资本资产定价模型（Capital Asset Pricing Model）

摘要：本文目的是对目前资本资产定价模型的研究状况进行一个详细的评述，内容分以下几个部分：第一部分是概述，介绍 CAPM 的基本理论框架；第二部分则对国内外相关文献进行一个比较详细的评述。

一、 概述

资本资产定价模型是一种纯交换经济中的实证性均衡定价模型，核心思想是在一个竞争均衡中对有价证券定价。其最早是由夏普（ William Sharpe）、林特尔（John Lintner）、特里诺（Jack Treynor）和莫森（Jan Mossin）等人在资产组合理论的基础上提出的，被认为是金融市场现代价格理论的支柱，广泛应用于投资决策和公司理财领域。

（一）基本原理

1、有效集（Efficient Set）

当风险水平（标准差）相同时，理性投资者将选择具有较高收益率的投资组合；当预期收益率相同时，他们将选择风险水平（标准差）较小的投资组合。同时满足这两个条件的投资组合的集合就是有效集。

2、分离定理

投资者对风险和收益的偏好状况与该投资者风险资产组合的最优构成是无关的。最优风险资产组合即为使夏普比率（Sharpe ratio）最大的投资组合。

3、投资分散化定理（Investment Diversification）

在均衡状态下，每种证券在均衡点处投资组合中都有一个非零的比例。

4、共同基金定理（Mutual Fund Theorem）

投资者的最优风险性资产组合（切点处投资组合）即为市场组合，其中各证券的构成比例等于该证券的相对市值。

5、风险－报酬均衡定理（Risk－Return Tradeoff Theorem）

给定上述假设，在均衡的资产市场中，有

$$E\left(R\left(x_j\right)\right)=R\left(x_0\right)+\frac{Cov\left(R(m),R\left(x_j\right)\right)}{Var\left(R(m)\right)}\left(E\left(R(m)\right)-R\left(x_0\right)\right)$$

，其中 m 为最优风险资产组合。

（二）基本假定

1、 均值－方差有效性假设（Mean－Variance Efficient Assumption）。投资者通过投资组合在单一投资期内的预期收益率和标准差来评价不同的投资组合。若对于某一收益率水平，存在一风险资产组合的标准差小于其他任一风险资产组合的标准差，则其为 均值－方差有效性组合。

2、无分割市场假设（Frictionless Markets Assumption）。资产市场中无交易成本、无税金，对抛空没有限制，交易资产是完全可分的。

3、无风险资产假设（Riskless Asset Assumption）。所有的投资者均可按相同的无风险利率借入或贷出资金。

4、齐次预期假设（ Homogeneous Beliefs Assumption）。投资者对于各种资产的收益率、标准差、协方差都具有相同的预期。

5、对于所有的投资者，投资期限均相同，所有的信息都是免费并且是立即可取的。

（三）标准的资本资产定价模型（Sharpe and Lintner）

$$E\left[R_i\right]=R_f+b_{im}\left(E\left[R_m\right]-R_f\right)$$

（1）

$$b_{im} = \frac{Cov[R_i, R_m]}{Var[R_m]}$$

或 $E[Z_i] = b_{im} E[Z_m]$

（2）

$$b_{im} = \frac{Cov[Z_i, Z_m]}{Var[Z_m]}$$

（四）参数估计与统计检验

对无限制模型（the unconstrained model）**，即超额收益率模型**（the excess－return market model）**运用最大似然估计法**（the maximum likelihood estimate method）**进行估计**

1、标准的线性回归方程 $Z_t = \alpha + \beta Z_{mt} + \varepsilon_t$

$E[\varepsilon_t]=0$ $E[\varepsilon_t \varepsilon_t']=\Sigma$

$E[Z_{mt}]=\mu_m$ $E[(Z_{mt}-\mu_m)^2]=\sigma_m^2$ $Cov[Z_{mt}, \varepsilon_t]=0$

参数估计 $\hat{a} = \hat{m} - \hat{b}\hat{m}_m$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(Z_t - \hat{m})(Z_{mt} - \hat{m}_m)}{\sum_{t=1}^{T}(Z_{mt} - \hat{m}_m)^2}$$

2、统计检验：

（1）Wald 检验

H0 ： $\alpha = 0$

H1 ： $\alpha \neq 0$

$$J_0 = T\left[1 + \frac{\hat{m}_m^2}{\hat{s}_m^2}\right]^{-1} \hat{a}'\Sigma^{-1}\hat{a} \quad \sim \chi^2 \text{（n）}$$

若对于有限样本

$$J_1 = \frac{(T-N-1)}{T}\left[1 + \frac{\hat{m}_m^2}{\hat{s}_m^2}\right]^{-1} \hat{a}'\hat{\Sigma}^{-1}\hat{a} \quad \sim F\text{（N，T－N－1）}$$

（2）the likelihood ratio test（for the constrained model, α constrained to 0）

$$\hat{b}^* = \frac{\sum_{t=1}^{T} Z_t Z_{mt}}{\sum_{t=1}^{T} Z_{mt}^2}$$

$$\hat{\Sigma}^* = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(Z_t - \hat{b}^* Z_{mt})(Z_t - \hat{b}^* Z_{mt})'$$

$$J_2 = T\left[\log\left|\hat{\Sigma}^*\right| - \log\left|\hat{\Sigma}\right|\right] \quad \sim \quad \chi^2 \text{（n）}$$

注：由于 J_1 可以表示为 J_2 的单调函数，所以 J_1 也可以看成是 likelihood ratio test。

$$J_1 = \frac{T-N-1}{N}\left(\exp\left[\frac{J_2}{T}\right]-1\right)$$

在有限样本条件下

$$J_3 = (T - N/2 - 2)\left[\log\left|\hat{\Sigma}^*\right| - \log\left|\hat{\Sigma}\right|\right] \quad \sim \chi^2 \text{（n）}$$

（3）样本规模对统计检验的影响

在大多数场合，我们经常不能获得有限样本下参数的解析解，而只能依赖于大样本取得参数的渐进解，此时，样本规模究竟多大才合适是一个值得认真考虑的问题。

我们可以通过 J_1，利用以下关系式为不同的渐进测试计算所需的样本规模。

$$J_1 = \frac{T-N-1}{NT}J_0$$

$$J_1 = \frac{T-N-1}{N}\left(\exp\left[\frac{J_2}{T}\right]-1\right)$$

$$J_1 = \frac{T-N-1}{N}\left(\exp\left[\frac{J_3}{T-N/2-2}\right]-1\right)$$

N 为组合中资产数量，T 为时间段

（4）power of tests（ 原假设被拒绝的可能性）

①N 固定，power 随着 T 的增大而增大

②T 固定，power 随着 N 的减少而增大

N 的取值决定于 the rate at which the sharpe ratio of tangency portfolio declines as assets are grouped together.

N 的取值一般不超过 10。

二、文献回顾

（一）CAPM 模型的扩展

1、早期对 CAPM 的扩展——放宽模型中的假设

（1）不存在无风险资产

Black（1972）认为任何资产的预期报酬都是由两种资产预期报酬组成，即市场资产组合与唯一最小方差且β为零的资产组合，后者与市场组合的相关系数为零。

$$E[R_i] = E[R_{0m}] + \beta_{im}（E[R_m] - E[R_{0m}]）$$

可见，如果将β为零的资产组合预期报酬看作无风险资产报酬，那么上式就是标准的 CAPM，这说明在不存在纯粹无风险资产的情况下，资本资产定价模型依然成立。这一模型通常称为双因素模型（two－factor model）。

S.A.Ross（1977）指出，该模型有一个很重要的假设，即没有卖空（short sales）限制，如果存在卖空限制，那么将无法获得β为零的资产组合。

这意味着 CAPM 只在两种情况下成立：第一、不允许卖空，但存在无风险性资产；第二、不存在无风险资产，但是允许卖空。

（2）所得税因素

M.J.Brennen（1970）就税率差异对资本利得和股息的影响进行了实证分析，在β系

数的基础上建立了一个包括附加项的扩展的 CAPM：

E（R_j）= $r_1R_f + r_2\beta_i + r_3DY_i$

式中 DY_i 第 I 项资产的股息收益，附加项 r_3DY_i 表示资产预期报酬对股息收益和系统风险的影响程度。

M.J.Brennen 的模型认为，高报酬的资产要求有较高的股息收益，换而言之，投资者大多数不偏好股息而偏好资本利得，因为股息收益必须支付所得税。

（3）存在非上市资产

D.Mayers（1972）认为，当投资者被迫持有非上市资产（如人力资产），并且其风险报酬为 R_H 时，CAPM 可以表述为：

E（R_j）= R_f + λ[V_mCov（R_j, R_m）+Cov（R_j ,R_H）]

$$l = \frac{E(R_m) - R_f}{V_m s_m^2 + Cov(R_m, R_H)}$$

V_m 表示所有上市资产的现行的市场价值

R_H 表示所有非上市资产的报酬额

λ表示单位风险的资产价格，这里的风险不仅包括市场方差 s_m^2，而且包括可上市资产报酬与非上市资产报酬总额的协方差。

D.Mayers 的模型有三个重要的含义：

第一、投资者会持有由不同的风险性资产构成的资产组合，因为他们的人力资产具有不同的风险。

第二、风险性资产的市场均衡价格仍然与投资者的无差异曲线无关，分离定理依然成立。

第三、计量资产风险的最适当方法仍然是协方差，该模型考虑了第 I 种资产与两种资产组合的协方差，一种由可上市资产组成，另一种由非上市资产组成。

（4）价格水平变动

Hagerman , Kim（1976）

价格水平发生变化，会使名义无风险资产在现实世界中具有风险，因而该文的目的即推导出允许价格水平发生变动的 CAPM，并指出其在实证中的困难。

投资者的名义总财富：

$w_i^N = \sum_j S_{ij} R_j^N + B_i R_f^N$　　R_j^N 为风险资产的收益率，R_f^N 为无风险资产的收益率

Sij 与 Bi 分别为权重

考虑价格水平调整因子 $\overline{a}$

$\overline{w}_i = \overline{a} w_i^N = \sum_j S_{ij} \overline{R}_j + B_i \overline{R}_f$　　$\overline{R}_j = \overline{a} R_j^N$

