第十章 期权的回报与价格分析

厦门大学金融系
郑振龙 陈蓉

课程网站：http://efinance.org.cn
http://aronge.net

目录

- 期权的回报与盈亏分布
- 期权价格的基本特性
- 美式期权的提前执行
- 期权价格曲线
- 看涨看跌期权平价关系

目录

期权的回报与盈亏分布

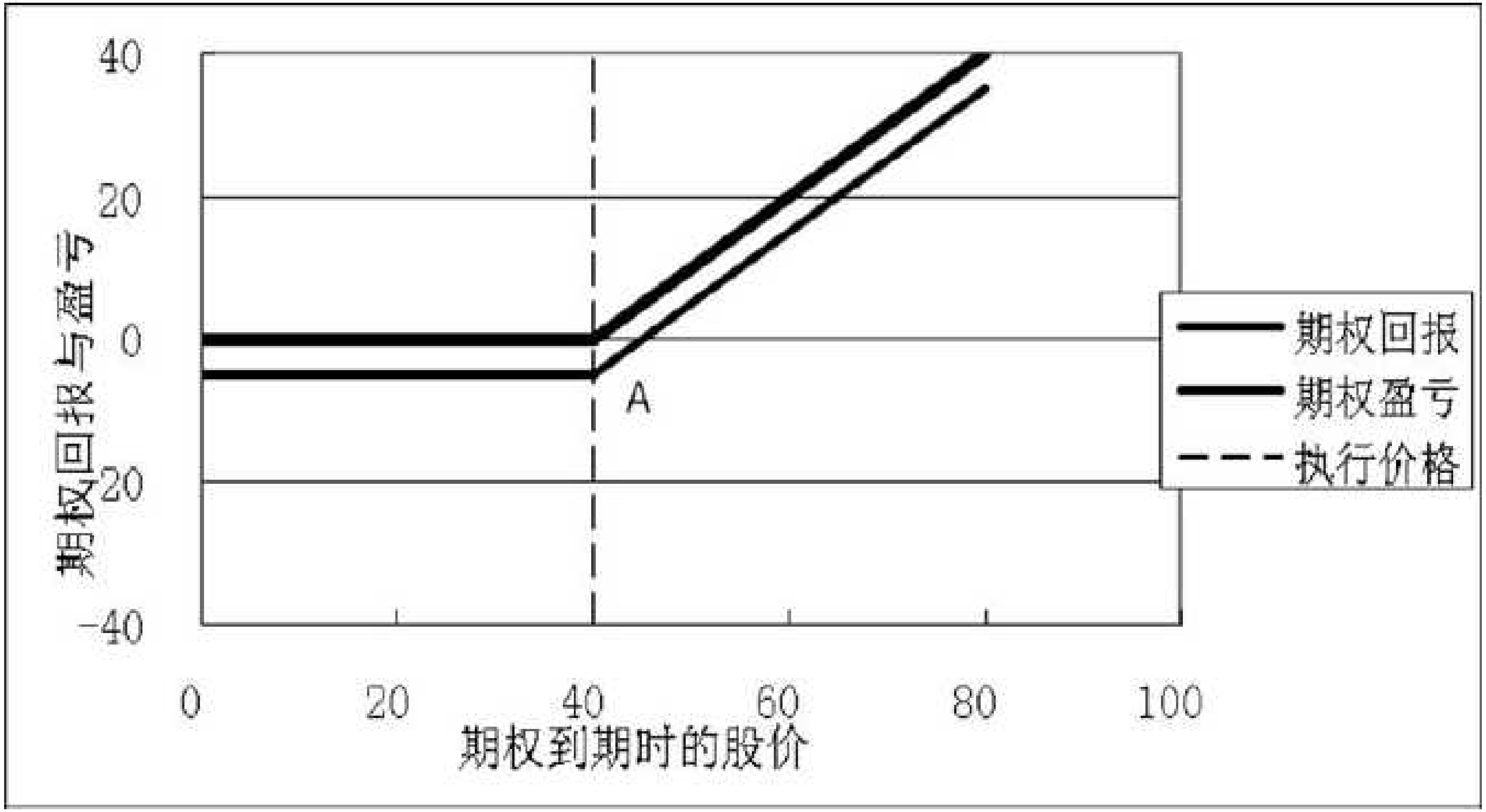
期权价格的基本特性

美式期权的提前执行

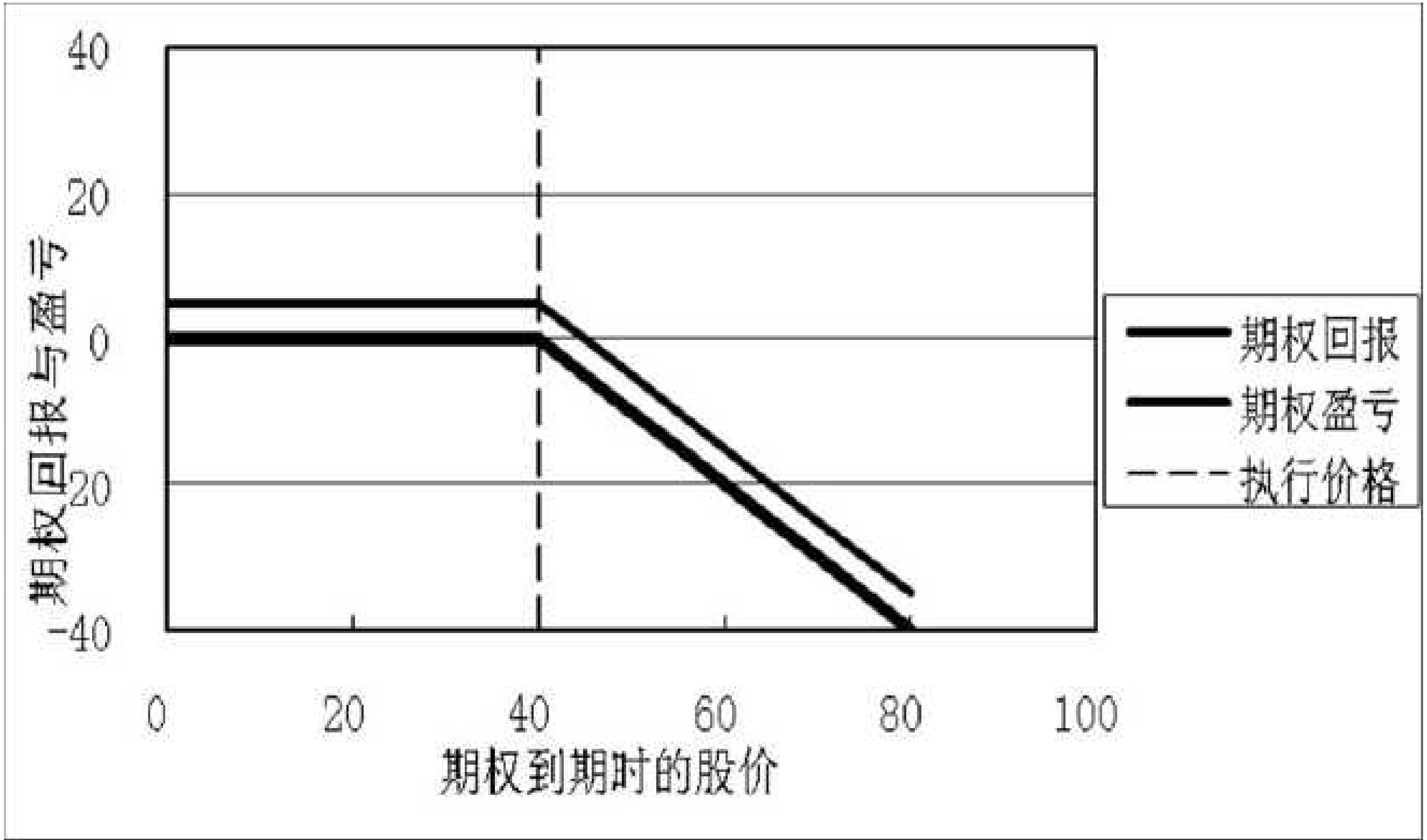
期权价格曲线

看涨看跌期权平价关系

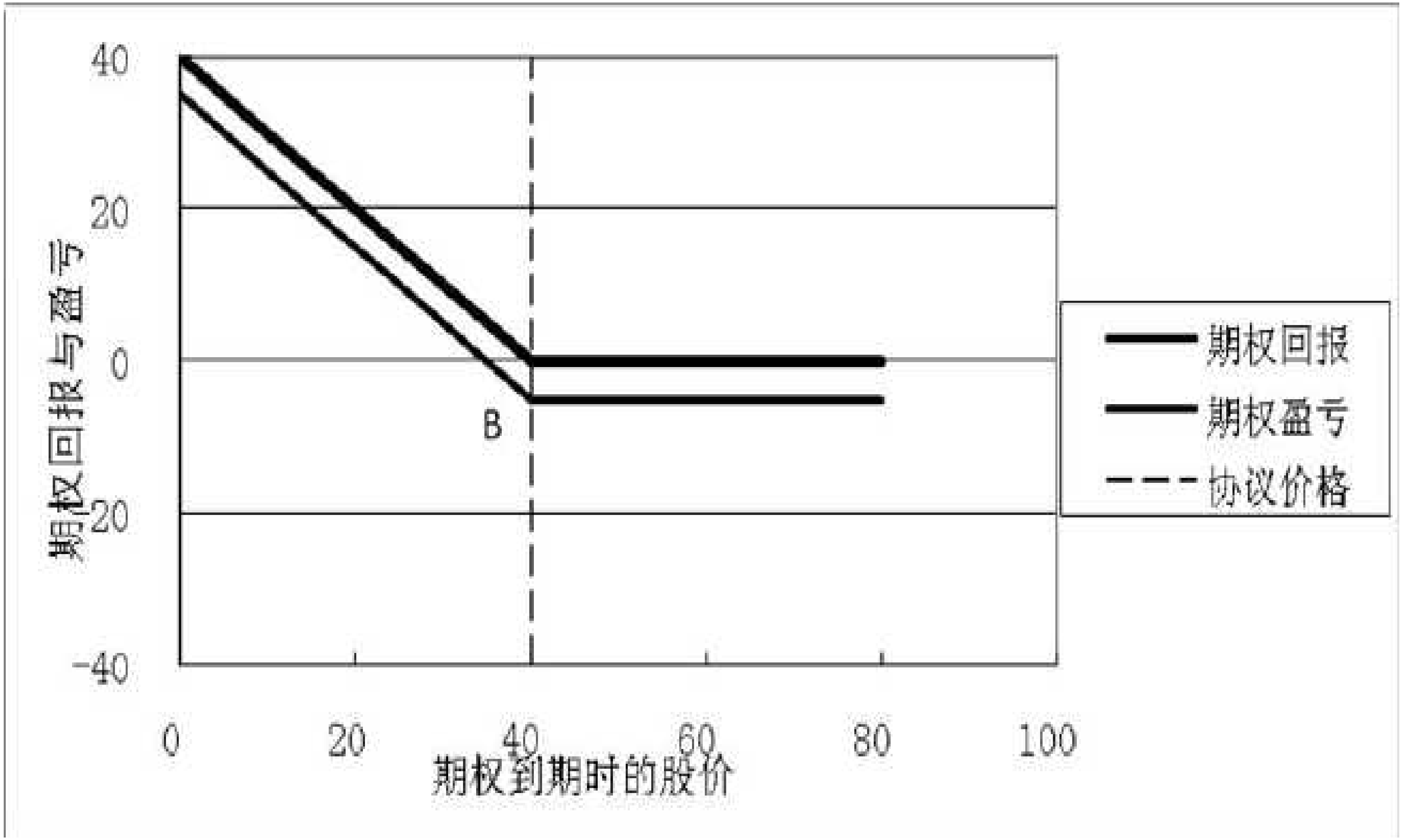
看涨期权多头的回报与盈亏分布



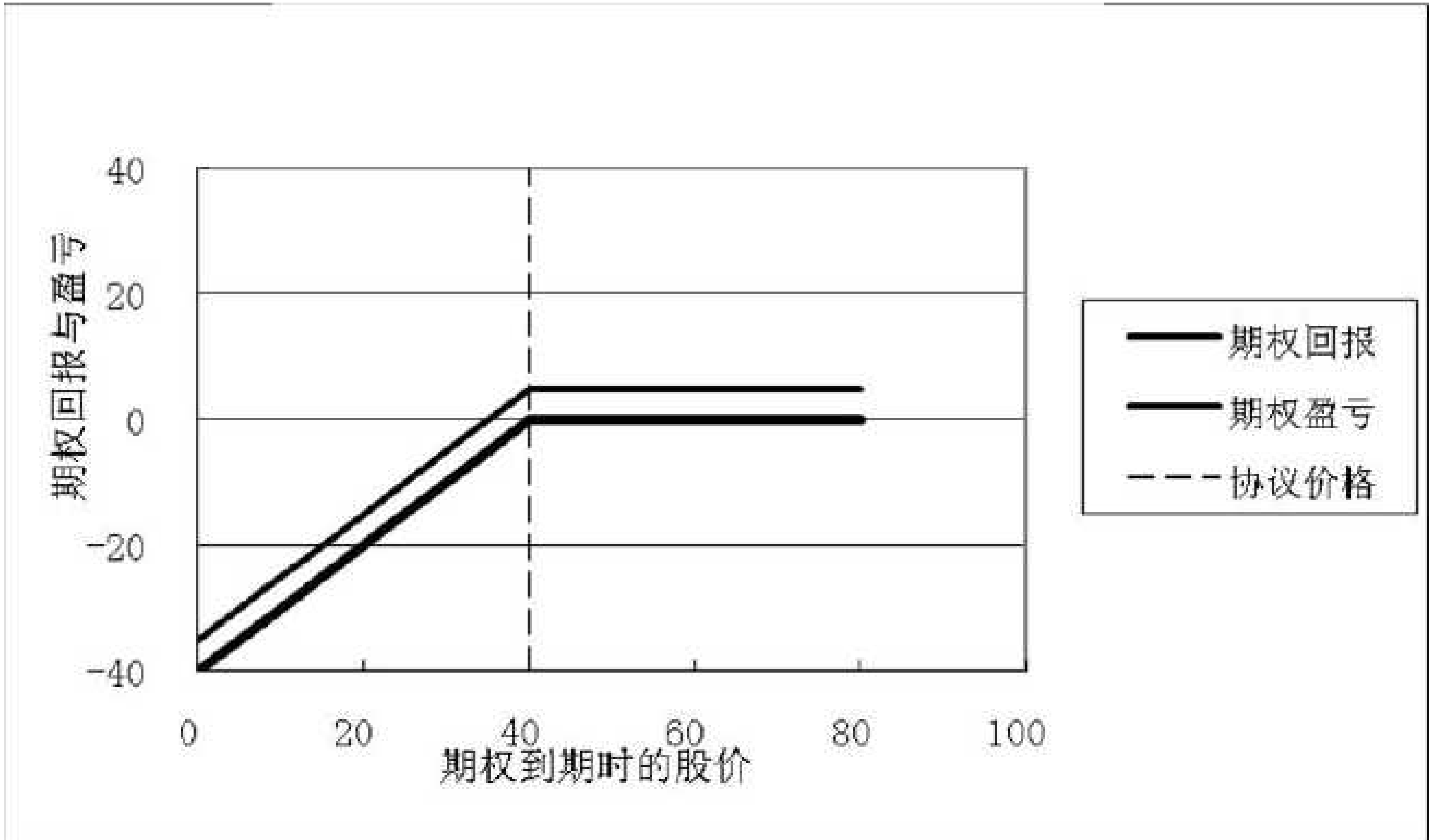
看涨期权空头的回报与盈亏分布



看跌期权多头的回报与盈亏分布



