

## 金融工程 习题 11

布置时间：2016年12月5日

上交时间：2016年12月14日

1. 假设某不付红利股票价格遵循几何布朗运动，其预期年收益率为16%，年波动率为30%，该股票当天收盘价为50元，求
  - (a) 第二天收盘时的预期价格；
  - (b) 第二天收盘时股价的标准差；
  - (c) 在置信度为95%的情况下，该股票第二天收盘时的价格范围。

2. 变量  $x_1$  和  $x_2$  遵循普通布朗运动，漂移率分别为  $\mu_1$  和  $\mu_2$ ，方差率分别为  $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$ 。

请问在下列两种情况下， $x_1 + x_2$  分别遵循什么样的随机过程？

- (a) 在任何短时间间隔中  $x_1$  和  $x_2$  的变动都不相关；
  - (b) 在任何短时间间隔中  $x_1$  和  $x_2$  变动的相关系数为  $\rho$ 。
3. 假设  $x_t$  是在T时刻支付\$1的零息票债券按连续复利计息的到期收益率。 $x_t$  遵循如下过程

$$dx_t = a(x_0 - x_t)dt + sx_t dz_t$$

其中  $a$ 、 $x_0$  和  $s$  是正常数， $dz_t$  是维纳过程。请写出债券价格遵循的过程。

4. 试证明当标的资产支付连续复利红利率为  $q$  的红利时，相应的偏微分方程形式为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q)S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf_t$$

5. 请在充分理解BS 期权定价公式推导的基础上完成以下练习：

- (a) 证明  $N(d_1) = \frac{\partial c}{\partial S}$ ；

- (b) 证明在风险中性世界中，欧式看涨期权被执行的概率是  $N(d_2)$ ；

- (c) 一只或有现金期权满足：若到期时标的资产价格大于执行价格则回报\$100，反之则没有回报，试为该或有现金期权定价。

6. 为什么以下说法是错误的？

- (a) 股票价格的波动率可由股票价格的标准差计算得到
- (b) 股票价格的波动率可由股票价格百分比收益率的标准差计算得到
- (c) 股票价格的波动率可由股票价格年化对数收益率的标准差计算得到
- (d) 几何布朗运动意味着股票价格百分比收益率服从正态分布

(e) 只要为衍生品定价，就可直接适用风险中性定价原理

7. 为什么说风险中性定价原理意味着在无套利和可复制的前提下，在为期权定价时，我们并不需要了解真实世界中股票未来价格的概率和期望值，也不需要了解真实的预期收益率是多少？
8. 试总结平价期权具有哪些特性。
9. 什么是波动率微笑、波动率期限结构和波动率曲面？

10.  $S_t$  表示标的资产价格，试证明  $e^{S_t}$  一定不是该资产某个衍生品的价格，而  $\frac{e^{(\sigma^2 - 2r)(T-t)}}{S_t}$  则一定是。