金融工程

第五章 股指期货、外汇远期、利率远期与利率期货

厦门大学金融系

2011 年 03 月 02 日

目录

目录

股票指数期货概述 I

- 股票指数
  - 运用统计学中的指数方法编制而成的、反映股市中总体股价或某类股票价格变动和走势情况的一种相对指标。
- 股指期货
  - 以股票指数作为标的资产的股票指数期货，交易双方约定在将来某一特定时间交收“一定点数的股价指数”的标准化期货合约。

股票指数期货概述 II

- 特殊性质
  - 现金结算而非实物交割
  - 合约规模非固定
    - 开立股指期货头寸时的价格点数 $\times$ 每个指数点所代表的金额

股指期货定价

- 一般公式

$$F = Se^{(r-q)(T-t)}$$

- 例外：在 CME 交易的以美元标价的日经 225 指数期货
  - 以买现货卖期货套利为例

	借贷市场	现货市场	期货市场	净现金流
t 时刻现金流	借入 $5SW$	以 S 买入 5 份指数基金	卖出一份 F	0
T 时刻现金流	还款 $5SWe^{rT}$	以 S_T 卖出 5 份指数基金	交割得 $5F-5S_T$	$5S_TW_T + 5F - 5S_T - 5SWe^{rT}$

股指期货应用

- 指数套利（Index Arbitrage）
  - “程序交易”（Program Trading）
- 套期保值
  - 管理系统性风险
  - 多为交叉套期保值

最小方差套期保值比率 I

- 一元线性回归方程

$$R_H = a + bR_G + \varepsilon$$

- CAPM

$$R_H = r_f + \beta(R_M - r_f)$$

- Beta 系数

$$\beta = \frac{\sigma_{R_i R_M}}{\sigma^2_{R_M}} = \rho_{R_i R_M}\frac{\sigma_{R_i}}{\sigma_{R_M}}$$

- 最小方差套期保值份数

$$N = \beta \times \frac{V_H}{V_G}$$

最小方差套期保值比率 II

- 如果：
  1. 投资组合与市场指数 R_M 之间的 β 系数等于投资组合与股指期货之间的 β
  2. 我们使用的 β 系数等于套期保值期间真实的 β 系数
- 则：
  - β 的确是股指期货最小方差套期保值比率的一个良好近似。

案例 5.1 ：S& P500 股指期货套期保值 I

- 假设某投资经理管理着一个总价值为 40 000 000 美元的多样化股票投资组合并长期看好该组合，该组合相对于 S&P500 指数的 β 系数为 1.22 。2007 年 11 月 22 日，该投资经理认为短期内大盘有下跌的风险，可能会使投资组合遭受损失，决定进行套期保值。

案例 5.1 ：S& P500 股指期货套期保值 II

- 假定用 2008 年 3 月到期的 S&P500 股指期货来为该投资组合在 2008 年 2 月 22 日的价值变动进行套期保值。2007 年 11 月 22 日该股指期货价格为 1 426.6 点。
- 如果运用最小方差套期保值比率并以该投资组合的 β 系数作为近似，需要卖出的期货合约数目应等于

$$\left(\frac{40\,000\,000}{1\,426.6\times 250}\right)\times 1.22=136.64\approx 137\text{ 份}$$

股票头寸与短期国库券头寸

- 股票头寸 $\Longleftrightarrow$ 短期国库券头寸
  - 股票多头 + 股指期货空头 = 短期国库券多头
  - 股票多头 = 短期国库券多头 + 股指期货多头
- 构造短期国库券多头等价于将系统性风险降为零。

调整投资组合的系统性风险暴露 I

- 利用股指期货，根据自身的预期和特定的需求改变股票投资组合的 β 系数为 β^*，从而调整股票组合的系统性风险与预期收益。
  - 套期保值比率为 $(\beta^* - \beta)$
  - 套期保值份数为 $(\beta^* - \beta) \cdot \frac{V_H}{V_G}$
  - 当 β 非股指期货最小方差套期保值比率的良好近似时

$$\frac{(\beta^* - \beta)}{\beta / b} \cdot \frac{V_H}{V_G}$$

调整投资组合的系统性风险暴露 II

- 投资组合的保险
  - 预先设定一个组合价值的底线，根据此底线对部分股票组合进行套期保值，消除部分系统性风险；
  - 之后，根据组合价值的涨跌情况，买入或卖出相应数量的股指期货合约，不断调整套期保值的比重，
  - 既可以防止组合价值跌至预设底线之下的风险，又可以获得部分股票承担系统性风险的收益。

目录

FXA 的定价

- FXA 的远期价值与远期汇率

$$f = Se^{-r_f(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}$$
$$F = Se^{(r-r_f)(T-t)}$$