看跌期权空头的回报与盈亏分布



欧式期权到期回报和盈亏公式

头寸	到期回报公式		到期盈亏公式
	公式	分析	
看涨期权多头	$\max(S_T-X,0)$	若到期价格 S_T 高于 X，多头执行期权获得差价；否则放弃期权回报为零。	$\max(S_T-X,0)-c$
看涨期权空头	$-\max(S_T-X,0)$ 或 $\min(X-S_T,0)$	若到期价格 S_T 高于 X，多头执行期权，空头损失差价；否则多头放弃期权，空头回报为零。	$-\max(S_T-X,0)+c$ 或 $\min(X-S_T,0)+c$
看跌期权多头	$\max(X-S_T,0)$	若到期价格 S_T 低于 X，多头执行期权获得差价；否则放弃期权回报为零。	$\max(X-S_T,0)-p$
看跌期权空头	$-\max(X-S_T,0)$ 或 $\min(S_T-X,0)$	若到期价格 S_T 低于 X，多头执行期权，空头损失差价；否则多头放弃期权，空头回报为零。	$-\max(X-S_T,0)+p$ 或 $\min(S_T-X,0)+p$

目 录

期权的回报与盈亏分布

期权价格的基本特性

美式期权的提前执行

期权价格曲线

看涨看跌期权平价关系

内在价值与时间价值

- 期权价格（价值） ＝ 内在价值＋时间价值
- 期权的内在价值，是多方可能行权时所获回报**最大**贴现值与0的较大者。
- 注意：我们的定义与众不同，这种定义的优点有：
  - 期权价格下限等于内在价值
  - 时间价值恒大于0
  - 时间价值在平价点最大

欧式期权的内在价值

- 对欧式期权来说，多方只能在期权到期时决定行权与否并获得相应回报。
- 例如，多方执行欧式看涨期权所获回报为 $S_T - X$，如果标的资产在期权存续期内无收益，S_T 的现值就是当前的市价S；如果标的资产在期权存续期内支付已知的现金收益，S_T 的现值则为S-I，其中I表示在期权有效期内标的资产所获得的现金收益贴现至当前的现值。

