有关随机贴现因子的一些思考

林海

（厦门大学金融系，３６１００５）

前言

Cochrane(1996,2000)提出了一个随机贴现因子的理论框架，这个理论框架可以用于解释一般的资产定价问题。这个理论框架最显著的一个特征就是可以将所有的资产定价模型，如资本资产定价模型（b 模型）、因素模型等，纳入到这个一般化的理论框架中。Kan and Zhou(1999)利用模拟的方法对此提出了质疑。他们得出结论认为传统的定价模型的数据估计结果，特别是在风险价格的估计上，要比随机贴现模型稳定和准确得多，而且随机贴现模型在识别错误模型上的能力也是有限的。本文则在这基础上，力求寻找出产生这个问题的原因。经过分析可以发现，这实际上是在检验不同的模型，传统的检验模型实际上在检验因素模型，而随机贴现因子实际上检验的是 b 模型。由于模拟的数据是根据因素模型进行模拟的，当然不可避免地得出传统检验方法的估计结果优于随机贴现因子的结论。因此，二者之间的差异不在于随机贴现因子的方法本身，而在于没有找到一个正确地用于表示因素模型的随机贴现因子。

由于随机贴现因子解决的是 b 模型，在 b 模型中，非系统性的测量误差以及噪音都不会对预期风险溢酬产生影响，Kan and Zhou(1999)对在随机贴现因子下的这个结论提出了质疑。但是笔者经过分析，认为，这个结论即使使用随机贴现因子的方法，仍然成立。Kan and Zhou(1999)之所以得出错误的结论，主要原因在于他们只考虑了因素变动对风险价格的影响，而没有考虑因素变动对因素相关系数的影响。二者实际上是互相抵消的，因此最后的预期风险溢酬保持不变。

文章的第三个问题要探讨的就是定价错误问题。当随机贴现因子位于因素空间之内时，也就是说，可以用因素来进行表示时，定价错误为零。但是如果随机贴现因子不在因素空间之内，定价错误就可能存在。随机贴现因子离开因素空间越远，定价错误就越大。这可以解释为什么基于消费的资本资产定价模型不能够得到很好的效果的主要原因。在这个资产定价模型中，随机贴现因子和消费的边际效用有关 $M_{t+1} = b\frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}$，一般不在因素空间之内，所以就会存在着定价错误。

相应的，本文也分为三个部分：第一个部分就是对 b 模型和因素模型进行严格的比较和区分，并在此基础上正式随机贴现因子检验的实际上是 b 模型；第二部分就是要对 b 模型下综合考虑因素相关系数和风险价格基础上对风险溢酬问题进行分析；第三部分则是对定

价错误的一些简单讨论。为了说明的方便，本文全部使用单个影响因子，即市场收益率r_m。

一、b模型、因素模型和随机贴现因子

（一） b 模型和因素模型

一个最典型的 b 模型就是资本资产定价模型:

$$E(r_j) = r_f + b_j [E(r_m) - r_f],$$

$$b_j = \frac{\mathrm{cov}(r_j, r_m)}{\mathrm{var}(r_m)}$$

一个单因素模型表示为：$r_j = E(r_j) + b_j f + e_j$，$f$ 是经过处理的因子，$f = r_m - E(r_m)$。

假设k_q为定价核，即 $p_j = E(k_q x_j)$，

$$k_q r_j = k_q E(r_j) + b_j f k_q + k_q e_j，\quad E(k_q r_j) = \frac{E(k_q x_j)}{p_j} = 1，$$

$$1 = E(k_q) E(r_j) + b_j E(k_q f) + E(k_q e_j)，$$

$$E(r_j) = \frac{1}{E(k_q)} + b_j(-\frac{E(k_q f)}{E(k_q)}) - \frac{E(k_q e_j)}{E(k_q)}，$$

如果无风险收益率位于资产空间内， $E(k_q) = 1/r_f$,

$E(r_j) = r_f - b_j r_f p(f)$, $p(f)$ 表示因素 f 的价格。

$$b_j = \frac{\mathrm{cov}(r_j, f)}{\mathrm{var}(f)} = \frac{\mathrm{cov}(r_j, r_m)}{\mathrm{var}(r_m)}，$$ 等于 b 模型。

$$q(f) = E(k_q(r_m - E(r_m)) = 1 - \frac{E(r_m)}{r_f}，$$

$$E(r_j) = r_f + b(E(r_m) - r_f)$$

$$r_j = E(r_j) + b f + e_j = r_f + b(E(r_m) - r_f) + b f + e_j,$$

$r_j - r_f = b(E(r_m) - r_f) + b f + e_j$， 风险价格为 $l = E(r_m) - r_f$, 也等于b 模型下的风险价格。

所以，在 b 模型下，$r_j = r_f + b_j(E(r_m) - r_f) + h_j$

在因素模型下， $r_j = r_f + b_j(E(r_m) - r_f) + b_j f + e_j$。如果用超额收益率 $\overline{r_j} = r_j - r_f$ （即

