离散算术平均亚式期权近似定价

孙坚强 李时银

摘要：本文对一般形式下的均值函数进行泰勒展开，分析标的算术平均与标的几何平均的差距，给出二者之间的近似关系式，进而对离散算术平均亚式期权进行近似定价。

关键词：亚式期权、期权定价

学科分类号：90A12, 49L25

1.引言

亚式期权是OTC市场上广受交易者青睐的金融工具，其到期收益函数依赖于某一特定时段内标的资产的某种形式的平均。目前在OTC市场上交易的绝大部分亚式期权都是标的算术平均，但即使在标的遵循几何布朗运动的假设下，仍然没有解析的定价公式。对标的算术平均亚式期权进行定价更多的是采用数值方法或以标的几何平均亚式期权来近似逼近。Boyle(1977) 以标的几何平均的亚式期权作为初始值采用Monte carlo控制方差法给出标的算术平均亚式期权的近似解，Rutties(1990)，Kemna和Vorst(1990)也采用Monte carlo模拟的方法，Turnbull and Wakeman(1991)引进对应四阶距相等的对数正态分布来逼近标的算术平均的分布，从而进行定价，Levy(1992)采用二阶距的方法，Vost(1992)建立了一个Black-Scholes近似公式来定价。本文对一般形式下的均值函数进行泰勒展开，分析算术平均与几何平均的差距，给出二者之间的近似关系式，进而对离散型标的算术平均的亚式期权进行定价。

2. 标的几何平均亚式期权的定价

我们假设标的 S_t 满足风险中性下的几何布朗运动

$$\frac{dS_t}{S_t} = m\,dt + s\;dw_t \tag{1}$$

其中，$m = r - q$，r为无风险利率，q为年红利率，s 为年波动率，w_t 为标准Wiener过程

随机微分方程(1)的解为：

$$S_T = S_t e^{(m-\frac{s^2}{2})(T-t)+s\,[w(T)-w(t)]} \tag{2}$$

为了便于计算和避免将过去的标的价格作为随机变量，我们假设t为当前时刻，$t_i(0 \le i \le n)$ 为标的价格的观察取样时刻，$t_i = t_0 + i\Delta t, (i = 1, 2n)$，$\Delta t = \frac{T-t_0}{n}$ 为两次观察取样的时间间隔，$t_n = T$ 为到期时刻。记 $t_i = t_0 + i\Delta t, (i = 1, 2, \cdots, n); t_0 = t_0 - t$，我们仅考虑 $(t < t_0)$ 的情况，$(t \ge t_0)$ 可作类似的分析。由(2)可以得到：

$$S_i = S_t e^{(m-\frac{s^2}{2})(t_i - t)+s\,[w(t_i)-w(t)]} \tag{3}$$

标的几何平均记为 $M(0)$，

$$M(0) = (\prod_{i=1}^{n} S_i)^{\frac{1}{n}}$$

定义：

$$R_i = \frac{S_i}{S_{i-1}}, \quad i = 1, 2n$$

由(3)**容易得出：**

$$\ln R_i = (m - \frac{s^2}{2})(t_i - t_{i-1}) + s[w(t_i) - w(t_{i-1})] \sim N[(m - \frac{s^2}{2})\Delta t, s^2 \Delta t]$$

$$\frac{M(0)}{S_t} = \frac{(\prod_{i=1}^{n} S_i)^{\frac{1}{n}}}{S_t} = \frac{S_0}{S_t}[\frac{S_n}{S_{n-1}}(\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}})^2(\frac{S_1}{S_0})^n]^{\frac{1}{n}}$$

$$\ln\frac{M(0)}{S_t} = \ln\frac{S_0}{S_t} + \frac{1}{n}(\ln R_n + 2\ln R_{n-1} + + n\ln R_1), t < t_0$$

由$\ln R_i, i = 1, 2 \cdots n,$ **的独立性可得：**

$$E[\ln\frac{M(0)}{S_t}] = (m - \frac{s^2}{2})[(t_0 - t) + \frac{n+1}{2n}(T - t_0)]$$

$$Var[\ln\frac{M(0)}{S_t}] = s^2[(t_0 - t) + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}(T - t_0)]$$

记$t = T - t$ **,并令** m_M, s_M **分别为标的几何平均**$M(0)$**的漂移系数与扩散系数，则：**

$$s_M^2 t = Var[\ln\frac{M(0)}{S_t}]$$

$$(m_M - \frac{s_M^2}{2})t = E[\ln\frac{M(0)}{S_t}]$$

那么，在当前时刻t**标的价格已知，时刻**T**的**M(0)**的转移密度函数为：**

$$j(M(0), S_t) = \frac{1}{M(0)\sqrt{2\Pi s_M^2}} e^{\frac{-\{\ln M(0) - [\ln S_t + (m_M - \frac{s_M^2}{2})t]\}^2}{2s_M^2 t}}$$