- 利率平价关系：
  - 若 $r_f > r$，外汇远期贴水；
  - 若 $r_f < r$，外汇远期升水。

理解 ERA

- 合约本质
  - 当前约定未来某个时点的远期升贴水幅度，是远期的远期。
- 交割方式
  - 实物交割
  - 现金结算

ERA 的定价 I

- ERA 实物交割的现金流
  - T 时刻：A 单位外币减 AK 单位本币
  - T^* 时刻：AK^* 单位本币减 A 单位外币
- ERA 买方的合约价值为

$$
\begin{aligned}
f &= ASe^{-r_f(T-t)} - AKe^{-r(T-t)} + AK^*e^{-r^*(T^*-t)} - ASe^{-r_f^*(T^*-t)} \\
&= Ae^{-r(T-t)}\left[Se^{(r-r_f)(T-t)} - K\right] + Ae^{-r^*(T^*-t)}\left[K^* - Se^{(r^*-r_f^*)(T^*-t)}\right]
\end{aligned}
$$

ERA 的定价 II

- 远期汇率就是令合约价值为零的协议价格（分别为 K 和 K^*），因此理论远期汇率为

$$F = Se^{(r-r_f)(T-t)}$$
$$F^* = Se^{(r^*-r_f^*)(T^*-t)}$$

- 将 F 和 F^* 代入 ERA 价值公式可得

$$f = Ae^{-r(T-t)}(F-K) + Ae^{-r^*(T^*-t)}(K^*-F^*)$$

ERA 的定价 III

- 现金结算：ERA 实际上约定的是未来 T 时刻到 T^* 时刻的远期升贴水。
- 用 W^* 表示 T 时刻到 T^* 的理论远期升贴水

$$\begin{aligned} W^* &= F^* - F \\ &= Se^{(r^*-r_f^*)(T^*-t)} - Se^{(r-r_f)(T-t)} \end{aligned}$$

- 可以得到 ERA 多头价值同样为

$$f = Ae^{-r(T-t)}(F-K) + Ae^{-r^*(T^*-t)}(K^*-F^*)$$

案例 5.2 ： ERA 定价 I

- 2007 年 10 月 10 日，伦敦银行同业拆借 3 个月期美元利率为 5.2475%， 1 年期美元利率为 5.0887%， 3 个月期日元利率为 1.0075%， 1 年期日元利率为 1.1487% 。
- 同时，美元对日元的即期汇率为 0.0085 美元/日元。本金 1 亿日元的 3 个月 $\times$1 年 ERA 的 3 个月合同远期汇率为 0.008615 美元/日元，1 年合同远期汇率为 0.008865 美元/日元。
- 请问该合约理论上的远期汇率、远期差价和远期价值等于多少？

案例 5.2 ： ERA 定价 II

- 3 个月期理论远期汇率为

$$F = 0.0085 \times e^{(0.052475-0.010075)\times 0.25} = 0.008591\text{美元/日元}$$

- 1 年期理论远期汇率为

$$F^{*} = 0.0085 \times e^{(0.050887-0.011487)\times 1} = 0.008842\text{美元/日元}$$

- 3 个月 $\times 1$ 年理论远期差价为

$$W^{*} = F^{*} - F = 0.008842 - 0.008591 = 0.000251\text{美元/日元}$$

案例 5.2 ：ERA 定价 III

- 3 个月期理论远期差价为

$$W = F - S = 0.008591 - 0.0085 = 0.000091\text{美元/日元}$$

- 根据公式（5.6），该 ERA 多头价值为：

$$\begin{aligned} f = 1\text{ 亿 } \times \Big[& e^{-0.052475 \times 0.25} \times (0.008591 - 0.008615) \\ & + e^{-0.050887 \times 1} \times (0.008865 - 0.008842) \Big] \\ = & -182.83\text{ 美元} \end{aligned}$$

目录

利率远期与期货

- 远期：FRA
- 期货：
  - 存款：欧洲美元期货（短期）
  - 国库券：美国 13 周国库券期货（短期）
  - 国债：美国 30 年国债期货（长期）

远期利率协议（Forward Rate Agreement）

- 远期利率协议（FRA）是买卖双方同意从未来某一商定的时刻开始的一定时期内按**协议利率**借贷一笔数额确定、以具体货币表示的**名义本金**的协议。
- 案例 5.3 （P.82）

FRA 特征

- 在 T 时刻进行现金结算，结算金额为利差的贴现值。
- 名义本金
- 头寸：Long / Short
  - Long: Fixed-rate payer
- 报价：$3 \times 9\ \ LIBOR\ \ 7.86$