欧式期权的内在价值

- 由于X为确定现金流，其现值的计算就是简单的贴现，故此欧式无收益和有收益资产看涨期权的内在价值分别为$Max(S-Xe^{-r(T-t)},0)$与 $Max(S-I-Xe^{-r(T-t)},0)$
- 欧式看跌期权内在价值的分析类似于欧式看涨期权。

无收益资产美式期权的内在价值

- 对于无收益资产美式看涨期权而言，期权有效期内任意一个工作日（用τ时刻表示）都可能行权，回报为$S_\tau - X$。由于S_τ 的贴现值恒为S，而X的贴现值等于$Xe^{-r_\tau(\tau-t)}$，r_τ为当前t时刻到未来 时刻τ间的无风险利率。由于该期权回报的贴现值是τ的增函数，因此其内在价值就是$\max(S - Xe^{-r\,(T-t)}, 0)$。

有收益资产美式期权的内在价值

- 对于有收益资产美式看涨期权而言，以只在$\tau+1$时刻派发一次现值为I的红利为例。将期权有效期以τ时刻为界划分为两个时段。从上述无收益资产美式看涨期权的分析可知，从当前时刻到τ时刻，期权回报的最大贴现值为$S-Xe^{-r_\tau(\tau-t)}$；从$\tau+1$时刻至 T时刻，期权回报的最大贴现值为$S-I-Xe^{-r\,(T-t)}$。因此其内在价值等于$max(S-Xe^{-r_\tau(\tau-t)},S-I-Xe^{-r\,(T-t)},0)$。

无收益资产美式看跌期权的内在价值

- 对于无收益美式看跌期权而言，其执行时的回报为$X - S_{\tau}$，由于该期权回报的贴现值是τ的减函数，因此其内在价值就是$\max(X - S, 0)$。

有收益资产美式看跌期权的内在价值

- 对于有收益资产美式看跌期权而言，以只在$\tau-1$时刻派发一次现值为I的红利为例。将期权有效期以$\tau-1$时刻为界划分为两个时段。从上述无收益资产美式看跌期权的分析可知，从当前时刻到$\tau-1$时刻，期权回报的最大贴现值为$X-S$；从τ时刻至T时刻，期权回报的最大贴现值为$Xe^{-r_\tau(\tau-t)}-(S-I)$。因此其内在价值等于$max(X-S, Xe^{-r\,(T-t)}-(S-I), 0)$。

期权的内在价值

头寸			内在价值
看涨期权	欧式	无收益	$\max(S - Xe^{-r(T-t)}, 0)$
		有收益	$\max(S - I - Xe^{-r(T-t)}, 0)$
	美式	无收益	$\max(S - Xe^{-r(T-t)}, 0)$
		有收益	$\max(S - Xe^{-r_\tau(\tau-t)}, S - I - Xe^{-r(T-t)}, 0)$
看跌期权	欧式	无收益	$\max(Xe^{-r(T-t)} - S, 0)$
		有收益	$\max(Xe^{-r(T-t)} - (S - I), 0)$
	美式	无收益	$\max(X - S, 0)$
		有收益	$\max(X - S, Xe^{-r_\tau(\tau-t)} - (S - I), 0)$

案例 10.1：通用电器（GE）看跌期权内在价值计算 I

- 2007 年 8 月 31 日美国中部时间 10:18，在 CBOE，1 份以通用电气股票为标的资产、执行价格为 40 美元、到期日为 2007 年 9 月 22 日的美式看跌期权价格为 1.76 美元，而同一天的通用电气股票收盘价为38.5 美元。
- GE 2007 年每季度的股息为 0.28 美元，第三季度股息除权日为 9 月 20 日，股息发放日为 10 月 25 日。
- 根据2007年8月31日的美国国债利率期限结构，1 个月期年利率为4.02%，故此我们选择4%作为19天、23天和55天贴现率的近似。

案例10.1：通用电器（GE）看跌期权内在价值计算II

GE期权是标的资产有收益情况下的美式期权。如果8月31日立刻执行，内在价值为:

$$\max(X-S,0)=\max(40-38.5,0)=\max(1.5,0)=1.5$$

如果持有至9月19日执行，则内在价值为:

$$\max(Xe^{-r_\tau(\tau-t)}-S,0)=\max(40e^{-4\%\times19/365}-38.5,0)=1.42$$

如果持有至9月20日执行，则内在价值为

$$\max(Xe^{-r_\tau(\tau-t)}-(S-I),0)=\max(40e^{-4\%\times20/365}-(38.5-0.28e^{-4\%\times55/365}),0)=1.69$$

如果持有到期至9月22日执行，则内在价值为

$$\max(Xe^{-r_\tau(\tau-t)}-(S-I),0)=\max(40e^{-4\%\times22/365}-(38.5-0.28e^{-4\%\times55/365}),0)=1.68$$

因此，GE看跌期权的内在价值为1.69美元。

实值期权、平价期权与虚值期权

- **平价期权（At the Money）**
  - 平价点就是使得期权内在价值由正值变化到零的标的资产价格的临界点。
- **实值期权（In the Money）**
- **虚值期权（Out of the Money）**

实值期权、平价期权与虚值期权

分类			实值期权	平价期权	虚值期权
看涨期权	欧式	无收益	$S > Xe^{-r(T-t)}$	$S = Xe^{-r(T-t)}$	$S < Xe^{-r(T-t)}$
		有收益	$S > Xe^{-r(T-t)} + I$	$S = Xe^{-r(T-t)} + I$	$S < Xe^{-r(T-t)} + I$
	美式	无收益	$S > Xe^{-r(T-t)}$	$S = Xe^{-r(T-t)}$	$S < Xe^{-r(T-t)}$
		有收益	$S > \min(Xe^{-r_\tau(\tau-t)}, Xe^{-r(T-t)} + I)$	$S = \min(Xe^{-r_\tau(\tau-t)}, Xe^{-r(T-t)} + I)$	$S < \min(Xe^{-r_\tau(\tau-t)}, Xe^{-r(T-t)} + I)$
看跌期权	欧式	无收益	$S < Xe^{-r(T-t)}$	$S = Xe^{-r(T-t)}$	$S > Xe^{-r(T-t)}$
		有收益	$S < Xe^{-r(T-t)} + I$	$S = Xe^{-r(T-t)} + I$	$S > Xe^{-r(T-t)} + I$
	美式	无收益	$S < X$	$S = X$	$S > X$
		有收益	$S < \max(X, Xe^{-r_\tau(\tau-t)} + I)$	$S = \max(X, Xe^{-r_\tau(\tau-t)} + I)$	$S > \max(X, Xe^{-r_\tau(\tau-t)} + I)$