超过无风险利率的部分）和风险价格 a 表示，则可以表示为：

b 模型：$\overline{r}_j = b_j a + h_j$，$b_j = \frac{\mathrm{cov}(r_j, f)}{\mathrm{var}(f)}$。

因素模型：$\overline{r}_j = b_j a + b_j f + e_j$。

对影响因子可以进行标准化，使得影响因子的方差变为1，即可以设 $f' = \frac{f}{s(f)}$，此时在 b 模型中，$b_j^{'} = \mathrm{cov}(r_j, f') = E(r_j f')$，因为 $E(f') = 0$[1]。所以经过标准化处理之后：

b 模型：$\overline{r}_j = b_j^{'} a' + h_j$，$b_j^{'} = E(r_j f')$。

因素模型：$\overline{r}_j = b_j^{'} a' + b_j^{'} f' + e_j$。

（二）计量分析

上面的分析都是横截面分析，在实际计量分析的时候要扩展到时间序列分析。由于两个模型的不同，因此，使用的时间序列 GMM 计量模型也不一样。

对 b 模型而言，GMM 方法为：计算矩 $g_{1T} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(\overline{r}_t - \overline{r}_t f_t l)}{T}$，$\sqrt{T}\, g_{1T} \sim N(0_N, S_1)$。

通过最小化 $\mathrm{argmin}_l\ g_T(l)' W_{1T} g_T(l)$ 求出 $\hat{l}$，此时 $\hat{l} = (D_T' W_{1T} D_T)^{-1}(D_T' W_{1T} \overline{r}_T)$[2]。其中，

$D_T = \frac{\sum_{t=1}^{T}\overline{r}_t f_t}{T}$，$\overline{r}_T = \frac{\sum_{t=1}^{T}\overline{r}_t}{T}$，$W_{1T}$ 是 S_1^{-1} 的有效估计。

而对因素模型而言，它的 GMM 方法为：

$$\begin{aligned} E(e_t) &= E(\overline{r}_t - b\,l - b\,f_t) = 0; \\ E(e_t f_t) &= E[(\overline{r}_t - b\,l - b\,f_t) f_t] = 0 \end{aligned}$$

。它的矩条件为

$$g_{2T}(l, b) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[z_t \otimes (r_t - b\,l - b\,f_t)],\quad \sqrt{T}\, g_{2T}(l, b) \sim (0_{2N}, S_2), z_t = [1, f_t]$$

所以参数 l, b 通过 $\mathrm{argmin}_{l,b}\ g_{2T}(l, b)' W_{2T} g_{2T}(l, b)$。

所以，在 b 模型中，GMM 方法只有一个估计参数，那就是风险价格，而风险系数直接通过

---

[1] 可以发现，此时 $b_j^{'} = \frac{b_j}{s(f)}$，所以 $a' = a\,s(f)$，影响因子的变动同时影响风险价格和风险系数。

[2] 式子中的 $\overline{r}_t$ 是一个 $N \times 1$ 向量，代表时刻 t 市场上 N 个资产的超额收益率。

$E(r_t f_t) = 1/T\sum_{t=1}^{T} r_t f_t$ 进行估计。而在因素模型中，GMM 方法同时对风险系数和风险价格同时进行估计，使得最后的误差最小。因此，收益率时间序列，b 模型将所有的误差都体现在风险价格中，使得风险价格变得相对不稳定；而因素模型则将误差同时分给风险系数和风险价格，因此风险价格就显得相对比较稳定。总的来说，因素模型是联合求解，而 b 模型则是单独求解。

（三）随机贴现因子

在随机贴现因子模型中，Cochrane(2000)等认为，如果单因素模型成立，则存在一个随机贴现因子 M_t 使得 $E(\overline{r}_t M_t) = 0$，$M_t = d_0 - d_1 f_t$[3]，则

$E(\overline{r}_t M_t) = E[r_t(d_0 - d_1 f_t)] = 0,\quad E[\overline{r}_t(1 - l\, f_t)] = 0,\ l = d_1/d_0$，

$E(\overline{r}_t) = E(\overline{r}_t f_t l) = E(\overline{r}_t f_t) l$ ，等于经过标准化处理之后的 b 模型。

所以，如果这有这个随机贴现因子的条件，则它检验的是 b 模型，而不是因素模型。如果要检验因素模型，则需要另外的条件。

因此，在 Kan and Zhou(1999)中，所使用的模拟数据来源于因素模型，所以用随机贴现模型，无法进行一个有效的检验，相应的风险价格也很不稳定。

二、b 模型和风险溢酬

Kan and Zhou（1999）认为，使用随机贴现因子可能无法准确判别真正的风险因素，因为可能同时存在着几个变量满足随机贴现因子等式。假设真实的经过标准化处理的风险因素为 f_t，则 $E[\overline{r}_t(1 - l\, f_t)] = 0$。但是存在两种情况也能满足随机贴现因子等式：

1、$g_t = \dfrac{f_t + n_t}{\sqrt{1 + s_n^2}},\ l_g = l\sqrt{1 + s_n^2}$ ；n_t 是一个纯粹的测量误差；