FRA 的定价：远期利率

- 远期利率（如何进行套利操作？）

$$r_F(T^* - T) = r^*(T^* - t) - r(T - t)$$

- 期限结构与远期利率

$$r_F = \frac{r^*(T^* - T) + r^*(T - t) - r(T - t)}{T^* - T} = r^* + (r^* - r)\frac{T - t}{T^* - T}$$

FRA 定价：FRA 的价值 I

- 考虑时刻 t 的两个远期利率协议，它们的名义本金均为 A，约定的未来期限均为 $T^* - T$，第一个 FRA 的协议利率采用市场远期利率 r_F，第二个 FRA 的协议利率为 r_K。
- t 时刻第二个 FRA 与第一个 FRA 的价值差异就是 T^* 时刻不同利息支付的现值

$$\left[Ae^{r_F(T^*-T)} - Ae^{r_K(T^*-T)}\right] e^{-r^*(T^*-t)}$$

FRA 定价：FRA 的价值 II

- 由于第一个 FRA 中的协议利率为理论远期利率，其远期价值应为零。则第二个 FRA 多头 的价值

$$\left[Ae^{r_F(T^*-T)} - Ae^{r_K(T^*-T)}\right] e^{-r^*(T^*-t)}$$

- 该公式适合于任何协议利率为 r_K 的远期利率协议价值的计算。

目录

利率期货交易市场

- The International Money Market of the Chicago Mercantile Exchange (www.cme.com)
- The Sydney Futures Exchange
- The Toronto Futures Exchange
- The Montréal Stock Exchange
- The London International Financial Futures Exchange (www.liffe.com)
- The Tokyo International Financial Futures Exchange
- Le Marché à Terme International de France (www.matif.fr)
- Eurex (www.eurexchange.com)

利率远期与利率期货 I

- 第一，远期利率协议报出的是远期利率，而利率期货所报出的通常并非期货利率，而是与期货利率反向变动的特定价格，期货利率隐含在报价中。
- 第二，由于上述区别，利率期货结算金额为协议价与市场结算价之差，远期利率的结算金额则为利差的贴现值。
- 第三，利率期货存在每日盯市结算与保证金要求，加上结算金额计算方式的不同，决定了远期利率与期货利率的差异。

利率远期与利率期货 II

- 第四，远期利率协议中的多头是规避利率上升风险的一方，而利率期货的多头则是规避期货价格上升风险，即规避利率下跌风险的一方。

- 第五，远期利率协议通常采用现金结算，而利率期货可能需要实物交割，期货交易所通常规定多种符合标准的不同证券均可用以交割，使得利率期货相对复杂。

3 个月欧洲美元期货概述

- 标的资产为自期货到期日起 3 个月的欧洲美元定期存款
- 约定 3 个月期欧洲美元存款利率
- 在 CME 集团交易，短期利率期货中交易最活跃的品种

欧洲美元期货合约条款

CME 场内交易的欧洲美元期货合约主要条款

交易单位	本金为 1 000 000 美元的 3 个月期欧洲美元定期存款
点数	1 点 = 0.01% = 25 美元
交易月份	40 个 3 月季度循环月份以及不在 3 月循环中距离当前最近的 4 个序列月份
……	……
结算方式	根据到期结算日伦敦时间上午 11:00 英国银行家协会（The British Bankers' Association，BBA）提供的利率概览中的 3 个月期 LIBOR 进行现金结算。最后结算价将四舍五入至小数点后 4 位，即 0.0001%，意味着每份合约 0.25 美元。