投资者效用最大化的拉各朗日函数：

$$\max_{(S_{ij}, B_i)} E[u(\overline{w}_i)] + L_i\left(1 - \sum_j S_{ij} - B_i\right)$$

求一阶导：

$$E[u_i' * (\overline{R}_j)] - L_i = 0$$

$$E[u_i' * (\overline{R}_f)] - L_i = 0$$

所以 $E\left[u_i'*\left(\overline{R}_j\right)\right]-E\left[u_i'*\left(\overline{R}_f\right)\right]=\operatorname{cov}\left[u_i',\left(\overline{R}_j-\overline{R}_f\right)\right]+E\left(u_i'\right)\left[E\left(\overline{R}_j\right)-E\left(\overline{R}_f\right)\right]=0$

假设投资者的效用函数为二次效用函数：

$$u_i\left(\overline{w}_i\right)=\overline{w}_i-a_i\overline{w}_i^2$$

对效用函数求导，并代入上式得

$$E\left(\overline{R}_j\right)=E\left(\overline{R}_f\right)+\frac{\sum_j S_j}{\sum_i \frac{E\left(u_i'\right)}{2a_i}}\operatorname{cov}\left[\overline{R}_m,\left(\overline{R}_j-\overline{R}_f\right)\right] \qquad \sum_i B_i=0$$

$$\overline{R}_m=\frac{\sum_j\sum_i S_{ij}\overline{R}_j}{\sum_j\sum_i S_{ij}}$$

由于上式对于市场组合必须成立，所以

$$l=\frac{\sum_j S_j}{\sum_i \frac{E\left(u_i'\right)}{2a_i}}=\frac{E\left(\overline{R}_m\right)-E\left(\overline{R}_f\right)}{\operatorname{cov}\left[\overline{R}_m,\left(\overline{R}_m-\overline{R}_f\right)\right]}$$

所以，

$$E\left(\overline{R}_j\right)=E\left(\overline{R}_f\right)+\frac{\operatorname{cov}\left[\overline{R}_m,\left(\overline{R}_j-\overline{R}_f\right)\right]}{\operatorname{cov}\left[\overline{R}_m,\left(\overline{R}_m-\overline{R}_f\right)\right]}\left[E\left(\overline{R}_m\right)-E\left(\overline{R}_f\right)\right]$$

将上式与 SLB 模型对比，可见其区别在于风险度量的不同，这是由于我们允许真实的无风险利率发生随机波动，当无风险利率为常数时，该模型就是 SLB。

$$E\left(\overline{R}_j\right)=R_f+\frac{\operatorname{cov}\left[\overline{R}_m,\overline{R}_j\right]}{\operatorname{var}\left[\overline{R}_m\right]}\left[E\left(\overline{R}_m\right)-R_f\right]$$

此外，当真实市场收益率与价格变动无关时，该式也与 SLB 一致。$\operatorname{cov}\left(\overline{R}_m,\overline{R}_f\right)=R_f^N\operatorname{cov}\left(\overline{R}_m,\overline{a}\right)=0$。这意味着除非价格波动会对市场组合收益率造成影响，否则其不会对单个证券的收益率产生影响。

由于该模型是用实际收益率表示的，但只能用名义收益率进行检验。用名义收益率替代上述实际收益率 $\overline{R}_j=\overline{a}R_j^N$，可知由于该等式包括了多个随机变量，所以很难进行实证检验。这从另一方面也说明了实证检验与实际预测的差异。

问题：

1、投资者效用函数为二次函数的假定并不准确。

2、假设名义无风险利率独立于模型之外、不受价格水平波动影响且相对价格水平不发生变动的假定不太现实。

2、多期间资本资产定价模型（the intertemporal CAPM 或 the multiperiod CAPM）

单一期间资本资产定价模型在有价证券价格评估上并不具有可检测性，特别是在公司债券和普通权益的认购期权上。由于西方经济学家一致认为对单一期间定价模型进一步讨论是缺乏研究效率的，这就引发了对多期间资本资产定价模型的讨论。

（1） R.C.Merton（1973）认为，资产组合实际上由三种资产组成（无风险资产、市场组合、资产 K)，在暂时均衡的资产市场中，存在多项β系数形式的 CAPM：

$$a_j(t,x_K(t))-a_0(t,x_K(t))=b_{jm}\left(\sum_{j=1}^{k}mkt_j a_j(t,x_K(t))-a_0(t,x_K(t))\right)+b_{jK}(a_K(t,x_K(t))-a_0(t,x_K(t)))$$

其中 $b_{jk}=\dfrac{s_{Km}s_{jm}-s_{jk}s_{mm}}{s_{km}^2-s_{kk}s_{mm}}$

$$b_{jm}=\frac{s_{km}s_{jm}-s_{jm}s_{kk}}{s_{km}^2-s_{kk}s_{mm}}$$

$$s_{km}=\sum_{j=1}^{K}mkt_j s_{kj}$$

$$s_{mm}=\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}mkt_j mkt_k s_{jk}$$

mkt_j 表示资产 j 在市场组合中的比重。

该模型表明，资产 j 的预期瞬时超额报酬（a_j-a_0）等于市场β系数（β_{jm}）乘上市场组合的预期超额报酬$\left(\sum_{j=1}^{k}mkt_j a_j-a_0\right)$，加上资产 j 与资产 K 的β系数（$\beta_{jK}$）乘上资产 K 的预期超额报酬（$a_k-a_0$)。两个β系数意味着资产的风险有两个构成要素，一个随着市场资产组合波动所形成的风险，用β_{jm}表示；另一个随着状态变量 x_K 波动所形成的风险，由β_{jK}表示。

从模型中可以看出，如果消除了状态变量 x_K 之后，我们可以得到单一期间资本资产定价模型的瞬间形式。这表明单一期间资本资产定价模型只是多期间资本资产定价模型的严格形式。

评论：必须通过动态规划求解，由于可能需要引入较多的状态变量，所以实证操作有很大困难。

（2） Jorrow and Rosenfeld（1984）指出证券价格经常会出现 jump，从而导致价格变化不连续。他们对 Merton 的模型进行了扩展，指出了 jump 存在的情况下多期间资产定价模型成立的充分条件是 jump 在市场组合中是可以分散的。

$$\frac{dS_j}{S_j}=a_j dt+f_j dy+g_j dh_j+\left(-lK_j dt+p_j dY_j\right)，\quad j=1,\ldots..,n,$$

S_j（t）表示资产 j 在 t 时刻的价格

α_j，f_j，g_j，λ_j，K_j 均是常数

$d\psi$，$d\eta_j$ 是维纳过程

dY_j 是泊松过程

π_j 是跳跃幅度

文章同时对 jump 是否是可分散的进行了实证分析。

实证模型：

$$\frac{dM}{M}=\sum_{j=1}^{n}m_j a_j dt+\left(\sum_{j=1}^{n}m_j f_j\right)dy+\sum_{j=1}^{n}m_j\left(g_j dh_j-l_j K_j dt+p_j dY_j\right)$$

其中，市场组合 M＝$\sum_{j=1}^{n}m_j S_j$

H0**：跳跃风险是可分散的，**$\frac{dM}{M}=adt+sdy$

H1**：跳跃风险是不可分散的，**$\frac{dM}{M}=a'dt+sdy+dq$

实证结果显示：当采用周数据与月数据时，“跳跃”风险是可分散的；但是若采用日数据，则不可分散，但程度不大。这有可能是因为由于周数据与月数据包括了周末与假期，从而掩盖了“跳跃”。

