 = a_0 + a_1 d_{t-1} + a_2 d_{t-1} s_{t-1} + a_3 \left(1 - d_{t-1}\right) s_{t-1} + v_t$$

t test; LM test for $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

>> 考虑非对称性的GARCH模型（3）

- GJR-GARCH模型（Threshold GARCH, 1993）

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\left[\alpha_i + \delta_i I\left(\varepsilon_{t-i} < 0\right)\right]\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j h_{t-j} \qquad \delta_i > 0$$

- 更复杂的扩展有DTGARCH模型（Double Threshold GARCH），在均值方程和波动方程同时引入示性变量。

- 经济含义：刻画杠杆效应

>> 考虑非平稳性的GARCH模型（1）

- IGARCH模型（Integrated GARCH）

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha_1) h_{t-1}$$

  – Nelson(1991)证明：在一定条件下，IGARCH是**严格平稳**的，因而MLE估计依然是一致的。

>> 考虑非平稳性的GARCH模型（2）

- IGARCH模型的性质
  - IGARCH意味着误差平方（条件方差）是单位根过程

$$\text{For IGARCH}(1,1): \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1\eta_{t-1} + \eta_t$$

$$\text{The shock of } \eta_{t-j} = \varepsilon_{t-j}^2 - h_{t-j} \text{ on } \varepsilon_t^2 \text{ is persistent.}$$

  - 但ε_{t-j}^2对条件方差h_t的影响并不持续

$$h_t = \frac{\alpha_0}{1-\beta_1} + (1-\beta_1)\sum_{i=0}^{\infty}\beta_1^i \varepsilon_{t-i-1}^2$$

  - 对条件方差 的预测取决于α_0

$$E_t h_{t+1} = \alpha_0 + h_t = l\alpha_0 + h_0$$

>> 考虑非平稳性的GARCH模型（3）

- IGARCH模型的经济含义
  - 刻画了条件方差变化的持续性（persistence）
- IGARCH(1,1)模型的特例

For IGARCH(1,1) where $\alpha_0 = 0$

$$E_{t-1}\left(\varepsilon_t^2\right) = h_t = \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \left(1-\alpha_1\right)h_{t-1}$$

$$= \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \left(1-\alpha_1\right)\left[\alpha_1\varepsilon_{t-2}^2 + \left(1-\alpha_1\right)h_{t-2}\right]$$

$$= \alpha_1\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-\alpha_1\right)^i\varepsilon_{t-i-1}^2$$

$$EWMA: \sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2$$

$$= (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}u_{n-i}^2 + \lambda^m\sigma_{n-m}^2$$

- IGARCH模型的拓展

For IGARCH(1,1), we might have the ARIMA(0,1,1) form

$$(1-L)\varepsilon_t^2=\alpha_0+\eta_t-\beta_1\eta_t$$

We may extend the ARIMA structure into an ARFIMA(0,d,1) structure

$$(1-L)^d\varepsilon_t^2=\alpha_0+\eta_t-\beta_1\eta_t$$

The model, being named FIGARCH, characterizes the long memory property of the volatility series.

Note that a FIGARCH can be transformed into an ARCH(∞) model.

>> 放宽参数限制的GARCH模型（1）

- EGARCH模型
  - ARCH模型和GARCH模型都有参数严格为正的要求。这一限制在TGARCH模型中更为严格。但实际数据有时并不能满足TGARCH模型的要求。因此，我们需要一个对参数限制较为宽松的模型，但同样可以刻画波动率的聚类效应与非对称性。
  - 一个自然的想法是针对波动率的对数，而非波动率本身建模：指数GARCH（EGARCH, Exponential GARCH）模型（Nelson, 1991），并刻画其非对称性

>> 放宽参数限制的GARCH模型（2）

- EGARCH：加权的新息项

$$\text{Define } g(v_t) = \theta v_t + \gamma\left[\left|v_t\right| - E\left(\left|v_t\right|\right)\right]$$

which equals

$$g(v_t) = \begin{cases} (\theta+\gamma)v_t - \gamma E\left(\left|v_t\right|\right) & \text{for } v_t \geq 0 \\ (\theta-\gamma)v_t - \gamma E\left(\left|v_t\right|\right) & \text{for } v_t < 0 \end{cases}$$

$$\text{EGARCH}(p,q)$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t$$

$$\ln h_t = \alpha_0 + \frac{1+\beta_1 L + \ldots + \beta_{q-1} L^{q-1}}{1-\alpha_1 L - \ldots - \alpha_p L^p} g(v_{t-1})$$