欧洲美元期货报价

PG09 BULLETIN #140@ INTEREST RATE FUTURES Fri, Jul 20, 2007 PG09

EURO DLR FUT	OPEN RANGE	HIGH	LOW	CLOSING RANGE	SETT. PRICE	DISCOUNT %	IMM INDEX PT.CHGE.##	RTH VOLUME	GLOBEX® VOLUME	OPEN INTEREST		----CONTRACT---- HIGH	LOW
AUG07	94.6525	94.6550	94.6525	94.6550	94.6525	(5.34) +	0.5	30	604	24533 +	317	94.9300B	94.6200
OCT07	----	#94.6750B	----	94.6700B	94.6800	(5.32) +	2.0	----	50	10876	UNCH	94.6950B	94.6400
SEP07	94.6650	94.6800	94.6600	94.6700	94.6650	(5.33)P+	0.5	20588	209332	1664532 +	27313	96.1950B	91.7700
DEC07	94.7100	94.7500	94.7100	94.7400	94.7350	(5.26) +	3.5	26369	395725	1634650 +	25244	96.0400	91.7000
MAR08	94.7950	94.8500	94.7800	94.8350	94.8300	(5.17)P+	6.0	26576	444918	1831587 +	18749	96.0250B	91.7250
JUN08	94.8550	94.9200	94.8450	94.8950	94.8950	(5.10) +	7.0	13761	378795	1522783 +	5397	95.9800B	91.6800
SEP08	94.8850	94.9450	94.8700	94.9150	94.9150	(5.08) +	7.0	26795	407059	1124779 +	21010	95.9500B	91.6500
DEC08	94.8800	94.9350	94.8600	94.9000	94.8950	(5.10) +	6.5	10467	243303	1024652 -	16500	95.9000B	91.5700
MAR09	94.8650	94.8950	94.8250A	94.8600	94.8550	(5.14) +	6.5	9705	197269	602778 -	9575	95.8750B	91.5750
JUN09	94.8000	94.8350B	94.7650A	94.7950A	94.7900	(5.21) +	6.0	16280	112063	475442 +	6766	95.8350B	91.5300
SEP09	94.7350	94.7600	94.7000A	94.7300	94.7250	(5.27) +	6.0	11116	32238	291987 +	2354	95.7950B	91.4950
DEC09	94.6300	94.6900B	94.6300	94.6600	94.6550	(5.34) +	6.0	7366	31439	204517 +	1213	95.7450B	91.4000
MAR10	94.6300	94.6450B	94.5800A	94.6150	94.6050	(5.39) +	5.5	7468	18939	157421 +	780	95.7200B	91.4850
JUN10	94.5700	94.6000B	94.5350A	94.5650A	94.5600	(5.44) +	5.5	9385	14896	121200 -	1065	95.6500B	92.0000
SEP10	94.5450	94.5500B	94.4900A	94.5250A	94.5200	(5.48) +	5.5	5569	4589	91308 +	457	95.6150B	92.0800
DEC10	94.4950	94.5000B	94.4400A	94.4750A	94.4700	(5.53) +	5.5	2417	3472	104406 -	310	95.5600B	92.1250
MAR11	94.4150	94.4750B	94.4100A	94.4500A	94.4450	(5.55) +	5.5	2965	3040	91593 +	709	95.5300B	92.1600
JUN11	94.4300	94.4400B	94.3750A	94.4150A	94.4100	(5.59) +	5.5	3843	3051	89347 +	144	95.4950B	92.1300
SEP11	94.3950	94.4050B	94.3400A	94.3800	94.3800	(5.62) +	5.5	2703	1312	66803 +	377	95.4550B	92.1000
DEC11	94.3600	94.3700B	94.3050A	94.3450	94.3400	(5.66) +	5.0	1724	1411	49239 -	256	95.4000B	92.2900
MAR12	94.3400	94.3500B	94.3200A	94.3250	94.3200	(5.68) +	5.0	1673	1103	35994 +	175	95.3700B	92.5200
JUN12	94.3150	94.3250B	94.2950A	94.3000	94.2950	(5.70) +	5.0	2308	1085	37380 +	312	95.3150B	92.6350A
SEP12	94.2800	94.2950B	94.2750A	94.2800	94.2750	(5.72) +	5.0	308	----	18339 +	3	95.2700B	92.6250A
DEC12	94.2450	94.2600B	94.2400A	94.2450	94.2400	(5.76) +	5.0	163	----	14385 -	143	95.2150B	92.6000A
MAR13	94.2300	94.2450B	94.2250A	94.2300	94.2250	(5.77) +	5.0	33	----	10422 -	4	95.1850B	92.5650A
JUN13	94.2050	94.2200B	94.2000A	94.2050	94.2000	(5.80) +	5.0	583	----	7718 -	583	95.1400B	92.5450A
SEP13	94.1850	94.1950B	94.1850	94.1850	94.1750	(5.82) +	5.0	13	----	6672 -	9	95.1100B	92.6250A
DEC13	94.1450	94.1600B	94.1400A	94.1450	94.1400	(5.86) +	5.0	186	----	8117 -	175	95.0650B	92.6900A
MAR14	94.1350	94.1450B	94.1350	94.1350	94.1250	(5.87) +	5.0	10	----	7486 -	6	95.0500B	92.7800A
JUN14	94.1150	94.1250B	94.1150	94.1150	94.1050	(5.89) +	5.0	9	----	2822	UNCH	95.0100B	93.1250A
SEP14	----	94.0850B	----	94.0750B	94.0750	(5.92) +	5.0	120	----	4117	UNCH	94.9850B	93.5600A
DEC14	----	94.0500B	----	94.0400B	94.0400	(5.96) +	5.0	55	----	2575 -	55	94.9400B	93.6450A
MAR15	----	94.0350B	----	94.0250B	94.0250	(5.97) +	5.0	----	----	1159	UNCH	94.9200B	93.6550A
JUN15	----	94.0200B	----	94.0100B	94.0100	(5.99) +	5.0	----	----	700	UNCH	94.8950B	93.6400A
SEP15	----	93.9900B	----	93.9800B	93.9800	(6.02) +	5.0	----	----	1957	UNCH	94.7150B	93.6200A
DEC15	----	93.9600B	----	93.9500B	93.9500	(6.05) +	5.0	----	----	952	UNCH	94.6800B	93.5900A
MAR16	----	93.9450B	----	93.9350B	93.9350	(6.06) +	5.0	----	----	1390	UNCH	94.6650B	93.5700A
JUN16	----	93.9250B	----	93.9150B	93.9150	(6.08) +	5.0	----	----	1787	UNCH	94.6450B	93.5450A
SEP16	----	93.9100B	----	93.9000B	93.9000	(6.10) +	5.0	----	----	1204	UNCH	94.6200B	93.5250A
DEC16	----	93.8750B	----	93.8650B	93.8650	(6.13) +	5.0	----	----	558	UNCH	94.4900B	93.4950A
MAR17	----	93.8550B	----	93.8450B	93.8450	(6.15) +	5.0	----	----	572	UNCH	94.3700B	93.4800A
JUN17	----	93.8400B	----	93.8300B	93.8300	(6.17) +	5.0	----	----	108	UNCH	93.8450B	93.5800A
TOTAL EURO DLR FUT								210588	2505693	11350847 +	82639		