期权的时间价值

- 期权时间价值 = 期权价格 – 期权内在价值

- 期权的时间价值是在期权尚未到期时，标的资产价格的波动为期权持有者带来收益的可能性所隐含的价值。

- 期权的时间价值是基于期权多头权利义务不对称这一特性，在期权到期前，标的资产价格的变化可能给期权多头带来的收益的一种反映。

期权时间价值的变动

- 到期时间
- 标的资产价格的波动率（期权的波动价值）
- 期权的时间价值受内在价值影响，在期权平价点时间价值达到最大，并随期权实值量和虚值量增加而递减

期权时间价值与内在价值的关系

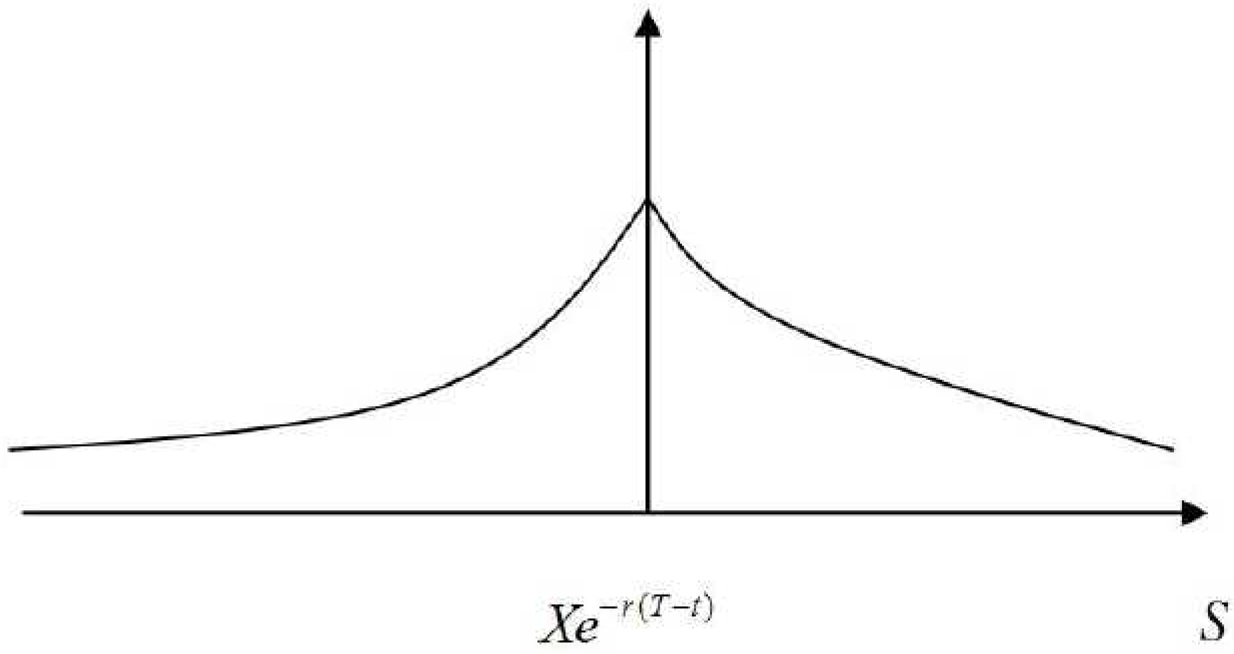


图 10.3　无收益资产看涨期权时间价值与$(S - Xe^{-r(T-t)})$的关系

案例 10.2： 内在价值与时间价值 I

- A 股票（无红利）的市价为 9.05 元，A 股票的两种欧式看涨期权的执行价格分别为 10 元和 8 元，有效期均为 1 年，1 年期无风险利率为 10%（连续复利）。这两种期权的内在价值分别为

$$\max\left(S-Xe^{-r(T-t)},0\right)=\max\left(9.05-10e^{-10\%\times1},0\right)=0$$

$$\max\left(S-Xe^{-r(T-t)},0\right)=\max\left(9.05-8e^{-10\%\times1},0\right)=1.81$$

- 期权 1 处于平价点，而期权 2 是实值期权。哪一种期权的时间价值高呢？

案例10.2：内在价值与时间价值II

- 假设这两种期权的时间价值相等，都等于2元，则期权1的价格为2元，期权2的价格为3.81元。如果让读者从中挑一种期权，你们愿意挑哪一种呢？为了比较这两种期权，假定1年后出现如下三种情况：
- 情况一：$S_T \geq 10$元。则期权1获利

$$\left(S_T - 10 - 2e^{0.1}\right) = \left(S_T - 12.21\right)\text{元}$$

期权2获利

$$\left(S_T - 8 - 3.81e^{0.1}\right) = \left(S_T - 12.21\right)\text{元}$$

期权1获利等于期权2。

案例 10.2： 内在价值与时间价值 III

- 情况二：$8 < S_T < 10$元。则期权 1 亏$2e^{0.1} = 2.21$元，而期权 2 亏 $S_T - 8 - 3.81e^{0.1}$ 元, 介于 2.21 元与 4.21 元之间。期权 1 亏损少于期权 2 。

- 情况四：$S_T \le 8$ 元，则期权 1 亏 $2e^{0.1} = 2.21$ 元，而期权 2 亏 $3.81e^{0.1} = 4.21$ 元。期权 1 亏损少于期权 2 。