实证结果认为连续时间的 CAPM **不成立。**

（3）Chamberlain（1988）**运用鞅过程**（martingale representation and martingale projection）**推导了一个多期间资本资产定价模型。其通过分析证券收益率的因素结构，假设存在一个随机过程将标量布朗运动**（scalar Brownian motion）**作为总消费的充足统计量**（sufficient statistic）**，从而使市场组合能被多个高度分散化的组合所替代。**

$$dZ_{kt}=b_{kt}a_t^{-1}dW_t+dV_{kt}$$

W_t **是市场组合在** t **时刻的价值**

Z_{kt} **是证券** k **在** t **时刻的价格**

V_{kt} **是一个鞅过程**

（4）Kazemi（1991）

Constantinides（1980，1982）**在假定市场组合收益率、无风险利率、贝塔、风险的市场价格皆可变的情况下推导出多期的** CAPM **用于多期的项目评估，但是在实际应用中，由于其计算量过大，实用价值很小。该文在假设该项目在未来获得唯一的支付并且可以用单个贝塔表示整个项目全部现金流的风险的情况下，证明可以对多期项目进行评价。**

该文通过项目在 s **期支付的现金流** Ds **与该期的边际效用函数的协方差衡量** Ds **的风险，然后将该现金流投资于在** T **期到期的资产** D_T，D_T**的风险用其与** T **期边际效用函数的协方差衡量。**

项目的价值：

$$P_t=R(t,T)^{-1}\left\{E\left[V(t,T)\middle|f_t\right]^{-1}+E\left[U'(C_T)\middle|f_t\right]^{-1}\operatorname{cov}\left[V(t,T),U'(C_T)\middle|f_t\right]\right\}$$

$V(t,T)=\sum_{s=t+1}^{T}R(s,T)D_s$ **是整个项目全部现金流的复合未来价值。**

$R(t,T)^{-1}$ **是无风险贴现债券的市场价格（贴现率）**

这意味着随机现金流和无风险债券价格之间的协方差可以用来衡量现金流的风险。

3、消费形式的 CAPM

（1）单期：

总消费与交易资产定理：总消费是一种交易资产，具有非零价格。

$$E\left(R\left(x_j\right)\right)-R\left(x_0\right)=\frac{Cov\left(R(C),R\left(x_j\right)\right)}{Var\left(R(C)\right)}\left(E\left(R(C)\right)-R\left(x_0\right)\right)$$

$C=\sum_{i\in I}C_1^i$ **是总消费需求**

x_0……x_k **是有限责任资产**

消费形式的 CAPM **表明了资产** j **的预期超额报酬与总消费的超额预期报酬之间的关系，关系系数即消费贝塔系数。**

（2）多期：

$$\left(a_j-a_0\right)dt=\frac{E\left(dc/c\right)-a_0dt}{\mathrm{var}\left(dc/c\right)}\mathrm{cov}\left(dx_j/x_j,dc/c\right)$$

可见该模型与单期模型的唯一区别是该模型使用瞬时报酬，而单期模型使用离散报酬。但是消费贝塔系数的风险含义是相同的，表示资产在该期的波动性。

4、非线性的 CAPM Mcdonald（1983）

Lee **指出如果存在投资期问题，那么在系统性风险的估计中会出现非线性的情况。**

该文为了解决投资期问题，引入了 CAPM **的函数形式。**

SLB:

$$E\left({}_HR_j\right)=\left(1-{}_Hb_j\right){}_HR_f+{}_Hb_jE\left({}_HR_m\right)$$

下标 H **表示真实市场周期，下标** N **表示观测的投资期**

$$E\left({}_HR_k\right)=\left[1+E\left({}_HR_k\right)\right]^l-1,\ l=H/N$$

所以 $R_{jt}^{(l)}=\left(1-{}_Hb_j\right)R_{ft}^{(l)}+{}_Hb_jR_{mt}^{(l)}+m_{jt}$ **这就是** CAPM **的不变替代弹性函数形式。**

其中 $R_{kt}^{(l)}=\begin{cases}\ln\left(1+R_{kt}\right),\ l=0\\ \left[\left(1+R_{kt}\right)^l-1\right]/l,\ l\neq 0\end{cases}$ **（可见当** ?＝1 **时为线性模型，当** ?=0 **时为对数模型）**

文章还将其与可变替代弹性的函数形式（? **可变）进行比较，结果发现两者差别不大，但是后者会增加计算量。**

实证检验发现，? **的均值为－**0.46**，标准差为** 1.17**，说明存在非线性。**

但是，文章最后通过对模型参数的估计同时也发现非线性不能全部归因于投资期问题。而且文章发现公司规模越大，CES **模型越不显著，这需要进一步研究。**

5、条件 CAPM

（1）Mathur,Pettengill,Sundaram（1995）**文章的特色是采用了实际收益率而不是预期收益率对** SLB－CAPM **进行了检验。**

使用实际收益率而不是预期收益率的区别是：

1**．市场收益率可以低于无风险利率，不然没有人会持有无风险组合。**

2**．当市场收益率低于无风险利率时，收益率与β之间存在一个相反的关系。**

即当市场收益率低于无风险利率时，高贝塔值的组合的收益率可能比低贝塔值的组合低，不然没有人会持有低贝塔值组合。

即证明： a positive relation during positive market excess return periods and a negative relation during negative market excess return periods。

文章的第一步是用 Fama 和 Macbeth（1973）的方法检验贝塔和实际收益率之间的条件关系。

$$R_{it} = \hat{g}_{0t} + \hat{g}_{1t} * d * b_i + \hat{g}_{2t} * (1-d) * b_i + e_t \qquad (1)$$

$$若 (R_{mt} - R_{ft}) > 0, d = 1$$

$$若 (R_{mt} - R_{ft}) < 0, d = 0$$

? 为市场超额收益率

在市场超额收益率为正时，

H$_0$：?$_1$＝0

H$_0$：?$_1$>0

在市场超额收益率为负时，

H$_0$：?$_2$＝0

H$_0$：?$_2$<0

第二步是检验贝塔和收益率之间正的长期支付（是否从长期看高贝塔值组合比低贝塔值组合平均获得更高的收益率）。

如果贝塔和收益率之间存在系统的条件关系，且满足以下两个条件，那么高风险会获得高回报：

1．市场超额收益率平均为正

2．风险收益率关系市场超额收益率为正和为负的期间对称

（t 检验，同时比较 ?$_1$ 是否等于 ?$_2$）

最后，将组合平均贝塔值对组合平均收益率进行回归。

结果：

通过利用（1）式，进行条件分析，结果发现 Reinganum（1981）和 Tinic、West（1984）提出的问题都得到了解决，证实了贝塔和收益率之间存在系统的条件关系。

（2）Jagannathan,Wang（1996）认为，由于投资者是进行连续多期投资，因而β是可变的，而不是一成不变的。本文即是用条件 CAPM 隐含的无条件模型检验横截面差异。此外文章还在市场组合中引入了人力资本（Mayers1972）。

文章中举例说明了忽视β可变会导致对 CAPM 的不适当的拒绝。

例：

	t_1	t_2	平均贝塔值
股票 1	0.5	1.25	0.875
股票 2	1.5	0.75	1.125
市场风险溢酬	10%	20%	

（0.5×10%＋1.25×20%）÷2＝15%

（1.5×10%＋0.75×20%）÷2＝15%

可见，由于忽视了贝塔的变化，从而根据贝塔值不同而收益率相同的结论错误拒绝了 CAPM。

条件 CAPM：$E[R_{it}|I_{t-1}] = g_{0t-1} + g_{1t-1} b_{it-=1}$ （1）

其中，$b_{it-1} = Cov(R_{it}, R_{mt}|I_{t-1}) / Var(R_{mt}|I_{t-1})$

g_{0t-1}是零贝塔组合的条件预期收益率

g_{1t-1}是条件市场风险溢酬

两边取期望可得，研究横截面差异的无条件模型：

$$E[R_{it}] = g_0 + g_1 \overline{b}_i + Cov(g_{1t-1}, b_{it-1}) \quad (2)$$

其中$g_0 = E[g_{0t-1}]$，$g_1 = E[g_{1t-1}]$，$\overline{b}_i = E[b_{it-1}]$

当经济状况不好时，市场风险溢酬会比较大，而此时面临财务困境的公司的贝塔值也较大，两者的协方差就较大。

为了对β进行分解，定义贝塔－溢酬敏感度（衡量条件贝塔对市场风险溢酬变化的敏感度）$J_i = Cov(b_{it-1}, g_{1t-1}) / Var(g_{1t-1})$ （3）