U.S. 3-MTH DLR: BBA FIX: 5.36000

欧洲美元期货报价

- 期货报价（IMM 指数）：$Q = 100 \times (1-$ 期货利率$)$
- 合约价格：$10,000 \times (100 - 0.25 \times (100 - Q))$
- 期货利率含义与远期利率类似
- IMM 指数变动量等于期货利率变动量 $\times 100$，方向相反。
- 规避利率上升风险者应卖出欧洲美元期货，而规避利率下跌风险者应买入欧洲美元期货。

欧洲美元期货结算

- 每个基点（0.01%）变动的价值：

$$1000000 \times 0.0001 \times \frac{1}{4} = 25\text{ 美元}$$

- 到期现货价：

$$100 \times (1 - \text{实际 3 个月期 LIBOR})$$

- 到期多头盈亏

$$\begin{aligned} &= [100 \times (1 - \text{LIBOR}) - Q] \times 100 \times 25 \\ &= (\text{期货利率} - \text{LIBOR}) \times 10000 \times 25 \end{aligned}$$

Example

- 2007 年 9 月 17 日 EDU07 到期时，3 个月期美元 LIBOR 年利率为 5.5975%，相应地 EDU07 最后结算价为 94.4025。
- 如果忽略持有期间的盯市结算与保证金要求，一个于 2007 年 7 月 20 日以 94.66 买入 EDU07 的交易者在该笔交易上是亏损的，最后结算日应向交易对手支付，每份合约损失

$$(94.4025 - 94.66) \times 100 \times 25 = -643.75 \text{ 美元}$$

远期利率与期货利率

- 欧洲美元期货合约与远期利率协议都锁定了未来一定期限的利率。
- 1 年以下的到期期限，期货利率 $\approx$ 远期利率
- 长期：差异不能忽略
  - 一次性到期/每日盯市结算和保证金：远期利率较低
  - 盈亏结算时贴现/无贴现：远期利率较低

美国长期国债期货概述

- 标的资产为从交割月的第一个天起剩余期限长于（包括等于） 15 年且在 15 年内不可赎回的面值 100 000 美元的任何美国长期国债。
- 约定到期时的债券价格
- 标的资产在期货存续期内支付现金利息
- 在 CME 集团交易，长期利率期货中交易最活跃的品种之一

美国长期国债期货合约条款

交易单位	面值为 100 000 美元的美国政府长期（30 年）国债
可交割等级	从交割月的第一天起剩余期限长于（包括等于）15 年且在 15 年内不可赎回的美国国债
交割时的发票价格（现金价格）	期货结算价格×交割债券的转换因子＋交割债券的应计利息
转换因子	交割月第一天，面值每 1 美元的实际被交割债券按 6%年到期收益率（半年计一次复利）计算的价值。
最小变动价位	$\frac{1}{32}\%$＝31.25 美元
报价	100 美元面值债券的价格，最小单位为$\frac{1}{32}$，例如 80-16 表示$80\frac{16}{32}$
合约交割月份	3 月季度循环中的前 3 个月
交易时间	芝加哥时间周一至周五 7:20-14:00
最后交易时间	交割月最后一个工作日之前的第 7 个工作日芝加哥时间中午 12:01
最后交割日	交割月的最后一个工作日