案例 10.2： 内在价值与时间价值 IV

- 由此可见，无论未来 A 股票价格是涨是跌还是平，期权 1 均优于或等于期权 2 。显然，期权 1 的时间价值不应等于而应高于期权 2 。
- 再引入期权 3 ：$X_3 = 12$元，其他条件相同。比较平价期权 1 和虚值期权 3 ，通过同样的分析可以发现期权 1 的时间价值应高于期权 3 。
- 推广上述结论可以发现，无论期权 2 和期权 3 执行价格如何选择，只要是虚值或实值期权，其时间价值一定小于平价期权，且时间价值随期权实值量和虚值量增加而递减。

期权价值的影响因素

影响期权价格的主要因素

变量	欧式看涨	欧式看跌	美式看涨	美式看跌
标的资产市场价格	+	−	+	−
期权协议价格	−	+	−	+
有效期	?	?	+	+
标的资产价格波动率	+	+	+	+
无风险利率	+	−	+	−
红利	−	+	−	+

注："+"表示正向的影响，"−"表示反向的影响，？则表示影响方向不一定。

无收益资产欧式看涨期权下限 I

- 构造组合
  - 组合 A ：一份欧式看涨期权加金额为 $Xe^{-r(T-t)}$ 的现金
  - 组合 B ：一单位标的资产
- T 时刻的组合价值
  - 组合 A ： $\max(S_T, X)$
  - 组合 B ： S_T

无收益资产欧式看涨期权下限 II

- 由于 $\max(S_T, X) \geq S_T$

- 因此，在 t 时刻组合 A 的价值也应该大于组合 B，即

$$c + Xe^{-r(T-t)} \geq S$$

$$c \geq S - Xe^{-r(T-t)}$$

- 结论：由于期权的价值一定为正，因此无收益资产欧式看涨期权价格下限为：

$$c \geq \max\left(S - Xe^{-r(T-t)}, 0\right)$$

有收益资产欧式看涨期权下限

- 只要将上述组合 A 的现金改为

$$I + Xe^{-r(T-t)}$$

- 其中 I 为期权有效期内资产收益的现值，并经过类似的推导，就可得出有收益资产欧式看涨期权价格的下限为：

$$c \geq \max\left(S - I - Xe^{-r(T-t)}, 0\right)$$

无收益资产欧式看跌期权下限 I

- 构造组合
  - 组合 C：一份欧式看跌期权加上一单位标的资产
  - 组合 D：金额为 $Xe^{-r(T-t)}$ 的现金
- T 时刻的组合价值
  - 组合 C： $\max\left(S_T, X\right)$
  - 组合 D： X

无收益资产欧式看跌期权下限II

- 由于组合C的价值在T时刻大于等于组合D，因此组合C的价值在t时刻也应大于等于组合D，即：

$$p + S \geq Xe^{-r(T-t)}$$

$$p \geq Xe^{-r(T-t)} - S$$

- 由于期权的价值一定为正，因此无收益资产欧式看跌期权价格下限为：

$$p \geq \max\left(Xe^{-r(T-t)} - S, 0\right)$$

有收益资产欧式看跌期权下限

- 将上述组合 D 的现金改为

$$Xe^{-r(T-t)}+I$$

- 可得出有收益资产欧式看跌期权价格的下限为：

$$p \geq \max\left(Xe^{-r(T-t)}+I-S,0\right)$$

期权价格上下限

			上限	下限
看涨期权	欧式	无收益	S	$\max(S - Xe^{-r(T-t)}, 0)$
		有收益	S-I	$\max(S - I - Xe^{-r(t-t)}, 0)$
	美式	无收益	S	$\max(S - Xe^{-r(T-t)}, 0)$
		有收益		$\max(S - Xe^{-r_\tau(\tau-t)}, S - I - Xe^{-r(T-t)}, 0)$
看跌期权	欧式	无收益	$Xe^{-r(T-t)}$	$\max(Xe^{-r(T-t)} - S, 0)$
		有收益		$\max(Xe^{-r(t-t)} - (S - I), 0)$
	美式	无收益	X	$\max(X - S, 0)$
		有收益		$\max(X - S, Xe^{-r_\tau(\tau-t)} - (S - I), 0)$

目 录

期权的回报与盈亏分布

期权价格的基本特性

美式期权的提前执行

期权价格曲线

看涨看跌期权平价关系

提前执行无收益资产美式看涨期权的合理性 I

- 提前执行无收益资产的美式看涨期权是不明智的。
- 构造组合
  - 组合 A ：一份美式看涨期权加金额为 $Xe^{-r(T-t)}$ 的现金
  - 组合 B ：一单位标的资产
- 不提前执行：
  - T 时刻组合 A 的价值为 $\max(S_T, X)$，而组合 B 的价值为 S_T，组合 A 在 T 时刻的价值一定大于等于组合 B 。

提前执行无收益资产美式看涨期权的合理性 II

- 若在 τ 时刻提前执行：
  - 组合 A 的价值为 $S_\tau - X + Xe^{-\hat{r}(T-\tau)}$，而组合 B 的价值为 S_τ 。
  - 由于 $T > \tau, \hat{r} > 0$，因此 $Xe^{-\hat{r}(T-\tau)} < X$。也就是说，若提前执行美式期权的话，组合 A 的价值将小于组合B 。
- 结论：提前执行是不理智的。无收益资产美式看涨期权价格的价格下限为

$$C \geq \max\left(S - Xe^{-r(T-t)}, 0\right)$$

提前执行无收益资产美式看跌期权的合理性 I

- 构造组合
  - 组合 A ：一份美式看跌期权加一单位标的资产
  - 组合 B ：金额为 $Xe^{-r(T-t)}$ 的现金
- 若不提前执行，则到 T 时刻，组合 A 的价值为 $\max(S_T, X)$，组合 B 的价值为 X，因此组合 A 的价值大于等于组合 B。
- 若在τ时刻提前执行，组合 A 的价值为 X，组合 B 的价值为：$Xe^{-\hat{r}(T-\tau)}$，因此组合 A 的价值也高于组合 B。