$$b_{it-1} = \overline{b}_i + J_i (g_{1t-1} - g_1) + h_{it-1}$$

第一项是预期贝塔（常数），第二项是随机变量，第三项是残差

$$E[h_{it-1}] = 0, E[h_{it-1}, g_{it-1}] = 0$$

把（3）代入（2），可得

$$E[R_{it}] = g_0 + g_1 \overline{b}_i + Var(g_{1t-1}) J_i \quad (4)$$

由于无法估计$\overline{b}_i$和J_i，因而定义两种无条件贝塔

$$b_i = Cov(R_{it}, R_{mt}) / Var(R_{mt}) \quad (5)$$

$$b_i^g = Cov(R_{it}, g_{1t-1}) / Var(g_{1t-1})$$

无条件模型转换为$E[R_{it}] = a_0 + a_1 b_i + a_2 b_i^g$ （6）

实证：

令R_{t-1}^{prem}表示 BAA－和 AAA－债券之间的收益率差异，市场风险溢酬是R_{t-1}^{prem}的线性函数，

$$g_{t-1} = k_0 + k_1 R_{t-1}^{prem}$$

$$b_i^{prem} = Cov(R_{it}, R_{t-1}^{prem}) / Var(R_{t-1}^{prem})$$

代入（6）得

$$E[R_{it}] = c_0 + c_m b_i + c_{prem} b_i^{prem} \quad (7)$$

同时假设市场收益率是市场加权股票指数的线性函数，

$$R_{mt} = f_0 + f_{vw} R_t^{vw}$$

$$b_i^{vw} = Cov(R_{it}, R_t^{vw}) / Var(R_t^{vw})$$

代入（5），得

$$E[R_{it}] = c_0 + c_{vw} b_i^{vw} \quad (8)$$

假设人力资本的收益率是人均劳动收入的增长率

$$R_{mt} = f_0 + f_{vw} R_t^{vw} + f_{labor} R_t^{labor} \quad (9)$$

$$b_i^{labor} = Cov(R_{it}, R_t^{labor}) / Var(R_t^{labor})$$

把（9）代入（5）得

$$b_i = b_{vw} b_i^{vw} + b_{labor} b_i^{labor} \quad (10)$$

所以 $E[R_{it}] = c_0 + c_{vw} b_i^{vw} + c_{prem} b_i^{prem} + c_{labor} b_i^{labor}$ （11） LP 模型

为了同时检验是否存在规模效应，用股票市值的对数表示规模，可得

$$E[R_{it}] = c_0 + c_{size} \log(ME_i) + c_{vw} b_i^{vw} + c_{prem} b_i^{prem} + c_{labor} b_i^{labor}$$

文章通过 HJ 加权矩阵 $A = \left(E[R_t R_t']\right)^{-1}$ 的广义矩检验（Hansen－Jagannathan distance $\sqrt{E[w_t(d)]' A E[w_t(d)]}$ ）分别对静态的 CAPM、（7）式、（11）式进行检验，判定模型设定的误差。结果发现（11）式最优，HJ－distance＝0.6184。但是，文章发现该模型仍存在误差，估计是零贝塔收益率不同于国库券收益率所导致。

然后，为了与 Chen，Roll，Ross（1986）的多因素模型相区别，往模型中再加入四个因素进行分析。

1．工业生产月百分比变化（I_1）

2．月通货膨胀率（I_2）

3．长期和短期政府债券月收益率之差（I_3）

4．到期日相同的公司和政府债券的月收益率之差（I_4）

为了与 Fama 和 French 的三因素模型区别，往模型中再加入两个因素（规模与账面－市值比率因素）进行分析。

结果均没有发现有显著改进。

存在的问题：

1．对于β的变化的假设过于简单

2．受到突发事件的影响

（3）Bodurtha，Mark（1991）

该文主要是用广义矩方法而不是最大似然估计法对自回归条件异方差（ ARCH）形式的条件 CAPM 进行估计。

$$E(r_{it} | I_{t-1}) = b_{i,I_{t-1}} E(r_{mt} | I_{t-1})$$

$$b_{i,I_{t-1}} = \frac{\operatorname{cov}(r_{it}, r_{mt} | I_{t-1})}{\operatorname{var}(r_{mt} | I_{t-1})}$$

假设信息集 J **是信息集** I **的一个子集，那么如果条件** CAPM **在** J **下成立，那么其必在** I **下也成立。**

$$E\left(r_{it}\middle|J_{t-1}\right)=b_{i,I_{t-1}}E\left(r_{mt}\middle|J_{t-1}\right)$$

$$b_{i,J_{t-1}}=\frac{\operatorname{cov}\left(r_{it},r_{mt}\middle|J_{t-1}\right)}{\operatorname{var}\left(r_{mt}\middle|J_{t-1}\right)}$$

把收益率分解成可预测和不可预测的部分：

$$r_{it}=b_{i,J_{t-1}}E\left(r_{mt}\middle|J_{t-1}\right)+u_{it}$$

$$r_{mt}=E\left(r_{mt}\middle|J_{t-1}\right)+u_{mt}$$

则 $\operatorname{cov}\left(r_{it},r_{mt}\middle|J_{t-1}\right)=E\left(u_{it}u_{mt}\middle|J_{t-1}\right)$

$$\operatorname{var}\left(r_{mt}\middle|J_{t-1}\right)=E\left(u_{mt}^2\middle|J_{t-1}\right)$$

所以 $r_{it}=\dfrac{E\left(u_{it}u_{mt}\middle|J_{t-1}\right)}{E\left(u_{mt}^2\middle|J_{t-1}\right)}E\left(r_{mt}\middle|J_{t-1}\right)+u_{it}$　　　（1）

条件期望是信息集的非线性函数，假设

$$E\left(u_{mt}^2\middle|J_{t-1}\right)=g_0+\sum_{j=1}^{s}g_j u_{mt-j}^2$$

$$E\left(u_{it}u_{mt}\middle|J_{t-1}\right)=a_{i0}+\sum_{j=1}^{k}a_{ij}u_{it-j}u_{mt-j}$$

通过与 ARCH（3）**模型进行比较，该文认为市场超额收益率是一个自回归过程** AR（3）**：**

$$E\left(r_{mt}\middle|J_{t-1}\right)=p_0+\sum_{j=1}^{h}p_j r_{mt-j}\qquad (h=3)$$

该文用广义矩方法对（1）的参数进行了估计，发现参数的大小和符号都很合理，p_1 **显著为正，**p_3 **为负。**BM **把** NYSE **的股票按规模从大到小分成五组进行检验，发现股票超额收益的条件一阶矩和二阶矩随着时间存在显著波动、滞后** 1 **期和** 3 **期的市场风险溢酬的条件方差和（与组合收益率的）协方差非常显著，条件** CAPM **可以说明收益率的差异。**

为了判定条件 CAPM **是否可以对收益率的变动做出唯一解释，该文考察了模型的残差与下列变量的正交性：目前和滞后两期的国库券收益率、低等级公司债券收益率、市场股息率、滞后** 3 **期的低等级公司债券风险溢酬、滞后** 1 **期的市场的条件方差。结果发现残差与低等级公司债券收益率和风险溢酬无关，与国库券收益率、股息率和滞后的条件二阶矩有关。此外，该文还发现数据中存在一个确定性的部分，这说明模型的设定仍存在问题。**

文章随之在模型中考虑了一月效应，发现上述问题都能得到有效解决。文章往模型中加入了一个虚拟变量：当在一月为 1**，其他月份为零。**

$$r_{it}=Jan_i+\frac{E\left(u_{it}u_{mt}\middle|J_{t-1}\right)}{E\left(u_{mt}^2\middle|J_{t-1}\right)}E\left(r_{mt}\middle|J_{t-1}\right)+u_{it}$$

（4）Ng（1991）对条件 CAPM 也作了相似的研究，但是他用 ARCH－M 模型来描述市场超额收益率。

$$r_{mt}=y_0+y_1f\left[g_0+\sum_{j=1}^{s}g_ju_{mt-j}^2\right]+u_{mt}$$

其次，他在条件协方差和方差中考虑了市值加权权重的变化。

再次，Ng 假设模型中的创新遵循 GARCH(1，1)过程，而 BM 则假设其是一个 ARCH 过程。

最后，Ng 是用最大似然法进行估计，而 BM 则采用了广义矩方法。

（5）Fisher, Kamin（1985）

该文使用卡尔曼滤子估计方法解决收益率残差的异方差和贝塔的随机变化问题。

在同方差下：

$$b_{it}=\left[\sum_{j=1}^{t}\left(f_jx_j^2\right)\left(y_{ij}/x_j\right)\right]\Big/\left[\sum_{j=1}^{t}f_jx_j^2\right]=\sum_{j=1}^{t}f_jx_jy_{ij}\Big/\sum_{j=1}^{t}f_jx_j^2\qquad（f_jx_j^2\text{是权重}）$$

$$x_i=X_i-\overline{X},X_i=R_{mt}-R_{ft}$$

$$y_i=Y_i-\overline{Y},Y_i=R_{it}-R_{ft}$$

在异方差下：

$$b_{it}=\sum_{j=1}^{t}C_jf_jx_jy_{ij}\Big/\sum_{j=1}^{t}C_jf_jx_j^2$$

用 C_jf_j 替代 f_j，C_j 是小于或等于 1 的 GLS 权重因子。

$$f_{j+1}=f_j+K\sum_{h=1}^{j}C_hf_hx_h^2$$

$$C_j=1/\left(1+f_s\left|x_j\right|\right)^2$$

（二）、实证检验

1、资本资产定价模型的早期检验

早期对模型的检验不是直接检验 CAPM 的假设，而是给定市场组合的有效性，以检验证券市场线的性质为主。早期的检验采用了两步回归方法。在第一步中估计出证券或组合的贝塔因子。第一步属于时间序列回归，将证券或组合的收益率对市场指数收益率进行回归。每一期的观测值的最优拟和线就是该证券的特征线，特征线的斜率就是该证券的贝塔因子的估计值。第二步回归属于横截面回归。这里的每一个观测值是单个证券或组合。在第二步回归中，将贝塔因子对平均收益率进行回归。观测值的最优拟和线为证券市场线。研究者试图辨别该估计值的特性与 CAPM 的预测是否一致。