长期国债期货/现货的报价与现金价格

- 以美元和 1/32 美元表示每 100 美元面值债券的价格
  - 80 -16：表示 80.5 美元
  - 如果 80 -16 为国债期货报价，则一份长期美国国债期货的合约报价为

$$1\,000 \times 80\frac{16}{32} = 80\,500\text{美元}$$

- 现金价格

$$= \text{报价（净价）} + \text{上一个付息日以来的应计利息}$$

案例 5.5 ：附息票债券的现金价格与报价 I

- 2007 年 10 月 3 日，将于 2027 年 11 月 15 日到期、息票率为 6.125% 的长期国债 A 收盘报价为 118.11 。可以判断，该债券上一次付息日为 2007 年 5 月 15 日，下一次付息日为 2007 年 11 月 15 日。

案例 5.5 ：附息票债券的现金价格与报价 II

- 由于 2007 年 5 月 15 日到 2007 年 10 月 3 日之间的天数为 141 天，2007 年 5 月 15 日到 2007 年 11 月 15 日之间的天数为 184 天，因此 2007 年 10 月 3 日，该债券每 100 美元面值的应计利息等于

$$\frac{6.125}{2} \times \frac{141}{184} = 2.347 \text{ 美元}$$

- 因此该国债的现金价格为

$$118.11 + 2.347 = 120.457 \text{ 美元}$$

交割券、标准券与转换因子 I

- 交割券
- 标准券：面值为 1 美元，息票率为 6%，在交割月的第一天时的剩余到期期限为 15 年整的虚拟债券，是其他实际可交割债券价值的衡量标准

交割券、标准券与转换因子 II

- 转换因子：面值每 1 美元的可交割债券的未来现金流按 6% 的年到期收益率（每半年计复利一次）贴现到交割月第一天的价值，再扣掉该债券 1 美元面值的应计利息后的余额
  - 时间调整
  - 净价
  - 交易所公布

案例 5.5.1：转换因子的计算 I

- 2007 年 12 月，代码为 USZ7 的长期国债期货到期。由于案例 5.5 中的债券 A 在 2007 年 12 月 1 日时的剩余期限为 19 年 11 个月又 15 天且不可提前赎回，因而是该国债期货的可交割债券。根据计算规则，在计算转换因子时应取 3 个月的整数倍，从而该债券在 2007 年 12 月 1 日的剩余期限近似为 19 年 9 个月，下一次付息日近似假设为 2008 年 3 月 1 日。

案例 5.5.1 ：转换因子的计算 II

- 面值每 1 美元的该债券未来现金流按 6% 到期收益率贴现至 2007 年 12 月 1 日的价值为

$$\frac{\sum_{i=0}^{39}\frac{\frac{6.125\%}{2}}{1.03^i}+\frac{1}{1.03^{39}}}{1+(\sqrt{1.03}-1)}=1.0295$$

案例 5.5.1：转换因子的计算 III

- 根据转换因子的定义，转换因子等于该现值减去应计利息，在计算转换因子的假设条件下，该债券有 3 个月的应计利息。故此对于 2007 年 12 月到期的长期国债期货而言，这个债券的转换因子等于

$$1.0295 - \frac{6.125\%}{4} = 1.0142$$

国债期货现金价格的计算

- 期货空方交割 100 美元面值的特定债券应收到的现金计算公式为

$$\begin{aligned}\text{空方收到的现金} &= \text{期货报价} \times \text{交割债券的转换因子} \\ &\quad + \text{交割债券的应计利息}\end{aligned}$$

案例 5.5.2 ：国债期货现金价格的计算 I

- 2007 年 10 月 3 日，上述 USZ7 国债期货报价为 111.27 美元。假设空方定于 2007 年 12 月 3 日用债券 A 进行交割，一份 USZ7 国债期货的实际现金价格应为

$$1\,000 \times (111.27 \times 1.0142 + \text{应计利息})$$

案例 5.5.2：国债期货现金价格的计算 II

- 交割日 2007 年 12 月 3 日距上一次付息日 2007 年 11 月 15 日天数为 18 天，前后两次付息日 2007 年 11 月 15 日与 2008 年 5 月 15 日之间的天数为 182 天。因此 2007 年 12 月 3 日，债券 A 每 100 美元面值的应计利息等于

$$\frac{6.125}{2} \times \frac{18}{182} = 0.303 \text{ 美元}$$

- 因此，空方交割债券 A 可得到的实际现金收入应为

$$1\,000 \times (111.27 \times 1.0142 + 0.303) = 113\,153 \text{ 美元}$$

确定交割最合算的债券

- 交割最合算的债券就是购买交割券所付的价格与交割期货时空方收到的现金之差最小的那个债券。
- 交割成本

$$
\begin{aligned}
&= \text{债券报价} + \text{应计利息} - (\text{期货报价} \times \text{转换因子} \\
&\qquad + \text{应计利息}) \\
&= \text{债券报价} - (\text{期货报价} \times \text{转换因子})
\end{aligned}
$$