引入$g(v_t)$刻画杠杆效应
v_t可服从正态、t和GED

引入对数放松参数为正限制，平稳性限制不变

$|v_t|$与其期望的偏离将导致新的方差较大，其思想与ARCH类似

>> 放宽参数限制的GARCH模型（3）

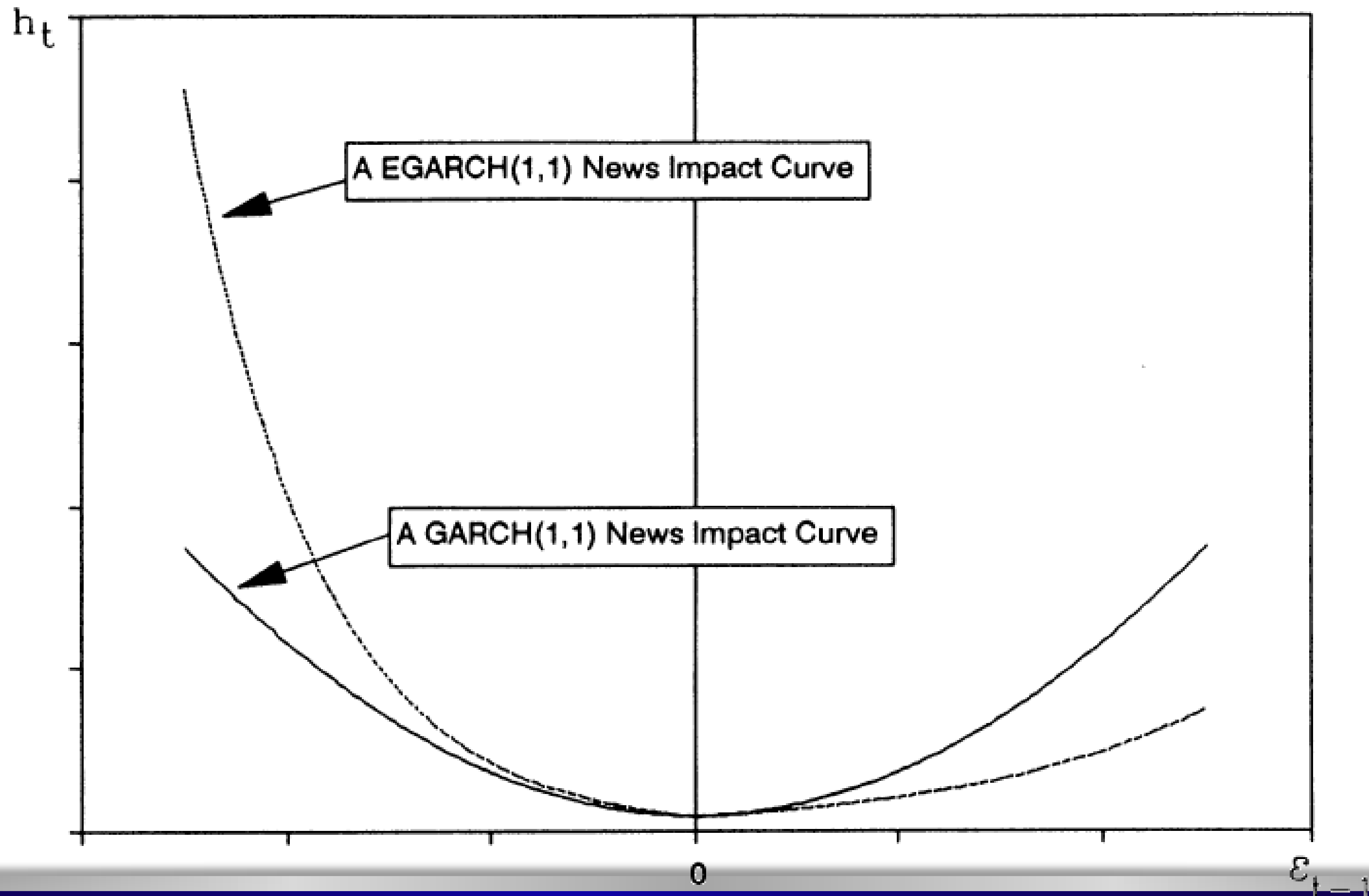
- EGARCH(1,1)（正态分布假设）

$$h_t = h_{t-1}^{\alpha_1} \exp\left[(1-\alpha_1)\alpha_0 - \sqrt{2/\pi}\gamma\right] \times \begin{cases} \exp\left[(\gamma+\theta)\dfrac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}\right] & \text{for } \varepsilon_{t-1} \geq 0 \\ \exp\left[(\gamma-\theta)\dfrac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}}\right] & \text{for } \varepsilon_{t-1} < 0 \end{cases}$$

  - $\theta \neq 0$时，条件方差为非线性函数，从而允许杠杆效应
  - 使用标准化残差绝对值与其期望的差异而非残差平方建模

>> 放宽参数限制的GARCH模型（5）

- 比较EGARCH与GARCH



>> 本章主要内容

1. 引 论
2. ARCH模型与GARCH模型
3. 扩展的GARCH模型
4. 随机波动率模型

>> 随机波动率模型（SV）

- GARCH族模型刻画波动率变动规律的一个共同特点就是当期的波动率完全由其滞后期的波动率决定 。
- 事实上，如同均值变动过程一样，当前的波动率不一定完全由过去决定，也可能受到新信息的影响，GARCH族模型显然无法刻画这一性质。
- 新信息对波动率和均值的影响不同，因此可以在波动率的变动方程中引入一个新的随机项，以刻画新信息对波动率的冲击，这类模型就叫做随机波动率模型。

>> SV模型:基本形式

SV (1)的基本形式：

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t$$

where

$$\ln h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln h_{t-1} + \eta_t$$

$$v_t \sim iid\ N(0,1),\ \eta_t \sim iid\ N(0,\sigma_\eta)$$