（1）BJS 检验（1972）

BJS 取的样本是 1926－1965 年纽约证券交易所（NYSE）上交易的所有股票。他们

从子区间 1926－1930 年开始研究。他们将 NYSE 上所有股票的简单加权平均作为市场指数，计算该时期交易的所有股票的贝塔因子。然后，他们根据贝塔因子对股票进行排序，构造 10 个组合。贝塔因子最高的 10%的股票归入组合 1，依此类推，一直到组合 10。

现在他们计算 1931 年每一个月每个组合的收益率。在该年末，他们重新计算 1927－1931 年交易的每一只股票的贝塔因子，重新构造 10 个组合。BJS 从 1931 年到 1965 年一直重复上述步骤，取得 10 个组合一系列的月收益率。他们试图通过从收益率中取出样本估计值估计每一个组合的预期收益率和贝塔因子。

预期值的样本估计值是收益率的算术平均值。在每一个月初这是预期收益率的无偏估计。他们通过将组合收益率对市场指数进行回归估计每一个组合的贝塔因子。

他们的结果为 CAPM 提供了强有力的支持。在他们估计的证券市场线中几乎不存在非线性，斜率显著为正。此外，几乎 100%的组合平均收益率的横截面的差异可以用贝塔因子的差异来表示。

（2）**FM 检验（1974）**

法玛（Fama）和麦克佩斯（MacBeth）（FM）也研究了证券市场线的性质。但是，他们的研究与 BJS 不同的是，他们试图根据前期估计的风险变量预测组合的未来收益率。

他们所用的数据和 BJS 一样。他们也使用同样的指数（NYSE 上所有股票的简单加权平均）作为市场组合。他们从计算 1926－1929 年 NYSE 上每一只股票的贝塔因子开始。和 BJS 一样，他们也根据贝塔因子的大小对股票进行排序，构造 20 个组合。然后，他们通过将 1930－1934 年组合的月收益率对市场指数收益率进行回归估计每一个组合的贝塔因子。在 1934 年末，他们得到每一个组合的贝塔因子的估计值。他们用这些贝塔值预测 1935－1938 年每个月组合的收益率。对于每一个月，他们将组合的月收益率对贝塔因子进行回归得到证券市场线的月估计值。

为了检验证券市场线是否存在非线性，FM 往等式中再加入一项，贝塔因子的平方。该关系式变成三维的，其中组合的收益率在一个轴上，而贝塔因子和贝塔因子的平方在另外两个轴。这 20 个观测值的最优拟和线的组合收益率的等式为：

$$r_{P,J35} = a_0 + a_1 \widehat{b}_P + a_2 \widehat{b}_P^2 + e_{P,J35}$$

（9.2）

CAPM 假设 FM 会发现系数 a_2 并不显著异于零，并且当把贝塔平方这一项加入到该关系式后并不能更好地解释组合收益率的变动。

CAPM 同时假设贝塔因子或系统性风险是证券预期收益率唯一的决定因素。在确定股票价格和预期收益率的时候，残差方差并不重要，因为组合投资者可以把它分散化。FM 通过在关系式中包括残差方差检验资本资产定价模型的假设。这 20 个组合被简单加权平均且包括大量的股票，所以每一个组合的残差方差将相对比较小。但是，为了判定股票的残差方差是否影响其价格及其所构成的组合的预期收益率，FM 在关系式中加入了每一个组合中的股票的平均残差方差。该变量通过下式计算，

$$RV_P = \frac{\sum_{J=1}^{M} s^2(e_J)}{M}$$

其中，M 是组合中股票的数量，$s^2(e_J)$是股票 J 的残差方差。

用三个变量解释这 20 个组合月收益率的差异，该关系式如下：

$$r_{P,J35} = a_0 + a_1\hat{b}_P + a_2\hat{b}_P^2 + a_3 RV_P + e_{P,J35}$$

(9.3)

在期末，他们通过重复这整个过程估计组合的贝塔系数。即他们估计 1930－1933 年股票的贝塔因子。然后，他们构造组合并估计 1934－1938 年的组合的贝塔因子。估计股票贝塔因子、构造组合和估计月证券市场线的过程一共重复了九遍，取得了从 1935 年 1 月到 1968 年 6 月系数 a_0 到 a_3 总共 390 个月估计值。FM 计算每一个系数的均值，试图检验系数是否显著异于零。

资本资产定价模型对系数作出如下假设：

1．根据模型的形式，截距项，或者 a_0，在债券市场应该等于或大于无风险利率。

2．证券市场线的平均斜率，或者 a_1，必须为正值。

3．证券市场线应该为线性的，所以系数 a_2 的均值应该不显著异于零。

4．残差方差不应该影响股票收益率的均衡价值或预期收益率，所以系数 a_3 的均值应该不显著异于零。

FM 检验的主要结果如下，给出系数的均值。*号表示在 90%的置信度上均值显著异于零。

$$r_{P,t} = a_0 + a_1\hat{b}_P + e_{P,t}$$

.0061* .0085*

$$r_{P,t} = a_0 + a_1\hat{b}_P + a_2\hat{b}_P^2 + e_{P,t}$$

.0049* .0105* -.0008

$$r_{P,t} = a_0 + a_1\hat{b}_P + a_2\hat{b}_P^2 + a_3 RV_P + e_{P,t}$$

.0020 .0114* -.0026 .0516

该结果与理论的假设是一致的。它表明当我们用高于平均的贝塔因子进行预测，在下期我们将得到高于平均的收益率。贝塔因子和收益率之间几乎不存在非线性。此外，我们不可能根据组合里股票的残差方差预测未来收益率。给定 CAPM，我们并不期望残差方差会影响股票价格或预期收益率，而且我们可以看到并不存在任何的倾向说明残差方差高于平均的的股票会得到高于平均的预期收益率。

如同布莱克、詹森和舒尔斯，FM 并没有发现系数 a_0 的均值显著高于无风险利率的均值。这些发现与允许无风险贷出但不允许无风险借入的 CAPM 是一致的。

重要的是区分 BJS 和 FM 的方法的不同。在 BJS 中，贝塔因子和平均收益率是在同一期计算的。在 FM 中，贝塔因子和平均收益率是在不同的时期计算的。这些贝塔因子是在某一期进行估计并用于下一期预测收益率。

2、Anomalies of CAPM:

以前对 SLB－CAPM 的三个批评：

1．β 不是风险的唯一决定因素，存在其他的宏观经济变量（Roll，Ross）

2．证券收益率还受到非系统性风险的影响（Lakonishok，Shapiro）

3．β 与证券收益率之间不存在显著关系（Fama，French）

对 SLB 的反驳：

1．Reinganum（1981）发现用月数据检验，则收益率和贝塔之间的关系不明显，而且组合之间的收益率差别不大、在每个子期间收益率和贝塔的关系不一致。

2．Tinic 和 West（1984）发现当把一月份数据剔除时，组合之间的收益率没有显著差异。而且在一年中的某些月份，收益率与贝塔负相关。

3．Lakonishok，Shapiro（1984、1986）发现收益率的差异用其他变量（如规模）进行解释会比用 β 更好。

4．Fama、French（1992）规模、账面价值－市值比率

size effect: 小规模股票的平均超额收益率比CAPM所预期的更高。

value effect: 收益率可以用市场价值与会计指标的比率解释。如每股的收益和账面价值。

Reverse and momentum effect: 短期（通常是一个月）的反转模式，如果一只股票在上个月显著上涨，那么在下个月股票价格往往会下跌（Jegadeesh1990）。中期（通常是六到十二个月）的惯性模式，在接下来的六个月中股票价格会重复它们在此前六到十二个月的表现。

January effect：一月份的股票收益率明显地高于其他几个月份的收益率。

Weekend effect：周一的平均收益率为负数，而且多数负的收益率发生在周五收盘到周一开盘之间。

五种可能的解释：

①、data snooping

②、无法找到真实的市场组合的替代

③、CAPM 应由多因素模型所取代

④、异常现象并没有反映某种类型的风险，而只是“mistake”。当投资者意识到这一点时，异常现象便会消失。

⑤、异常现象反映了使投资者做出非理性预期的持续心理偏差。

例如：法玛（Fama）和弗伦奇（French）（1992）发现在过去的 40 年中，对以市场价值为权重的 NYSE 指数的波动率贡献较大的股票并没有获得更高的预期收益率。通过控制公司的规模，平均收益率和贝塔因子之间的关系变为负相关。很明显，这些结果并没有证明系统性风险（对 NYSE 指数的波动率的贡献）最大的股票可以使投资者获得高于平均的收益率。