由风险中性期望折现的方法易得，标的几何平均欧式看涨期权的定价为：

$$C_{GM}(S_t, K, t) = e^{-rt}E[M(0) - K]^+ = e^{-rt}[S_t e^{m_M t}N(d_1) - KN(d_2)] \qquad (4)$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + (m_M + \frac{s_M^2}{2})t}{s_M\sqrt{t}} \qquad , d_2 = d_1 - s_M\sqrt{t}$$

其中K**为交割价格，类似的推导可得标的几何平均欧式看跌期权的定价为：**

$$P_{GM}(S_t, K, t) = e^{-rt}[KN(-d_2) - S_t e^{m_M t}N(-d_1)] \qquad (5)$$

其中 d_1, d_2 **的定义同上**

3. 标的几何平均与标的算术平均的近似关系

一般形式的均值函数为：

$$M(q) = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i^q)^{\frac{1}{q}}$$

当$q = 1$,$M(1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$ **,即得到标的算术平均。由洛必达法则易得**

$$M(0) = \lim_{q \to 0} M(q) = \lim_{q \to 0}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i^q)^{\frac{1}{q}} = (\prod_{i=1}^{n} S_i)^{\frac{1}{n}}$$

即为前面所讨论的标的几何平均，由 $M(q)$ **的可微性，将** $M(q)$ **在** $q = 0$ **作泰勒展开：** $M(q) = M(0) + M'(0)q + \frac{M''(0)}{2!}q^2 + \frac{M'''(x)}{3!}q^3, 0 < x < 1$

取$q = 1$**,则**:

$$M(1) = M(0) + M'(0) + \frac{M''(0)}{2} + \frac{M'''(x)}{3!} \quad , 0 < x < 1 \qquad (6)$$

下面分别计算$M'(0), M''(0)$:

$$M'(q)=M(q)\frac{q\sum_{i=1}^{n}S_i^q\ln S_i-(\sum_{i=1}^{n}S_i^q)(\ln\frac{\sum_{i=1}^{n}S_i^q}{n})}{q^2\sum_{i=1}^{n}S_i^q}$$

定义 $N(q)$ 为

$$N(q)=\frac{q\sum_{i=1}^{n}S_i^q\ln S_i-(\sum_{i=1}^{n}S_i^q)(\ln\frac{\sum_{i=1}^{n}S_i^q}{n})}{q^2\sum_{i=1}^{n}S_i^q}$$

则，$M'(q)=M(q)N(q)$

$$N'(q)=\frac{1}{[q\sum_{i=1}^{n}S_i^q]^2}\{[\sum_{i=1}^{n}S_i^q(\ln S_i)^2][q\sum_{i=1}^{n}S_i^q]-$$

$$[\sum_{i=1}^{n}S_i^q\ln S_i][\sum_{i=1}^{n}S_i^q+q\sum_{i=1}^{n}S_i^q\ln S_i]\}+\frac{2}{q^3}[\ln\frac{\sum_{i=1}^{n}S_i^q}{n}]-\frac{1}{q^2}\frac{\sum_{i=1}^{n}S_i^q\ln S_i}{\sum_{i=1}^{n}S_i^q}$$

$$M''(q)=M(q)N^2(q)+M(q)N'(q)$$

$$N(0)=\lim_{q\to 0}N(q)=\frac{1}{2}[\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln S_i)^2}{n}-(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln S_i}{n})^2] \quad (7)$$

$$M'(0)=\lim_{q\to 0}M(q)=M(0)N(0) \quad (8)$$

$$N'(0)=\lim_{q\to 0}N'(q)=\frac{2}{3}\frac{(\sum_{i=1}^{n}\ln S_i)^3}{n^3}+\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\ln^3 S_i-\frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n}\ln S_i)(\sum_{i=1}^{n}\ln^2 S_i) \quad (9)$$

$$M''(0)=\lim_{q\to 0}M''(q)=M(0)N^2(0)+M(0)N'(0) \quad (10)$$

将 $(7),(8),(9),(10)$ 代入 (6)，舍去高阶项，得出：

$$M(1)\approx M(0)[1+N(0)+\frac{1}{2}N^2(0)+\frac{1}{2}N'(0)]$$

其中，$M(1),M(0)$ 及 $1+N(0)+\frac{1}{2}N^2(0)+\frac{1}{2}N'(0)$ 均为标的资产 $S_i, i=1,2,\cdots,n$ 的函数，因此它们是随机变量，记 $L=E[1+N(0)+\frac{1}{2}N^2(0)+\frac{1}{2}N'(0)]$，下面证明 $1+N(0)+\frac{1}{2}N^2(0)+\frac{1}{2}N'(0)$ 可以用它的均值 L 代替。也即：