η_t is independent of v_s for all t, s.

参数限制：

平稳性要求：$|\alpha_1| < 1$

>> SV模型：理解

- η_t 用以刻画波动方程的随机性，与均值方程中的随机项 ν_t 共同驱动 ε_t 的运动。
- 在SV模型中，ε_t 的变动受两个随机项共同作用，即使两个随机项都服从高斯过程，此时的 ε_t 也不再是一个高斯过程。
- 对波动率的对数进行建模，以放宽参数限制条件下保证波动率为正，这点与前面EGARCH模型思想类似。
- 在参数限制 $|\alpha_1|<1$ 条件下，波动率过程满足弱平稳，均值过程由两个弱平稳过程构成，也满足弱平稳。

>> SV的性质：h_t 的无条件矩

- $\ln h_t$ 服从AR(1)过程，满足：

$$\ln h_t \sim N(u,\sigma^2)$$

$$\text{where}\quad u=\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1},\sigma^2=\frac{\sigma_\eta{}^2}{1-\alpha_1{}^2}$$

- h_t 服从对数正态分布，其n阶无条件矩满足：

$$E(h_t{}^n)=E(e^{n\ln h_t})=e^{nE(\ln h_t)+\frac{1}{2}n^2\operatorname{var}(\ln h_t)}=e^{nu+\frac{1}{2}n^2\sigma^2}$$

>> SV的性质：ε_t的无条件矩

- 无条件期望

$$E(\varepsilon_t) = E(\sqrt{h_t} v_t) = E(\sqrt{h_t}) E(v_t) = 0$$

- 无条件方差

$$\text{var}(\varepsilon_t) = E(h_t v_t^2) = E(h_t) E(v_t^2) = E(h_t) = e^{u + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

- 无条件四阶矩

$$E(\varepsilon_t^4) = E(h_t^2 v_t^4) = E(h_t^2) E(v_t^4) = 3e^{2u+2\sigma^2}$$

- 峰度

$$Kurtosis = \frac{E\left(\varepsilon_t^4\right)}{\text{var}^2\left(\varepsilon_t\right)} = \frac{3e^{2u+2\sigma^2}}{e^{2u+\sigma^2}} = 3\text{e}^{\sigma^2} > 3$$