法玛和弗伦奇发现每股收益除以股票价格的比率或每股账面价值除以股票价格的比率比较低的股票收益率较高。他们认为，尽管这与 CAPM 不一致（CAPM 假设贝塔因子的差异是未来收益率的唯一决定因素），低估的这些衡量方式也许可以作为风险的其他衡量方式。换句话说，他们相信低估股票的高收益率是投资者所预期的，因为这些低估股票可能是无利益的或处于财务困境。他们相信投资者要求且最终将在低估股票上实现更高的收益。

Kothari，Shanken 和 Sloan（1995）从另一方面争论道，法玛和弗伦奇的结果大部分是由于生存者偏差造成的。法玛和弗伦奇研究的公司的样本系统地剔除了大量在其研究期间破产的公司。法玛和弗伦奇认为低估股票风险比较大，因为它们处于财务困境当中。所以，剔除掉许多破产的公司会导致低估的股票过去的业绩整体向上偏。但是，Chan，Jagadeesh 和 Lakonishok（1995）认为生存者偏差的影响并不能完全解释低估股票的正的支付。此外，法玛和弗伦奇（1996）认为在任何情况下，生存者偏差都不能用来解释为什么在任何横截面股票收益率中贝塔因子都不具备明显的正的支付。

3 罗尔对资本资产定价模型检验的批评

罗尔对 CAPM 的批评可以分成两个部分。首先，他认为 BJS 和 FM 的结果是同义反复的。即不管在现实世界中股票是如何通过风险进行定价的，我们都有可能得到上述结果。如果这是真的，我们从上述检验中并不能了解股票价格的结构，而资本资产定价模型就没有真正被检验过。

其次，他认为 CAPM 唯一真正的假设是市场组合是有效的，而该假设才是我们应该检验的。但是，市场组合应包括国际经济体系的每一种资产。因而不可能判别一个组合（在预期收益率－标准差图中）是否是有效的。如果这是不可能的，那么资本资产定价模型无法被检验。

（1） 前述检验是同义反复的

假设我们有一顶帽子和许多张纸。在每一张纸上我们写上一个数字代表一段时期的收益率，如一个月。我们所有的纸全部放入帽子中并混合起来。现在我们从帽子中取出 12 张纸。每一张纸上的数字代表某只股票 12 个月中每个月的收益率。我们称之为股票 1，把这些纸重新放入到帽子中。现在通过同样的步骤得到股票 2，重复上述步骤一直到股票 100。你现在拥有 100 个序列的月收益率，每一只股票一个序列。由于我们对每一个证券从帽子中只取出 12 个收益率，每一个证券的样本均值会不同，即使预期收益率是相同的。

月收益率的均值代表市场指数（100 只股票的简单加权平均）的收益率。这些指数的构造与 BJS 和 FM 的方法一样。

现在我们计算每一只股票的贝塔因子。我们将每一只股票的收益率对市场指数收益率进行回归。这些关系的最优拟和线称为特征线，其斜率为股票贝塔因子的估计值。贝塔因子右边的平均收益率是通过加总每一只股票的月收益率并除以 12。

在这里，我们用 BJS 的方法构造 10 个组合。我们根据贝塔因子对股票进行排序，把贝塔因子最高的 10%的股票放入第一个组合，依此类推。

假设我们现在通过证券市场线的性质检验资本资产定价模型。我们通过将贝塔因子对平均收益率进行回归，先是对 100 个证券，再对 10 个组合估计证券市场线。

我们检验的结果与 CAPM 是一致的，即使这些收益率是从帽子中得来的!这就是问题所在，诸如此类的结果可以跟 CAPM 拟和得很好，不管市场上实际的定价结构如何。

这意味着即使充当市场组合的组合是无效的，预期收益率和最小方差投资组合的贝塔因子之间仍存在确定的线性关系。布莱克、詹森和舒尔斯所研究的组合是大规模、简单加权、高度分散化的组合。如果这种类型的组合落在弹头附近，它们将会排成一条直线，不管真实的、市值加权平均市场组合是否有效。

正如前述检验不能表明股票收益率是从帽子中取出的，构建在真实数据基础上的检验也并不能告诉我们市场上定价结构的性质。当它们告诉我们所使用的市场指数以预期收益率的形式很可能落在总的最小方差投资组合上，它们并没有告诉我们指数的相对有效性。事实上，如果在任何情况下考察 BJS 和 FM 使用的指数的有效性，这是非常值得怀疑的。为了检验 CAPM，我们必须检验市值加权市场组合的有效性。而 BJS 和 FM 使用的是 NYSE 上所有股票的简单加权组合。

问题在于 BJS 和 FM 并没有直接检验 CAPM 的假设：市场组合落在有效集上。相反，他们考察的是根据一个简单加权组合构建的证券市场线的性质。如果该市场组合是有效的，那么贝塔因子和预期收益率之间将存在正相关的线性关系。但是，不幸的是，当我们发现组合贝塔因子和预期收益率之间将存在着完全线性关系，并不意味着市场组合是有效的。

（2） 资本资产定价模型可以被检验吗？

罗尔的第二个观点是 CAPM 本质上不是一个可检验的理论。

假设你面临一个资产总体，相对于该总体的最小方差集，这些资产的市场组合是有效的。如果你现在持有这些资产的一个子集，相对于该子集的最小方差集，该子集的一个市值加权组合不大可能是有效的。所以，即使真实的最小方差集是有效的，相对于根据 NYSE 的股票构建的最小方差集，NYSE 指数也不大可能是有效的。

要想拒绝 CAPM，你必须拒绝市场组合的有效性。这即使不是不可能的，也将是非常困难的。你将不得不把你的研究扩展到其他所有交易所，包括场外交易市场的所有股票。你还将不得不包括债券、优先股和其他类型的证券。许多债券是由公司私下持有，从不交易。你无法观测到这些证券的收益率。你也无法观测到其他许多资产的收益率，诸如农场和所有权。组合投资者还可以国际化，所以你必须在你的市场组合里包括世界上每一个国家的所有资产。你面临的是一件不可能的任务。

在这里有两点很重要。首先，即使 CAPM 是真实的，也没有理由相信包括经济系统中一大部分总资产的市场组合关于该部分资产的最小方差集是有效的。其次，给定可以获得的信息，我们只可以观测到一小部分总资产的收益率。Shanken（1984）认为包括在市场组合里的那部分资产并不重要，重要的是替代的市场组合的收益率和市场组合收益率的相关度。该部分的比例可能很小，但是相关度可能很大。他同时指出与 CAPM 的实证检验中使用的证券无关的资产不必包括在替代的市场组合里。这些点是无效点，其在某种程度上调和了对模型的批评。但是，必须指明我们永远无法观测到真实市场组合的收益率。因而，我们将永远无法得知任何替代组合与这些收益率的相关程度。此外，我们永远无法得知与包括在该检验中的证券相关的资产在多大程度上包括在市场组合中但没有包括在替代组合中。

根据以上观点，许多人认为没有一个人曾经构造出对资本资产定价模型有效的检验，以后也不会有。他们认为 CAPM 是无法检验的。

2、资本资产定价模型的近期检验——均值方差有效的检验

CAPM 的近期检验着重于其主要假设：市场组合位于总的均值－方差有效集上。

① Mackinlay,Richardson（1991）

由于基于收益率遵循特定分布的假设检验往往会导致有偏的结论，所以该文采用了广义矩方法对市场指数的均值方差有效性进行了检验，与以往的检验不同，该文并没有假设收益率遵循正态分布。

均值方差有效性的检验公式：

$$\bar{r}_{it} = a_i + b_i \bar{r}_{pt} + \bar{e}_{it}$$

$$E[\bar{e}_{it}] = 0$$

$$E[\bar{e}_{it}\bar{r}_{pt}] = 0$$

$$a_i = 0$$

$\bar{r}_{it}$ 为超额收益率

在给定独立同分布和多元正态分布的假设下，通常用 Wald 统计量检验均值方差有效性。

广义矩检验均值方差有效性一般有两种方法：

1．估计无限制系统并用该无限制估计量检验 $a = 0$ 的假设。

$$f_1 = T\hat{a}'\left[R\left[D_T' S_T^{-1} D_T\right]^{-1} R'\right]^{-1}\hat{a} \sim c_N^2$$

$$R = I_N \otimes (10) \qquad R\hat{d} = \hat{a}$$

2．**将约束条件** $a=0$ **代入** $f_t(d)=\begin{pmatrix} \bar{e}_{1t}(a_1,b_1) \\ \bar{e}_{1t}(a_1,b_1)\bar{r}_{pt} \\ \vdots \\ \bar{e}_{1t}(a_i,b_i) \\ \bar{e}_{1t}(a_i,b_i)\bar{r}_{pt} \\ \vdots \\ \bar{e}_{1t}(a_N,b_N) \\ \bar{e}_{1t}(a_N,b_N)\bar{r}_{pt} \end{pmatrix}$**，估计限制系统，然后检验过分识别的约束条件。**

$$f_2=Tg_T\left(\hat{b}\right)'S_T^{-1}g_T\left(\hat{b}\right)\sim c_N^2$$

检验结果表明：对于 CRSP **市值加权指数和简单加权指数，**Wald **统计量分别比** GMM **统计量低估** 10.2**%和** 17.6**%。所以** Wald **统计量经常不会拒绝均值方差有效性，而用** GMM **统计量则证明市场组合并不是均值方差有效的。**