案例 5.7 ：交割最合算的债券

序号	息票率	到期日	转换因子	债券报价	期货报价×转换因子	交割成本
1	4.500	02/15/36	0.7978	96.91	88.77	8.14
2	4.750	02/15/37	0.8292	100.90	92.27	8.63
3	5.000	05/15/37	0.8628	104.91	96.00	8.91
4	5.250	11/15/28	0.9116	107.08	101.43	5.65
5	5.250	02/15/29	0.9111	107.05	101.38	5.67
6	5.375	02/15/31	0.9226	109.32	102.66	6.66
7	5.500	08/15/28	0.9415	110.25	104.76	5.49
8	6.000	02/15/26	1.0000	115.52	111.27	4.25
9	6.125	11/15/27	1.0142	118.11	112.85	5.26
10	6.125	08/15/29	1.0150	119.09	112.94	6.15
11	6.250	08/15/23	1.0250	117.09	114.05	3.04
12	6.250	05/15/30	1.0304	121.30	114.65	6.65
13	6.375	08/15/27	1.0428	121.09	116.03	5.06
14	6.500	11/15/26	1.0557	122.23	117.47	4.76
15	6.625	02/15/27	1.0703	123.92	119.09	4.83
16	6.750	08/15/26	1.0831	125.05	120.52	4.53
17	6.875	08/15/25	1.0940	125.76	121.73	4.03
18	7.125	02/15/23	1.1103	126.40	123.54	2.86
19	7.500	11/15/24	1.1570	132.61	128.74	3.87
20	7.625	02/15/25	1.1717	134.23	130.38	3.85

长期国债期货价格的确定

- 假定交割最合算的国债和交割日期已知：
  1. 根据交割最合算的国债现货的报价，算出该交割券的现金价格。
  2. 运用支付已知现金收益的远期定价公式根据交割券的现金价格算出交割券期货理论上的现金价格。

$$F = (S - I)e^{r(T-t)}$$

  3. 根据交割券期货的现金价格算出交割券期货的理论报价。
  4. 将交割券期货的理论报价除以转换因子即为标准券期货理论报价，也是标准券期货理论的现金价格。

案例 5.7 I

延续案例 5.7， 2007 年 10 月 3 日，针对 USZ7 期货而言交割最合算的债券是息票率为 7.125%、将于 2023 年 2 月 15 日到期的长期国债。其转换因子为 1.1103， 现货报价为 126.40。假设我们已知空方将在 2007 年 12 月 3 日交割，市场上 2 个月期的美元无风险连续复利年利率为 3.8%。试求出 USZ7 期货的理论报价。

案例 5.7 II

1. 运用式（5.15）算出该交割券的现金价格。

　　根据到期日推算，该交割券的上一次付息日应为 2007 年 8 月 15 日，下一次付息日应为 2008 年 2 月 15 日。则该交割券每 100 美元面值的应计利息等于

$$\frac{7.125}{2}\times\frac{49}{184}=0.949\text{ 美元}$$

根据式（5.15），该国债的现金价格为

$$126.40+0.949=127.349\text{ 美元}$$

案例 5.7 III

2. 计算期货有效期内交割券支付利息的现值。由于在 2007 年 10 月 3 日到 2007 年 12 月 3 日期间，该交割券不会支付利息，因此 $I=0$。

3. 在 12 月 3 日交割之前，USZ7 期货有效期还有 61 天（0.1671 年），运用式（3.5）可以计算出交割券期货理论上的现金价格为

$$F=127.349e^{3.8\%\times 0.1671}=128.160 \text{ 美元}$$

案例 5.7 IV

4. 反向运用式（5.16）算出该交割券期货的理论报价。2007 年 12 月 3 日交割时，该交割券的应计利息为

$$\frac{7.125}{2} \times \frac{110}{184} = 2.130 \text{ 美元}$$

则该交割券期货的理论报价为

$$128.160 - 2.130 = 126.030 \text{ 美元}$$

5. 最后求出标准券的理论期货报价为

$$\frac{126.030}{1.1103} = 113.510 \text{ 美元}$$

目录

资产价值的利率风险

- 资产价值的利率风险

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{P}\frac{dP}{dy}(dy) + \frac{1}{2! \times P}\frac{d^2P}{dy^2}(dy)^2 + \cdots + \frac{1}{n! \times P}\frac{d^nP}{dy^n}(dy)^n + \cdots$$