提前执行无收益资产美式看跌期权的合理性 II

- 结论：是否提前执行无收益资产的美式看跌期权，主要取决于期权的实值额 $(X-S)$ 、无风险利率水平等因素。一般来说，只有当 S 相对于 X 来说较低，或者 r 较高时，提前执行无收益资产美式看跌期权才可能是有利的。
- 由于无收益资产的美式看跌期权可能提前执行，期权价格下限变为：

$$P \geq \max(X-S,0)$$

提前执行有收益资产美式看涨期权的合理性 I

- 在有收益情况下，只有在除权前的瞬时时刻提前执行美式看涨期权方有可能是最优的。因此我们只需推导在每个除权日前提前执行的可能性。
- 如果在 t_n 时刻提前执行期权，则期权多方获得 $S_n - X$ 的回报。若不提前执行，则标的资产价格将由于除权降到 $S_n - D_n$ 。

提前执行有收益资产美式看涨期权的合理性 II

- 因此如果

$$S_n - D_n - Xe^{-r(T-t_n)} \geq S_n - X$$

$$D_n \leq X\left[1 - e^{-r(T-t_n)}\right]$$

提前执行是不明智的。

提前执行有收益资产美式看涨期权的合理性III

- 如果

$$D_n > X\left[1 - e^{-r(T-t_n)}\right]$$

则在t_n提前执行有可能是合理的（仅是有可能并非必然要提前执行）。实际上，只有当t_n时刻标的资产价格足够大时提前执行美式看涨期权才是合理的。

提前执行有收益资产美式看涨期权的合理性IV

- 类似地，对于任意时刻，在 t_i 时刻不能提前执行有收益资产的美式看涨期权条件是

$$D_i \le X\left[1-e^{-r\left(t_{i+1}-t_i\right)}\right]$$

- 相应地期权下限变为

$$C \ge \max\left(S - Xe^{-r_\tau(\tau-t)}, S - I - Xe^{-r(T-t)}, 0\right)$$

提前执行有收益资产美式看跌期权的合理性

- 由于提前执行有收益资产的美式看跌期权意味着自己放弃收益权，因此与无收益资产的美式看跌期权相比，有收益资产美式看跌期权提前执行的可能性变小，但仍无法完全排除提前执行的可能性。