为了检验该差异是源于 Wald **统计量的不准确还是源于** GMM **统计量在小样本中不适用，该文比较了** Wald **统计量和** GMM **统计量在小样本中的结果，发现并没有存在显著差异。说明了该差异是源于** Wald **统计量的不准确。**

②Roll、Ross（1994）

当市场指数是均值方差有效的，那么收益率和β之间存在线性的关系，但是实证检验往往发现收益率和β之间并不存在线性关系，所以一个可能的解释是选择的市场指数不是均值方差有效的。该文的目的即分析市场指数的选择对收益率和β之间关系的影响。

该文首先描述了导出特定收益率和贝塔的横截面关系的指数的解析特征。

位于有效集内部的替代市场指数曲线表示为：

$$Bs^4+Crs^2+Dr^2+Fs^2+Gr+H=0$$

$$B=k^2\left(ac-b^2\right),C=-2dkc,D=gc,F=2dkb-g\left(ac-b^2\right)+cd^2,G=-2gb,H=ag-d^2$$

$$a\equiv R'V^{-1}R,b\equiv R'V^{-1}1,c\equiv 1'V^{-1}1,d\equiv s_R^2,g\equiv m^2s_{R-1}^2$$

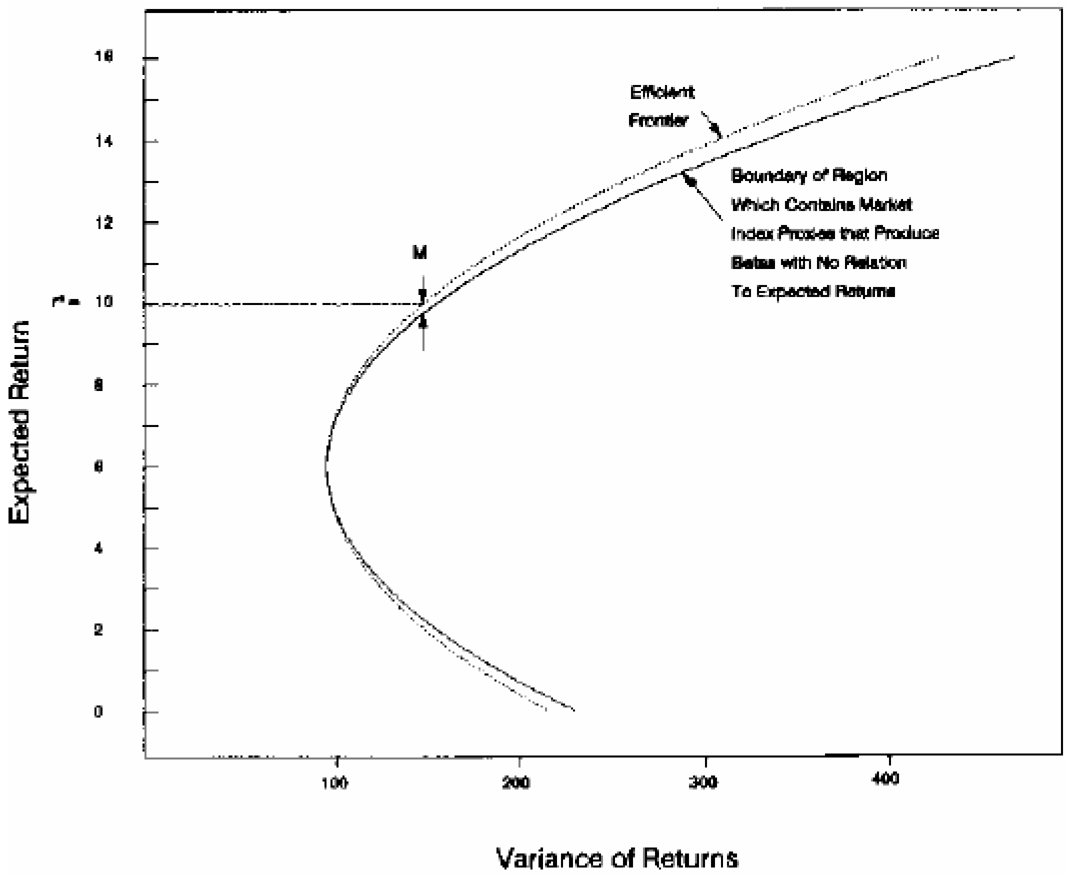
V **为收益率协方差矩阵，**1 **为单位阵**

μ **为收益率的横截面均值**

s_{R-1}^2 **横截面或时间序列方差**

k **为** R **与β的横截面协方差**

当 k＝0 **时，替代市场指数曲线为与有效集相切于总的最小方差组合的抛物线。（图** 1**）**



总的最小方差组合的β等于 1，$\operatorname{cov}(R,1)=0$，有效组合中只有总的最小方差组合的 k 为 0，其他皆为 1。

当市场指数位于有效集内部时，其不是均值方差有效的。

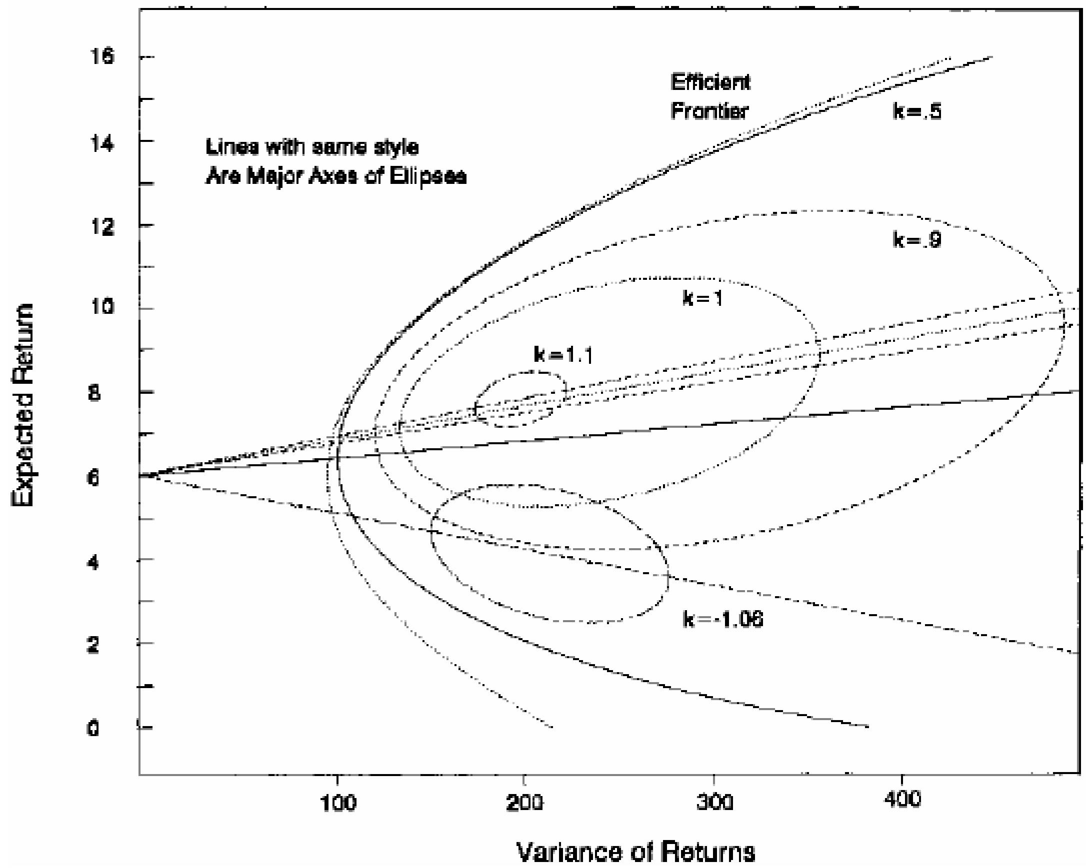
有效集和 k＝0 的市场指数的最短距离用收益率差异表示为：

$$M \equiv r^* - r = \left\{\left[\left(cs^2-1\right)\left(ac-b^2\right)\right]^{1/2} - \left[\left(cs^2-1\right)\left(ac-b^2-cd^2/g\right)\right]^{1/2}\right\}/c$$

r 是该市场指数的收益率，r*是与该市场指数方差相同的有效组合的收益率。

位于有效集（k＝1）和的市场指数曲线（k＝0）之间的组合，$\operatorname{cov}(R,b)=k$ 为正值。

当 k≠0 时，替代市场指数曲线为椭圆，每个椭圆的轴均截纵轴于总的最小方差组合的收益率，而且 k 越大，椭圆越小。（图 2）



为了分析均值方差检验对市场指数选择的敏感度，该文指出，由于 k＝0 的无效组合与有效组合距离可能相差不远，因而稍微的样本误差有可能使均值方差检验失效。这就对过去的很多检验结果做出了解释，$\operatorname{cov}(R,b)=k$ 对市场指数的选择非常敏感，与市场组合很接近的指数有可能得出正、负、或零的 $\operatorname{cov}(R,b)=k$ （如 Fama、French 认为贝塔不能解释收益率差异有可能是因为市场组合选择不当的结果。）