$$M(1)\approx M(0)L$$

为此先计算三者的期望，我们先对多项式的高次方进行分解，以简化计算：

$$N(0)=\frac{1}{2}[\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln S_i)^2}{n}-(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln S_i}{n})^2]$$

$$=\frac{1}{2n^2}\{n\sum_{i=1}^{n}(\ln S_i)^2-[\sum_{i=1}^{n}(\ln S_i)^2+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\ln S_i\ln S_j]\}$$

$$=\frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}[\ln\frac{S_i}{S_j}]^2$$

$$N'(0)=\frac{2}{3}\frac{(\sum_{i=1}^{n}\ln S_i)^3}{n^3}+\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\ln^3 S_i-\frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n}\ln S_i)(\sum_{i=1}^{n}\ln^2 S_i)$$

$$=\frac{2}{3n^3}[\sum_{i=1}^{n}\ln^3 S_i+3\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\ln^2 S_i\ln S_j+3\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\ln^2 S_i\ln S_j$$

$$+6\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\ln S_i\ln S_j\ln S_k]+\frac{1}{3n}[\sum_{i=1}^{n}\ln^3 S_i]$$

$$-\frac{1}{n^2}[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\ln S_i\ln^2 S_j+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\ln S_i\ln^2 S_j+\sum_{i=1}^{n}\ln^3 S_i]$$

记 $m_i=\ln S_t+(m-\frac{s^2}{2})(t_i-t)=\ln S_t+(m-\frac{s^2}{2})(t_0+i\Delta t)$ **,由** (3) **可得**

$$\ln\frac{S_i}{S_j}=(m_i-m_j)+s\,[w(t_i)-w(t_j)]$$

$$[\ln\frac{S_i}{S_j}]^2=(m_i-m_j)^2+2(m_i-m_j)s\,[w(t_i)-w(t_j)]+s^2[w(t_i)-w(t_j)]^2$$

$$\ln S_i\ln S_j\ln S_k=m_im_jm_k+w_im_jm_k+w_jm_im_k+w_km_im_j+m_iw_jw_k+m_jw_iw_k+m_kw_iw_j+w_iw_jw_k \quad (11)$$

由Wiener**过程的平稳性和独立增量性可得：**

$$E[\ln\tfrac{S_i}{S_j}]^2=(m_i-m_j)^2+s^2(t_j-t_i) \qquad (i<j)$$

$$Var[\ln\tfrac{S_i}{S_j}]^2=4s^2(m_i-m_j)^2(t_j-t_i)+2s^4(t_j-t_i)^2 \qquad (i<j)$$

$$E[\ln S_i\ln S_j\ln S_k]=m_im_jm_k+m_i\min(t_j,t_k)+m_j\min(t_i,t_k)+m_k\min(t_i,t_j)$$

进而可以得到：

$$E[N(0)]=\frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}E[\ln\frac{S_i}{S_j}]^2=\frac{(n^2-1)\Delta t}{12}[\frac{1}{2}(m-\frac{s^2}{2})^2\Delta t+\frac{s^2}{n}] \qquad (12)$$

$$Var[N(0)]=\frac{1}{4}[\frac{(3n^2-2)(n^2-1)}{15n^3}(m-\frac{s^2}{2})^2s^2\Delta t^3+\frac{n^2-1}{6n^2}s^4\Delta t^2] \qquad (13)$$

$$E[N'(0)]=\frac{2}{3n^3}[\sum_{i=1}^{n}E\ln^3 S_i+3\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}E\ln^2 S_i\ln S_j+3\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}E\ln^2 S_i\ln S_j$$

$$+6\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}E\ln S_i\ln S_j\ln S_k]+\frac{1}{3n}[\sum_{i=1}^{n}E\ln^3 S_i]$$

$$-\frac{1}{n^2}[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}E\ln S_i\ln^2 S_j+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}E\ln S_i\ln^2 S_j+\sum_{i=1}^{n}E\ln^3 S_i]$$

$$=0$$

将 $E[N(0)],E[N^2(0)],E[N'(0)]$ **代入** $L=E[1+N(0)+\frac{1}{2}N^2(0)+\frac{1}{2}N'(0)]$**，得**：

$$L=1+\frac{(n^2-1)\Delta t}{12}[\frac{1}{2}(m-\frac{s^2}{2})^2\Delta t+\frac{s^n}{n}]+\frac{1}{8}[\frac{(3n^2-2)(n^2-1)}{15n^3}(m-\frac{s^2}{2})^2s^2\Delta t^3+\frac{n^2-1}{6n^2}s^4\Delta t^2]$$

$$+\frac{1}{2}\{\frac{(n^2-1)\Delta t}{12}[\frac{1}{2}(m-\frac{s^2}{2})^2\Delta t+\frac{s^2}{n}]\}^2$$