- 不需要施加限制条件，四阶矩一定存在，且峰度大于3。

>> SV：连续时间形式

- SV模型更多的时候都是以连续时间的形式被应用于金融资产的定价。
- 简单的连续形式(Gaussian OU process)

$$d\ln h(t) = \kappa(\theta - \ln h(t))dt + \gamma dw(t)$$

其中 θ:长期均值，κ:均值回复速度，

γ:波动项，$w(t)$:标准布朗运动, 与均值随机源无关

- 连续形式到离散形式的转换(Euler discretization)

$$\ln h_t - \ln h_{t-1} = \kappa\theta - \kappa \ln h_{t-1} + \gamma(w_t - w_{t-1})$$

>> SV：连续时间形式（续）

- 连续形式到离散形式的转换(Euler discretization)

$$\ln h_t = \kappa\theta + (1-\kappa)\ln h_{t-1} + \gamma e_t$$

$$\text{where } \mathrm{e}_\mathrm{t} \sim iid\ \mathrm{N}(0,1)$$

$$\text{let}\ \ \alpha_0 = \kappa\theta, \alpha_1 = 1-\kappa, \eta_t = \gamma e_t$$

得到对应的离散形式：

$$\ln h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln h_{t-1} + \eta_t$$

>> SV：复杂离散形式

- SV基本形式可以进行扩展
  - 放松波动率过程AR(1) 的假设，可以引入任何平稳过程
  - 放松波动率平稳的假设，引入波动率非平稳过程
  - 放松η_t与v_s 独立的假设
    - 实证结果表明，η_t与v_s的相关系数一般为负，这种负相关关系刻画了波动率的杠杆效应。

>> SV：其他连续形式

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t - q_t)dt + \sqrt{h_t}\,dw_{s,t}$$

$$dh_t = \kappa(\theta - h_t)dt + \sigma_h h_t^{\alpha} dw_{h,t}$$

- Hull-White模型（1987）

$$dh_t = \mu h_t dt + \sigma_h h_t dw_{h,t}$$

—波动率服从最简单的几何布朗运动，是一个非平稳过程。

- Stein-Stein模型（1991）

$$dh_t = \kappa(\theta - h_t)dt + \sigma_h dw_t$$

—波动率服从Gaussian OU过程，平稳但可能出现负值。

>> SV：其他连续形式（续）

- Heston模型（1993）

$$dh(t) = \kappa(\theta - h(t))dt + \gamma\sqrt{h(t)}dw(t)$$

—波动率服从平方根过程(square root process)，避免了波动率出现负数的情况。

>> 条件异方差的检验（1）

- 观察收益率残差的平方序列
  - 对收益率序列建模，使残差序列本身不存在自相关。
  - 计算残差的平方值。观察这一平方序列的ACF、PACF并计算Q统计量。

>> 条件异方差的检验（2）

- ARCH-LM检验（Engle, 1982）
  - 假设
    - H_0: 序列不存在ARCH形式的条件异方差；
    - H_1: 序列存在ARCH(m)阶的条件异方差。
  - 步骤
    - 对收益率序列进行普通的OLS回归，得到残差项；
    - 对残差项的平方继续进行回归（包含截距项和q阶滞后

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_m \hat{\varepsilon}_{t-m}^2 + v_t$$

    - 计算R^2，TR^2渐进服从卡方分布，自由度为 q。
    - 也可直接进行F检验（小样本时使用F检验而非卡方检验），原假设为波动率方程的回归系数联合为0。分子自由度q，分母为T-q。

>> 条件异方差的检验（3）

- ARCH-LM检验的不足
  - ARCH-LM检验对均值方程（即收益率的回归方程）的设定较为敏感。
  - 简单观察残差平方序列或者ARCH-LM检验都只能识别波动率的线性相关.
- BDS检验(Brock, Dechert and Scheinkman , 1987)
  - 直接从收益率的分布入手检验异方差性，避免ARCH-LM检验的缺陷。
- 这些方法都同时适合于识别GARCH效应