久期（Duration）

- 久期：资产价值变动的百分比对到期收益率变动的一阶敏感性

$$D = -\frac{dP/P}{dy}$$

  - 久期一般为正。
  - 久期反映了资产价值利率风险的主要部分。
  - 久期越大，资产的利率风险越大；反之则越小。

美元久期（Dollar Duration）

- 美元久期：到期收益率变动引起的价值变动金额

$$D \times P = -\frac{dP}{dy}$$

- 1 个基点的美元久期往往被称为 DV01 （基点美元价值）。

麦考利久期与修正久期（Modified Duration）

- 不含权债券价格关于 y 求导：

$$P=\sum_{i=1}^{m}\frac{C}{(1+y)^{i}}+\frac{A}{(1+y)^{m}}$$

$$\begin{aligned}-\frac{dP}{dy}\times\frac{1}{P}&=\frac{1}{1+y}\times\left[\frac{1C}{1+y}+\frac{2C}{(1+y)^{2}}+\frac{3C}{(1+y)^{3}}+\cdots\right.\\&\left.+\frac{mC}{(1+y)^{m}}+\frac{mA}{(1+y)^{m}}\right]\times\frac{1}{P}\\&=\frac{1}{1+y}\times\text{麦考利久期}\\&=\text{修正久期}\end{aligned}$$

久期近似公式

- 定价模型复杂的资产的久期公式

$$D \approx \frac{P_{-} - P_{+}}{2(P)(\Delta y)}$$

利率远期和利率期货的久期 I

- 利率远期和利率期货的久期取决于其标的资产的久期和远期（期货）本身价值变化的计算方式。
- 国债期货的久期
  - 基于交割券期货现金价格的久期

$$
\begin{aligned}
F &= (S-I)e^{r(T-t)} \\
\frac{dF}{dr} &= e^{r(T-t)}\left(\frac{dS}{dr}-\frac{dI}{dr}\right)+(S-I)e^{r(T-t)}(T-t) \\
&\approx -(S-I)e^{r(T-t)}D_S+(S-I)e^{r(T-t)}(T-t) \\
D_F &= -\frac{dF/F}{dr}\approx D_S-(T-t)
\end{aligned}
$$

利率远期和利率期货的久期 II

- 基于标准券期货价格的久期

$$G = \frac{F - c}{CF}$$

$$D_G = \frac{D_F}{CF} \frac{F}{G} \approx D_F$$

基于久期的利率套期保值 I

- 最优的利率风险套期保值比率 n 是使得套期保值组合的价值变动对利率的敏感性为零的套期保值比率

$$\frac{d\Pi}{dy} = 0$$

- n 实际上是使得套期保值组合的美元久期为零的套期保值比率。

基于久期的利率套期保值 II

- 以现货多头和期货空头的空头套期保值组合为例

$$d\Pi = dH - ndG$$

$$n = \frac{dH/dy}{dG/dy}$$

$$n = \frac{D_H \times H}{D_G \times G}$$

- 最优套期保值数量 N

$$N = n \times \frac{Q_H}{Q_G} = \frac{D_H \times V_H}{D_G \times V_G}$$

基于久期的利率套期保值 III

- 设投资组合的原始久期为 D_H，目标久期为 D_H^*，则需要交易的利率敏感性证券的份数为

$$\frac{D_H^* - D_H}{D_G} \times \frac{V_H}{V_G}$$

- 其中 V_G 是一份期货合约按标准券报价计算的合约规模。
- 上式为负时，需要进行反向操作。

案例 5.8 ：基于久期的套期保值 I

- 假设一个手中管理着价值 1000 万美元、久期为 6.8 的国债组合的基金经理非常担心利率在接下来的一个月内波动剧烈，决定于 2007 年 10 月 3 日使用 12 月到期的长期国债期货 USZ7 进行利率风险管理。当她进入市场时，USZ7 报价为 111.27 美元。

案例 5.8：基于久期的套期保值 II

- 2007 年 10 月 3 日，针对 USZ7 期货而言交割最合算的债券是息票率为 7.125%、将于 2023 年 2 月 15 日到期的长期国债。其转换因子为 1.1103，现货报价为 126.40 美元。根据债券修正久期的计算公式，该债券的修正久期为 10.18，故此 USZ7 的久期近似等于

$$10.18 - \frac{2}{12} = 10.01$$

案例 5.8 ：基于久期的套期保值 III

- 套期保值数量为

$$N=\frac{D_H}{D_F}\times\frac{V_H}{V_G}=\frac{6.8}{10.01}\times\frac{10000000}{111.27\times 1000}=61.05$$

- 因此，该基金经理应卖出 61 份 USZ7 进行利率风险管理，以实现久期为零。

久期的局限性

- 久期有着天然的局限性：
  - 久期仅仅是资产价格对利率的一阶敏感性，无法反映和管理资产价格的全部利率风险，当利率变化较大时这个缺陷尤其显著；
  - 久期的定义建立在利率曲线发生平移，即所有期限的利率变化幅度相等的假设基础之上，这是一个不符合现实的假设。

謝 謝

http://efinance.org.cn
zlzheng@xmu.edu.cn
aronge@xmu.edu.cn