该文还发现，统计方法的选择对收益率和贝塔关系的检验也会产生影响。用 GLS 可以解决 OLS 的上述问题，因为只要替代指数的预期收益率高于总的最小方差组合的收益率，那么 $\operatorname{cov}(R,b)=k$ 就为正值。这意味着只要指数不是完全无效，那么在大样本中 $\operatorname{cov}(R,b)=k$ 必为正。但是这却带来另一个问题，即不能检验替代指数是否有效。

③Shanken（1987）

【Kandel，stambaugh（1987，1989）Shanken（1987）均通过找出替代市场指数与真实市场组合的相关度推导出对 CAPM 的检验。】

但是由于当市场指数位于有效集内部时，在相同的 $\operatorname{cov}(R,b)=k$ 下有不止一个市场指数，所以不可能通过找出替代市场指数在均值－方差图中的位置确定 k。

假设你面临一个证券总体和基于该总体构建的替代市场组合。同时假设子集只是国际上所有资本投资总体的一小部分，并且基于该子集的有效集很可能落在基于所有资本投资总体的总的最小方差集内部。点 M 代表替代市场组合，点 M^* 代表真实的总市场组

合。相对于其各自的有效集，不管 M 或者 M^* 都是无效的。

现在 M^* 和总的有效集都无法观测到，但是你可以观测到 M 和子集的有效集。你也可以检验相对于子集的有效集 M 是否无效。

给定 M 和 M^* 的收益率的相关度和预期收益率与 M^* 的协方差线性相关的假设，你可以检验 M^* 相对于子集的有效集是否无效。因为其来自于子集，子集的有效集必定落在总的有效集里面。所以，如果 M^* 相对于子集的有效集无效，则可以预测其关于总的有效集也是无效的。给定该预期收益率的假设的关系和 M 和 M^* 之间的相关系数，这看起来似乎有可能拒绝 CAPM。Shanken 接着证明如果你愿意承认法玛和麦克佩斯所使用的替代市场组合和布莱克，詹森和舒尔斯所使用的替代市场组合之间的相关系数为.8，那么 CAPM 可以在 95%的置信度上被拒绝。

这是一个有趣的思想，但是其依然存在一个严重的问题。由于大部分市场组合是不可流通的，所以其收益率是无法观测的，那我们如何知道.8是一个合理的相关系数？如果市场组合包括人力资本和其他非常重要但是完全不可观测的构成成分，那么很容易做出可以观测的替代组合和真实的市场组合之间的相关系数很低的判断。鉴于此，一个不可拒绝的先入之见是否是对一个不可拒绝的理论的改进呢？

④ Jarrow，Madan（1997）

Dybvig and Ingersoll (1982)最早证明了在完全市场中，CAPM和期权交易之间存在着不一致。而本文证明该不一致不是源于市场不完全，而是因为均值方差偏好本身会导致套利机会的出现。

文章认为在投资者具有均值方差偏好并可以进行广泛的衍生产品交易的均衡经济中存在着套利机会，从而证明均值方差分析是无效的。

Dana (1994)证明了CAPM意味着以市场组合为标的期权交易存在着套利机会。

定价函数 $f[z]=E[pz]$ z∈Z （Riesz representation theorem）

Z是平方可积的随机变量空间的闭子代数。

$p=a-be$ a、b均为标量

$$c=E\left[(a-be)(e-k_j)^+\right]<0$$

当e（总禀赋）无穷大时，c为负值，k_j 为执行价格。

假设效用函数 $u_i(x)=U[E(x),\mathrm{var}(x)]$

当令z＝x+y，时，（y为非负的高波动率变量）

$$U[E(z),\mathrm{var}(z)]<U[E(x),\mathrm{var}(x)]$$

可见，虽然z优于x，但是根据均值方差分析，投资者的效用反而降低。说明理论上存在着套利机会。

当然，这只在有限的水平（h>0）下存在不一致（均值方差偏好是非单调的，而市场组

合的价格是线性的），对于连续时间的BS并不成立（根据默顿的连续时间均衡）。

为了验证实践中是否真正存在套利机会，文章构造了一个CAPM经济中的期权定价模型，并以市场组合为标的进行期权交易，发现当执行价格处于虚值期权两个标准差时，看涨期权价格为负值，从而存在着套利机会。

假设均值方差偏好以期末T时刻总财富的均值方差函数表示，e（总禀赋）遵循几何布朗运动。

与BS公式不同的是，该期权定价模型基于任意的、离散的规划远景。

看涨期权价格
$$w_t(V_t, K, m, s, t, h, r) = \left(a_t e^r + b_t K e^{(m+r)(h-t)}\right) V_t e^{mt} N(d_1) - a_t e^{r(h-t)} K N(d_2) - b_t e^{(m+r)(h-t)} V_t^2 e^{2mt+s^2 t} N(d_3)$$

看跌期权价格
$$w_t'(V_t, K, m, s, t, h, r) = -\left(a_t e^{r(h-t)} + b_t K e^{(m+r)(h-t)}\right) V_t e^{mt} N(-d_1) + a_t e^{r(h-t)} K N(-d_2) + b_t e^{(m+r)(h-t)} V_t^2 e^{2mt+s^2 t} N(-d_3)$$

$$w_t - w_t' = V_t - Ke^{-rT} + V_t\left(e^{(r-m)(h-t)} - 1\right) + b_t V_t^2 e^{2mh} e^{(r-m)(h-t)}\left(1 - e^{-s^2(h-t)}\right)$$

可见，上式并不满足看涨－看跌期权平价公式，只有当$h = t$时，平价公式成立

（$t = s - t, h = T - t$，s为到期日，T为整个水平期）。

由于模型假设存在无限的执行价格，为了证明其是否超出实际的交易范围，文章运用BS公式对该模型得出的期权价格计算出隐含波动率。例：股票现价为100，预期收益率为15%，波动率为20%，无风险利率为5%，当执行价格为140时，BS公式计算出的期权价格为0.08，而该模型计算出的期权价格为负值。

文章还比较了BS公式和CAPM期权定价模型对标准普尔期货期权价格数据的计算结果，发现CAPM期权定价模型的平均误差为4.5%，高于BS公式的3.74%。

文章最后得出结论，由于均值方差分析是无效的，所以基于均值方差有效的CAPM并不成立。

参考文献：

Campbell,J.Y, 2000,"Asset Pricing at the Millennium", The Journal of Finance, Vol.4,1515-1568.

Black,F.,1972, "Capital market equilibrium with restricted borrowing", Journal of Business, Vol.45,444-455.

Hagerman,R.L.,E.H.Kim,1976,"Capital asset pricing with price level changes", Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.11, 381-391

Merton,R.C.,1973," An intertemporal capital asset pricing model",Economitrica,vol.41,867-887

Jorrow,R.A.,E.R.Rosenfeld,1984,"Jump risks and the intertemporal capital asset pricing model", Journal of Business, vol.57,337-351

Chamberlain,G.,1988," Asset pricing in Multiperiod securities markets",Econometrica, Vol.56,1283-1300

Kazemi,H.B.,1991,"The multi period CAPM and the valuation of Multi-period stochastic cash flows", Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.26,223-231

Mcdonald,B.,1983,"Functional forms and the capital asset pricing model", Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.18,319-329

Mathur,I.,G.N.Pettengill,S.Sundaram,1995,"Conditional relation between beta and returns", Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.30,101-116

Jagannathan,R.,Z.Y.Wang,1996,"the Conditional CAPM and the cross-section of expected returns", Journal of Finance ,vol.51,3-53

Bodurtha,J.N.,J.N.C.Mark,1991,"Testing the CAPM with Time varying risks and returns", Journal of Finance, vol.46,1485-1505

Ng,L.,1991,"Tests of the CAPM with time varying covariances: a multivariate GARCH approach", Journal of Finance, vol.46,1507-1521

Fisher,L.,J.H.Kamin, 1985,"Forecasting systematic risk: estimates of "raw" beta that take account of the tendency of beta to change and heteroskedasticity of residual returns", Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.20,127-149

Mackinlay,A.C.,M.P.Richardson,1991," Using Generalized method of moments to test mean variance efficiency", Journal of Finance, vol.46,511-527

Roll.R.,S.A.Ross,1994,"Relation between expected returns and betas", Journal of Finance, vol.49,101-121

Jarrow, R.A.,D.B. Madan,1997,"Is Mean-Variance Analysis Vacuous: Or was Beta Still Born?", European Finance Review,vol.1, 15–30.