>> ARCH定阶与GARCH定阶

- 样本量较大时，PACF可以用来辅助定ARCH模型的阶数，但ACF和PACF不能用来识别GARCH模型

Define $\eta_t = \varepsilon_t^2 - h_t = \left(v_t^2 - 1\right)h_t$ and $E\left(\eta_t\right) = 0, \operatorname{cov}\left(\eta_t, \eta_{t-i}\right) = 0$

Rewrite GARCH(s, m)

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_i \varepsilon_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \eta_{t-j} + \eta_t$$

  - 上述分解表明，GARCH(s, m)过程中的序列残差平方实际上是一个ARMA$(\max(s, m), s)$过程。

>> GARCH参数估计：MLE

- MLE（以正态分布为例）

$$\ln L = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T}\ln h_t - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T}\left(\varepsilon_t^2 / h_t\right), \varepsilon_t = y_t - \beta x_t$$

$$\hat{\Theta} \overset{a}{\sim} N\left[\Theta, \left\{-E\left[\frac{\partial^2 \ln L(\Theta)}{\partial\Theta\partial\Theta'}\right]\right\}^{-1}\right] \text{ or}$$

$$\hat{\Theta} \overset{a}{\sim} N\left[\Theta, \left\{-\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\Theta})}{\partial\hat{\Theta}\partial\hat{\Theta}'}\right\}^{-1}\right] \text{ or}$$

$$\hat{\Theta} \overset{a}{\sim} N\left[\Theta, \left\{\sum_{i=1}^{T}\hat{g}_i\hat{g}_i'\right\}^{-1}\right], \hat{g}_i = \frac{\partial \ln f\left(x_i, \hat{\Theta}\right)}{\partial\hat{\Theta}}$$

>> GARCH参数估计：MLE（2）

- 非正态分布
  - T分布与GED分布（Tsay，pp108）
  - QMLE：如果v_t条件均值为零，条件方差为1，正态似然函数得到一致估计，标准差需调整（Greene，Ch17；Hamilton，Ch21）
- CMLE （样本方差作为σ_1^2） /EMLE
- 联合估计/两步估计

>> GARCH参数估计：MLE （3）

- 三大检验
  - LR检验： $LR=-2\left[\ln L\left(\tilde{\beta},\tilde{\sigma}^2\right)-\ln L\left(\hat{\beta},\hat{\sigma}^2\right)\right]\sim\chi^2(m)$
  - Wald检验： $W=f\left(\hat{\beta}\right)'\left[Var\left(f\left(\hat{\beta}\right)\right)\right]^{-1}f\left(\hat{\beta}\right)\sim\chi^2(m)$
  - LM检验： $LM=\left(\frac{\partial\ln L}{\partial\tilde{\beta}}\right)'\left[I\left(\tilde{\beta}\right)\right]^{-1}\left(\frac{\partial\ln L}{\partial\tilde{\beta}}\right)\sim\chi^2(m)$
- AIC和SBC：选择信息准则最小的模型。AIC和SBC也用来确定GARCH模型的合理阶数。【H. Leeb and B. M. Potscher (2008, *Handbook of Financial Time Series*, pp. 900)】

>> GARCH参数估计：GMM

- GMM

$$\hat{\theta}_{GMM} = \arg\min_{\hat{\theta}} \left[g(\theta)' \hat{S}_T^{-1} g(\theta) \right], \hat{\theta} \overset{a}{\sim} N\left(\theta, \left[\left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right)' S_T^{-1} \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right]^{-1} \right)$$

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} T^{-1} \sum_{i=1}^{T} \left(y_t - x_t' \beta \right) x_t = 0 \\ T^{-1} \sum_{i=1}^{T} \left[\varepsilon_t^2 - h \right] z_t = 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}_T = Var\left[\sqrt{T} g(\theta) \right] = TVar\left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} f(\theta) \right]$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} f(\theta) f(\theta)'$$