在上式中$,n,\Delta t,m,s$ **为确定的常数，进一步可以均证明**

$Var[1+N(0)+\frac{1}{2}N^2(0)+\frac{1}{2}N'(0)]\to 0($ **当** $n\to\infty)$ **证明过程如下：**

由 $schwarz$ 不等式易得：

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov[X_i, X_j] \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}(VarX_i + VarX_j) = n\sum_{i=1}^{n} VarX_i$$

故，

$$Var[1+N(0)+\frac{1}{2}N^2(0)+\frac{1}{2}N'(0)] \le 3[VarN(0)+\frac{1}{4}VarN^2(0)+\frac{1}{2}VarN'(0)]$$

在 (13) 中，$\Delta t = \frac{T-t_0}{n}$,为亚式期权的生命期,是固定的时间长度，故当 $n \to \infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} VarN(0) = 0$$

由（12）（14）我们可以得到，

$$\lim_{n\to\infty} VarN^2(0) = \lim_{n\to\infty}\{EN^4(0) - [EN^2(0)]^2\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\{E[N(0)-EN(0)+EN(0)]^4 - [EN^2(0)]^2\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\{3[VarN(0)]^2 + 6VarN(0)[EN(0)]^2 + E[EN(0)]^4 - [EN^2(0)]^2\}$$

$$= \{\frac{T-t_0}{12}[(m-\frac{s^2}{2})\frac{T-t_0}{2}] + s^2\}^4 - \{\frac{T-t_0}{12}[(m-\frac{s^2}{2})\frac{T-t_0}{2}] + s^2\}^4$$

$$= 0$$

由（3）（14）同理可推导：

$$VarN'(0) \le 2Var[\frac{(\sum_{i=1}^{n}\ln S_i)^3}{n^3}] + Var[\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln^3 S_i}{n}] + 3Var[\frac{(\sum_{i=1}^{n}\ln S_i)^3\sum_{i=1}^{n}\ln S_i}{n}]$$

$$\to 0$$

终上所述，我们可以得到标的算术平均与标的几何平均的近似关系式：

$$M(1) = M(0)L$$

其中 L 是一常数，$M(1)$ 和 $M(0)$ 是随机变量。

4. 标的算术平均亚式期权定价公式

由近似关系式(15),我们可以对标的算术平均的亚式期权进行近似的定价，用 $M(0)L$ 作为 $M(1)$ 的近似，$M(0)$ 遵循对数正态分布，L 为常数，因此可以推导标的算术平均欧式看涨期权定价公式：

$$C_{AM}(S_t, K, t) = e^{-rt}E[M(1)-K]^+ \approx e^{-rt}E[LM(0)-K]^+$$

$$= e^{-rt}[LS_t e^{m_M t}N(\overline{d}_1) - KN(\overline{d}_2)]$$

$$\overline{d}_1 = \frac{\ln\frac{LS_t}{K} + (m_M + \frac{s_M^2}{2})t}{s_M\sqrt{t}}, \overline{d}_2 = \overline{d}_1 - s_M\sqrt{t}$$

类似的推导，可得标的算术平均欧式看跌期权定价公式为：

$$P_{AM}(S_t, K, t) = e^{-rt}E[K-M(1)]^+ \approx e^{-rt}E[K-LM(0)]^+$$

$$= e^{-rt}[KN(-\overline{d}_2) - LS_t e^{m_M t}N(-\overline{d}_1)]$$

其中，$\overline{d}_1$，$\overline{d}_2$ 定义同上。

5. 讨论

在OTC市场上，对于观察取样次数n比较大而观察间隔Δt比较小的算术平均亚式平均期权，如1个月期每天取样或3个月期隔天取样的亚式期权，均可以上述定价公式来进行近似定价。本文只讨论$t < t_0$的情况，对于$t \ge t_0$的情况可作类似的分析

The approximate analytic price formulas of Asian option with discrete arithemetic averaging

JianQiang Sun and ShiYin Li

Department of Mathematics,Xiamen University,Fujian Xiamen 361005,China

Abstract ：In this papers,we analyze the distance between the geometric average and arithmetic average by Taylor's expanding. Using their relationship,a approximating formula of the arithmetic asian option was derived.

key words: Asian option, option