

## 金融工程 习题 11

布置时间：2014年12月1日

上交时间：2014年12月15日

1. 假设某不付红利股票价格遵循几何布朗运动，其预期年收益率为16%，年波动率为30%，该股票当天收盘价为50元，求
  - (a) 第二天收盘时的预期价格；
  - (b) 第二天收盘时股价的标准差；
  - (c) 在置信度为95%的情况下，该股票第二天收盘时的价格范围。

2. 变量 $X_1$ 和 $X_2$ 遵循普通布朗运动，漂移率分别为 $\mu_1$ 和 $\mu_2$ ，方差率分别为 $\sigma_1^2$ 和 $\sigma_2^2$ 。请问在下列两种情况下， $X_1 + X_2$ 分别遵循什么样的过程？
  - (a) 在任何短时间间隔中 $X_1$ 和 $X_2$ 的变动都不相关；
  - (b) 在任何短时间间隔中 $X_1$ 和 $X_2$ 变动的相关系数为 $\rho$ 。

3. 假设 $x$ 是在 $T$ 时刻支付\$1的零息票债券按连续复利计息的到期收益率。 $x$ 遵循如下过程

$$dx = a(x_0 - x)dt + sx dz$$

其中 $a$ 、 $x$ 和 $s$ 是正常数， $dz$ 是维纳过程。请写出债券价格遵循的过程。

4. 试证明当标的资产支付连续复利红利率为 $q$ 的红利时，相应的偏微分方程形式为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

5. 请在充分理解BS 期权定价公式推导的基础上完成以下练习：

- (a) 证明  $N(d_1) = \frac{\partial c}{\partial S}$ ；

- (b) 证明在风险中性世界中，欧式看涨期权被执行的概率是  $N(d_2)$ ；

- (c) 一只或有现金期权满足：若到期时标的资产价格大于执行价格则回报\$100，反之则没有回报，试为该或有现金期权定价。

6. 为什么以下说法是错误的？

- (a) 股票价格的波动率可由股票价格的标准差计算得到
- (b) 股票价格的波动率可由股票价格百分比收益率的标准差计算得到
- (c) 股票价格的波动率可由股票价格年化对数收益率的标准差计算得到
- (d) 几何布朗运动意味着股票价格百分比收益率服从正态分布
- (e) 只要为衍生品定价，就可直接适用风险中性定价原理

7. 为什么说风险中性定价原理意味着在无套利和可复制的前提下，在为期权定价时，我们并不需要了解真实世界中股票未来价格的概率和期望值，也不需要了解真实的预期收益率是多少？

8. 试总结平价期权具有哪些特性。

9. 什么是波动率微笑、波动率期限结构和波动率曲面？