  - 两步法和迭代法

>> GARCH参数估计：GMM（2）

- GMM的三大检验（Newey and West，1987）

$$LR_{GMM}=\min_{\tilde{\theta}}\left[g(\theta)'\tilde{S}_T^{-1}g(\theta)\right]-\min_{\hat{\theta}}\left[g(\theta)'\tilde{S}_T^{-1}g(\theta)\right]\sim\chi^2(m)$$

$$W_{GMM}=f\left(\hat{\beta}\right)'\left[Var\left(f\left(\hat{\beta}\right)\right)\right]^{-1}f\left(\hat{\beta}\right)\sim\chi^2(m)$$

$$LM_{GMM}=\left(g\left(\tilde{\beta}\right)'W^{-1}\frac{\partial f\left(\tilde{\beta}\right)}{\partial\tilde{\beta}}\right)'\left[I\left(\tilde{\beta}\right)\right]^{-1}\left(g\left(\tilde{\beta}\right)'W^{-1}\frac{\partial f\left(\tilde{\beta}\right)}{\partial\tilde{\beta}}\right)\sim\chi^2(m)$$

- 过度识别检验

>> GARCH参数估计：GMM（3）

GMM is a large sample estimator.

Desirable properties as $T \to \infty$.

- Consistent under weak assumptions.
  No distributional assumptions like in maximum likelihood (ML) estimation.
- Asymptotically efficient in the class of models that uses the same amount of information.
- Many estimators are special cases of GMM.
  Unifying framework for comparing estimators.
- GMM is a nonlinear procedure.
  We do not need a regression setup $E[y_t] = h(x_t; \beta)$.
  We can have $E[f(y_t, x_t; \beta)] = 0$.

>> GARCH模型检验

- 标准化残差是否IID标准正态分布

$$\tilde{\varepsilon}_t = \frac{\varepsilon_t}{h_t}$$

>> GARCH模型预测（1）

- 预测收益率序列r_t
  - 由于ε_t序列的条件均值为0，因此引入GARCH过程不改变r_t的条件均值，即不影响对收益率的点预测。
  - 但引入GARCH过程会改变预测的置信区间

$$E_t y_{t+1} \pm 2\left(h_{t+1}\right)^{0.5}$$

  - 当条件方差特别大时，预测误差的方差将明显增加。因此，对条件波动较大时期的预测值应该特别关注。

>> GARCH模型预测（2）

- 预测波动率序列 ε_t^2
  - 单步预测：

$$\hat{\varepsilon}_t^2(1) = E_t\left(\hat{\varepsilon}_{t+1}^2\right) = h_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_t^2 + \beta_1 h_1$$

  - 多步预测：

$$E_t\left(\varepsilon_{t+i}^2\right) = E_t h_{t+j}$$

$$E_t h_{t+j} = \alpha_0 + \alpha_1 E_t\left(\varepsilon_{t+i-1}^2\right) + \beta_1 E_t h_{t+j-1}$$

$$= \alpha_0 + \left(\alpha_1 + \beta_1\right) E_t h_{t+j-1}$$

$$= \ldots$$

$$= \alpha_0 \sum_{i=0}^{j-1} \left(\alpha_1 + \beta_1\right)^i + \left(\alpha_1 + \beta_1\right)^j h_t$$

  - 将趋近于波动率的无条件均值（序列的无条件方差）

>> SV模型估计

- SV模型的似然函数无法直接获得，导致模型的估计较为复杂，普通MLE和OLS方法不再适用
  - 基于Kalman Filter的Quasi-likelihood方法
  - MCMC方法

>> Correlations

- Define $u_i=(U_i-U_{i-1})/U_{i-1}$ and $v_i=(V_i-V_{i-1})/V_{i-1}$
- Also

$\sigma_{u,n}$: daily vol of U calculated on day n-1

$\sigma_{v,n}$: daily vol of V calculated on day n-1

cov_n: covariance calculated on day n-1

>> Correlations continued

Under GARCH (1,1)

$$\text{cov}_n = \omega + \alpha\, u_{n\text{-}1} v_{n\text{-}1} + \beta\, \text{cov}_{n\text{-}1}$$

>> Positive semi-definite Condition

A variance-covariance matrix, $\mathbf{\Omega}$, is internally consistent if the positive semi-definite condition

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega}\mathbf{w} \geq 0$$

for all vectors $\mathbf{w}$ is satisfied.

>> Example

The variance covariance matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}$$

is not internally consistent

谢　谢　！

陈　蓉　教授

aronge@xmu.edu.cn

厦门大学金融系

2009年10月29日