2、$h = \dfrac{b'\sum^{-1} e_t}{\sqrt{b'\sum^{-1} b}}$，$l_h = l\sqrt{b'\sum^{-1} b}$ 。

而 g_t, h_t 都不是真正的风险因素。因此，利用随机贴现因子无法找到真正的风险价格。但是，我们真正关心的不是风险价格本身，而是风险溢酬，即风险价格和风险系数的乘积。风险因子的变动不仅会影响风险价格，也会影响风险系数；我们要分析随机贴现因子对 b 模型的检验能力，就必须综合分析风险因素变动对风险价格和风险系数的影响。

---

[3] 实际上，由此可知 $d_0 = 1/r_f$，因为 $E(M_t) = d_0 = 1/r_f$

情况 1：如果使用新的风险因素 $g_t=\frac{f_t+n_t}{\sqrt{1+s_n^2}}, l_g=l\sqrt{1+s_n^2}$，则此时，

$\hat{b}_g=\text{cov}(\overline{r}_t,\frac{f_t+n_t}{\sqrt{1+s_n^2}})=\frac{\text{cov}(\overline{r}_t,f_t+n_t)}{\sqrt{1+s_n^2}}=\frac{b}{\sqrt{1+s_n^2}}$，因为 $\text{cov}(\overline{r}_t,n_t)=0$。此时的风险溢酬为：

$\hat{b}_g l_g=b\,l$，仍然等于真实因素下的风险溢酬，所以加入一个测量误差并不会对风险溢酬的估计产生影响。

情况 2：如果使用新的风险因素 $h=\frac{b'\sum^{-1}e_t}{\sqrt{b'\sum^{-1}b}}$， $l_h=l\sqrt{b'\sum^{-1}b}$，此时，

$\hat{b}=\text{cov}(\overline{r}_t,\frac{b'\sum^{-1}e_t}{\sqrt{b'\sum^{-1}b}})=\frac{b}{\sqrt{b'\sum^{-1}b}}$，风险溢酬为：

$\widehat{b_h}\, l_h=b\,l$，也仍然等于真实因素下的风险溢酬。

所以无论在何种条件下，影响因素的非系统性改变会改变相应的风险价格和风险系数，但是不会改变对风险溢酬的估计。非系统性改变实际上是在不改变风险溢酬的条件下对风险溢酬的两个组成部分，即风险价格和风险系数进行重新分配。此时，真正的因素仍然是 f_t，对它的非系统性改变不会对结论产生影响。这也就验证了，在 b 模型下，非系统性的风险因素不会对风险溢酬产生影响。

三、定价错误和定价核[4]

根据上面对 b 模型的分析，定价错误

$$j_j=E(r_j)-r_f-b\,(E(r_m)-r_f)=-\frac{E(k_q e_j)}{E(k_q)}=-r_f q(e_j)$$

将定价核 k_q 映射到因素空间 F, $k_q=k_q^F+h, k_q^F\in F, h\perp F$。则

$$E(k_q e_j)=E(he_j),$$
$$|E(he_j)|\leq\|h\|\|e_j\|,$$

$|j_j|\leq r_f s_{e_j}\|k_q-k_q^F\|$, $\|k_q-k_q^F\|$ 衡量定价核和因素空间之间的距离。所以如果 k_q 接近于因素空间，定价错误就很小。如果它在因素空间内，定价错误为 0。但是如果这个定价核远离因素空间，定价错误就可能比较大。

利用这个原理，我们就可以分析不同定价模型的定价问题：

[4] 参见 Leroy and Werner(2000)。

CAPM：是 b 模型的典型，定价核位于因素空间内，因此，定价错误为 0。所以此时 $a = b l$ [5]。所以，在 CAPM 中，如果出现误差或者错误，是由 CAPM 模型本身引起，此时的定价核不会带来误差。

基于消费的 CAPM：定价核为 $d \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}$，现实估计时一般使用一些状态变量，比如财富等，作为因素空间，因此定价核可能不位于因素空间内，此时就可能存在着比较大的定价错误。此时，$a = b l + j$ 。所以，此时的估计误差就有可能来自于两个方面：一个是模型本身，另一个就是由于定价核引起。因此即使这个模型的估计效果差，可能这个原因来自于定价核不在因素空间内，而不是模型本身的问题。所以，不能因为基于消费的 CAPM 模型估计效果差就简单的拒绝这个模型。

参考文献：

Cochrane, J. H., 1996, “A Cross Sectional Test of an Investment-based Asset Pricing Models”, Journal of Political Economy 104, 574-621.

Cochrane, J. H., 2000, *Asset Pricing*, Princeton University Press.

Kan, R. and G. Zhou, 1999, “A Critique of the Stochastic Discount Factor Methodology”, Journal of Finance, vol. LIV, 1221-1248.

Leroy, S.F., and J. Werner, 2000, *Principles of Financial Economics*, Cambridge University Press.

5