目 录

期权的回报与盈亏分布

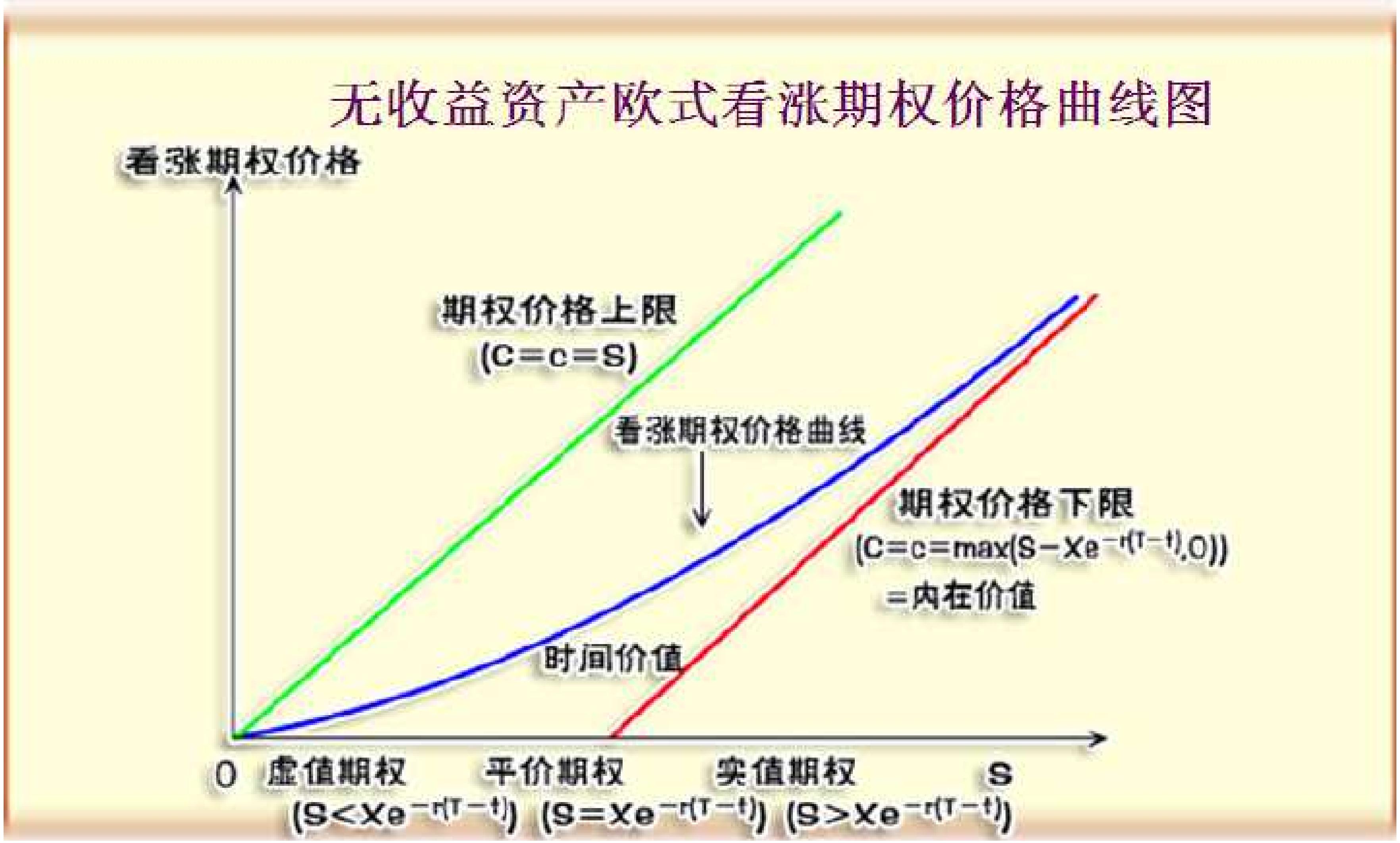
期权价格的基本特性

美式期权的提前执行

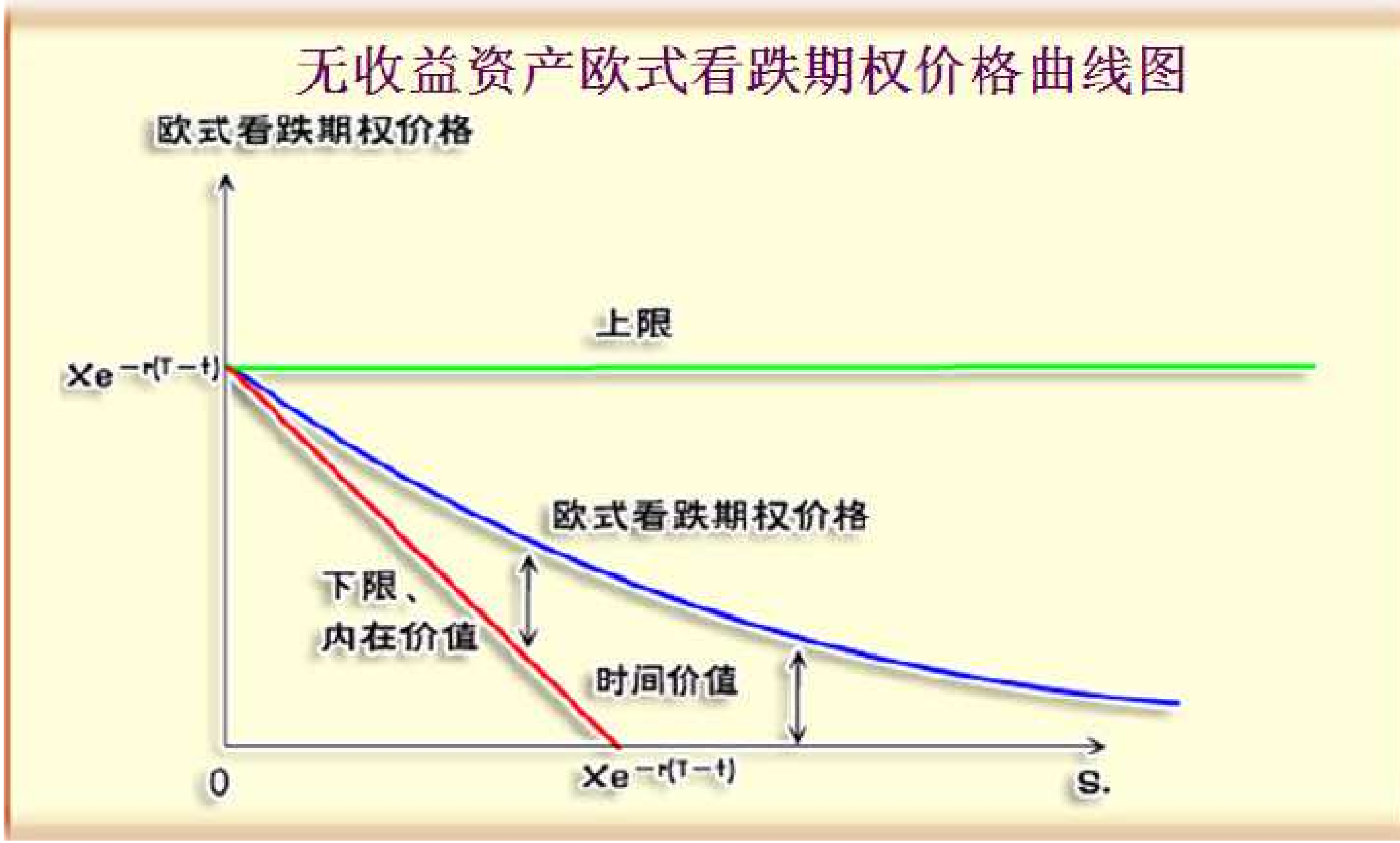
期权价格曲线

看涨看跌期权平价关系

无收益资产欧式看涨期权价格曲线



无收益资产欧式看跌期权价格曲线



目 录

期权的回报与盈亏分布

期权价格的基本特性

美式期权的提前执行

期权价格曲线

看涨看跌期权平价关系

无收益资产欧式看跌期权与看涨期权之间的平价关系（put- call parity, PCP）

- 考虑如下两个组合：
  - 组合 A ：一份欧式看涨期权加金额为 $Xe^{-r(T-t)}$ 的现金
  - 组合 B ：一份有效期和协议价格与组合 A 中看涨期权相同的欧式看跌期权加上一单位标的资产
- 在期权到期时，两个组合的价值均为 $\max(S_T, X)$。由于欧式期权不能提前执行，两组合在时刻 t 的价值也必须相等，即：

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + S$$

有收益资产欧式看跌期权与看涨期权之间的平价关系

- $c + I + Xe^{-r(T-t)} = p + S$
- 平价关系的理解

无收益资产美式看跌期权与看涨期权之间的平价关系 I

- 考虑如下两个组合：
  - 组合 A ：一份欧式看涨期权加金额为 X 的现金
  - 组合 B ：一份有效期和协议价格与组合 A 中看涨期权相同的美式看跌期权加上一单位标的资产
- 无论美式期权是否提前执行， A 的价值都不低于 B 的价值，所以在当前 t 时刻， A 的价值也应不低于 B 的价值：

$$c+X \geq P+S \rightarrow C+X \geq P+S$$

无收益资产美式看跌期权与看涨期权之间的平价关系 II

- 由于

$$P \geq c + Xe^{-r(T-t)} - S$$

$$C - P \leq S - Xe^{-r(T-t)}$$

- 所以

$$S - X \leq C - P \leq S - Xe^{-r(T-t)}$$

有收益资产美式看跌期权与看涨期权之间的平价关系

- 只要将上述组合 A 的现金改为 $I+X$，就可得到有收益资产的美式期权满足

$$S-I-X\le C-P$$

- 同时我们有

$$c+I+Xe^{-r(T-t)}=p+S$$

和

$$c+I\ge C$$

- 由此可得

$$S-I-X\le C-P\le S-Xe^{-r(T-t)}$$

请提问

- Any Questions？

謝謝

Email: zlzheng@xmu.edu.cn
aronge@xmu.edu.cn